

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



Morfología Matemática Fuzzy Aplicada a la Segmentación de Imágenes Reconstruidas

Tesis presentada por:

Br. Lisbeth Corbacho Carazas.

**Para optar al Título Profesional de Licenciada
en Matemática.**

Asesor: Dr. Alejandro Ttito Ttica.

CUSCO - PERÚ

2022

INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, asesor del trabajo de investigación/tesis titulado: “**Morfología Matemática Fuzzy Aplicada a la Segmentación de Imágenes Reconstruidas**” presentado por: **Lisbeth Corbacho Carazas** con Nro. de DNI: **44596199**, para optar el título profesional de: **Licenciado en Matemáticas**. Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por **1** veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del *Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de laUNSAAC* y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de **3%**

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico otítulo profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (x)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y **adjunto** la primera hoja del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco,27 de enero de 2022



.....
Dr. ALEJANDRO TTITO TTICA

Post firma: Alejandro Ttito Ttica

Nro. de DNI: 24676328

ORCID del Asesor: 0000-0002-6898-5307

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.



Tesis_Lisbeth_revisado.pdf

23 dic 2021

12038 palabras/56950 caracteres

LISBET CORBACHO

Tesis_Lisbeth_revisado.pdf

Resumen de fuentes

3%

SIMILITUD GENERAL

1	www.saludcastillayleon.es INTERNET	<1%
2	repositorio.unicamp.br INTERNET	<1%
3	www.revistas.unitru.edu.pe INTERNET	<1%
4	repositorio.ug.edu.ec INTERNET	<1%
5	repositorio.ute.edu.ec INTERNET	<1%
6	Michał Baczyński. "Fuzzy Implications from Fuzzy Logic Operations", Studies in Fuzziness and Soft Computing, 2008 CROSSREF	<1%
7	epdf.pub INTERNET	<1%
8	www.atlantis-press.com INTERNET	<1%
9	Peter Sussner. "Classification of Fuzzy Mathematical Morphologies Based on Concepts of Inclusion Measure and Duality", Journal of ... CROSSREF	<1%
10	biblio.ugent.be INTERNET	<1%
11	BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA on 2019-10-18 TRABAJOS ENTREGADOS	<1%
12	Higher Education Commission Pakistan on 2019-07-12 TRABAJOS ENTREGADOS	<1%

Se excluyeron los depósitos de búsqueda:

Ninguno

Excluido del Informe de Similitud:

Bibliografía

Coincidencias menores (15 palabras o menos)

Se excluyeron las fuentes:

Ninguno

Dedicado a Dios por cuidarme, guiarme y darme fortaleza.

*A mis padres Tomasa y Valentin por todo su amor, enseñanzas
y apoyo incondicional. A mis hermanos, Luz Angélica e Iván por
siempre creer en mí.*

Agradecimientos

A mis padres Tomasa Carazas y Valentin Corbacho, y a mis hermanos Luz Angélica e Iván, de quienes he recibido un inmenso apoyo y cariño.

A César Díaz por todo su amor, paciencia y apoyo emocional.

A mi asesor, el Profesor Dr. Alejandro Tito Ttica por toda su dedicación y orientación, fundamentales para la realización de esta tesis y mi crecimiento profesional.

A los profesores Gabrielle Frish (Q.E.P.D.), Guido Alvarez, Epifanio Puma, Patricio Choque, Katia García, Silvestre Choque, Pedro Quispe y Rina Zamalloa por los conocimientos transmitidos.

A la Universidad San Antonio Abad del Cusco - UNSAAC por brindarme su infraestructura durante la graduación, y a su personal administrativo por su ayuda.

A todos mis amigos con quienes compartí vivencias, alegrías y tristezas, dándole un especial encanto al camino de la graduación: Gleny, Pierina, Garry, Yojhan, Alfredo, Victor Raúl, Percy, Gino, Carmen, Mónica, Ronald, Yanina y todas aquellas personas que directa o indirectamente participaron de esa travesía.

Y a todas aquellas personas que de una u otra forma contribuyeron a la culminación de esta tesis, mi más sincero agradecimiento.

Resumen

Una imagen reconstruida es obtenida a partir de sinogramas, los cuales son proyecciones realizadas por equipos especializados. Estos sinogramas, por lo general son afectados por varias fuentes de ruido. En esta tesis se desarrolla un método para segmentar una imagen reconstruida a partir de un sinograma afectado por ruido de Poisson, basado en los operadores fundamentales de la morfología matemática fuzzy. El método consiste en utilizar una combinación específica de los operadores apertura fuzzy y cierre fuzzy como filtro del ruido de la imagen reconstruida, y posteriormente realizar su segmentación mediante el uso del gradiente morfológico fuzzy basado en los operadores de erosión fuzzy y dilatación fuzzy. Con este propósito, se estudió la morfología matemática fuzzy como extensión de la morfología matemática binaria, resaltando sus principales operadores algebraicos, también, fue realizada la implementación computacional del método mencionado y el análisis de los resultados obtenidos. Así, la utilización del método desarrollado produce mejores resultados en la segmentación de la imagen, al compararlo con la utilización directa del gradiente morfológico fuzzy.

Palabras Clave: Morfología Matemática fuzzy, Operadores Morfológicos, Gradiente Morfológico, Imágenes reconstruidas, Sinograma.

Índice general

Introducción	2
1. Planteamiento del Problema	6
1.1. Descripción del Problema	6
1.2. Formulación del Problema	6
1.3. Objetivos	7
1.4. Justificación	8
1.5. Limitaciones de la Investigación	8
1.6. Metodología	8
1.7. Tipo de Investigación	9
2. Marco Teórico Conceptual	10
2.1. Antecedentes de la Investigación	10
2.2. Bases Teóricas	11
2.2.1. Relación de Orden Parcial	11
2.2.2. Retículos Completos	12
2.2.3. Aplicaciones entre Posets.	14
2.2.4. Morfología en Retículos Completos	15
3. Morfología Matemática Binaria	18

3.1. Imagen Binaria	18
3.2. Erosión y Dilatación de una Imagen Binaria	20
3.3. Propiedades de la Erosión y la Dilatación de una Imagen Binaria	22
3.4. Dualidad entre la Dilatación y la Erosión	25
3.5. Apertura y Cierre de una Imagen Binaria	25
4. Morfología Matemática Fuzzy (MMF)	29
4.1. Extensión de la MM Binaria	29
4.2. Teoría de Conjuntos Fuzzy	30
4.3. Operadores Fuzzy	31
4.4. Operadores Básicos de la MMF	36
4.5. Gradiente Morfológico Fuzzy	45
5. Segmentación de Imágenes Reconstruidas basada en MMF	47
5.1. Segmentación de una Imagen Digital	47
5.2. Imágenes Reconstruidas	48
5.3. Utilización de la MMF en Segmentación de Imágenes Reconstruidas	51
Conclusiones	57
Recomendaciones	59
Anexo A: Implementación Computacional	60
Bibliografía	64

Índice de figuras

1.	Imagen digital en escala de grises e imagen binaria	3
3.1.	Traslación y reflexión de una imagen binaria	19
3.2.	Erosión de una imagen binaria.	20
3.3.	Dilatación de una imagen binaria.	21
3.4.	Ejemplo de apertura de una imagen binaria	26
3.5.	Ejemplo de cierre de una imagen binaria	27
4.1.	Dilatación y erosión fuzzy de la imagen en escala de grises	41
4.2.	Apertura y cierre de un imagen corrompida por ruido de Poisson	44
4.3.	Gradiente morfológico fuzzy	46
5.1.	Imágenes segmentadas	48
5.2.	Phantom y sinograma	49
5.3.	Imagen reconstruida a partir de un sinograma	50
5.4.	Sinograma con ruido de Poisson	51
5.5.	Secuencia del método propuesto	52
5.6.	Segmentación del Phantom	53
5.7.	Segmentación de una imagen ruidosa utilizando MMF	54
5.8.	Segmentación de una imagen ruidosa utilizando MMF-CO	55

Introducción

La morfología matemática (MM) es una teoría empleada en el procesamiento y análisis de objetos (imágenes) que utiliza operadores y funciones basados en conceptos topológicos y geométricos [23]. Esta teoría fue desarrollada por Matherom [23] y Serra [34] a inicios de la década de 1960, y está basada en los trabajos de Minkowski y Hadwiger [17]. Durante la década de 1980, la MM adquirió relevancia en áreas como procesamiento de imágenes, reconocimiento de patrones y visión computacional.

Los primeros operadores de la MM eran apenas dirigidos a imágenes binarias, luego, usando la noción de umbra, Sternberg [38] generalizó los operadores de la morfología binaria para el caso de imágenes en escala de grises. Posteriormente, De Beats [8], Nachteagel et al. [28] también extienden la MM binaria (MMB) utilizando conceptos de la teoría de conjuntos fuzzy. La MM binaria, la MM en escala de grises, la MM basada en teoría de conjuntos fuzzy llamada MM fuzzy (MMF), etc., poseen como base la estructura algebraica de retículos completos. En efecto, los retículos completos representan un contexto mas general donde la morfología matemática puede ser conducida [12, 29]. De este modo, la MMF puede ser tratada desde un punto de vista algebraico, donde adquiere interesantes propiedades incluyendo la noción de dualidad entre operadores. Vale resaltar que en MM existen dos formas de entender la dualidad entre operadores, a decir: la dualidad por medio de la negación y la dualidad por medio la adjunción [44].

Los operadores básicos de la MMF son: la erosión fuzzy, la dilatación fuzzy, la apertura fuzzy y el cierre fuzzy. Estos operadores pueden ser expresados a partir de medidas de inclusión e intersección fuzzy, siendo aplicadas a una imagen digital bidimensional. Una imagen digital bidimensional en escala de grises es representada como una función $\mathbf{a} : X \rightarrow \mathbb{G}$, donde $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{R}$ o $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{Z}$ es el conjunto de valores de la imagen \mathbf{a} , y X puede ser \mathbb{R}^2 o \mathbb{Z}^2 . De esta forma, cada $\mathbf{a}(x)$ representa el nivel de intensidad de luz en el pixel $x \in X$. En la Figura 1 se presenta una imagen digital en escala de grises ($\mathbb{G} = [0, 1]$) y una imagen binaria ($\mathbb{G} = \{0, 1\}$).



Figura 1: a) Imagen digital en escala de grises. b) Imagen binaria.

Basada en los operadores morfológicos básicos de erosión, dilatación, apertura y cierre, la MMF puede ser utilizada en diferentes aplicaciones en procesamiento de imágenes digitales, con destaque para la detección de bordes de imágenes digitales [11, 12, 39, 42], y para la segmentación de imágenes digitales reconstruidas [14, 41]. En este trabajo nos enfocaremos en la aplicación de la MM fuzzy en la segmentación de imágenes digitales reconstruidas, utilizando los operadores de apertura fuzzy y cierre fuzzy sobre una imagen digital. Recordemos que la segmentación de imágenes digitales consiste en localizar regiones con significado [41]. El resultado de la segmentación de una imagen es un

conjunto de segmentos (o regiones) que cubren toda la imagen sin superponerse.

La organización general del presente trabajo adopta la siguiente secuencia:

1. En el Capítulo 1, se presenta el planteamiento, descripción, formulación, justificación y metodología del trabajo de tesis.
2. En el Capítulo 2, se presenta los antecedentes de la investigación y la base teórica enfocada en el concepto de retículos completos y aplicaciones entre retículos completos, estos conceptos serán utilizados para desenvolver la morfología matemática fuzzy.
3. En el Capítulo 3, se introduce la MM binaria para el desarrollo y entendimiento de la morfología matemática fuzzy. En la MM binaria definimos sus principales operadores morfológicos, como son: la erosión, la dilatación, el cierre y la apertura de una imagen binaria y exploramos algunas de sus principales propiedades, las cuales son aplicadas a imágenes binarias.
4. En el Capítulo 4, se introduce la MMF como extensión de la MMB y sus principales operadores morfológicos fuzzy como son: la erosión fuzzy, la dilatación fuzzy, el cierre fuzzy y la apertura fuzzy de una imagen en escala grises. Además, exploramos algunas de sus principales propiedades aplicadas a imágenes en escala de grises.
5. En el Capítulo 5, se presenta la aplicación de la MMF en la segmentación de imágenes reconstruidas a partir de sinogramas afectados por ruido de Poisson.
6. Después de los capítulos mencionados, se presenta las conclusiones y las recomendaciones del trabajo de tesis.
7. Finalmente, son incluidas las referencias bibliográficas y el anexo del trabajo que

comprenden los programas computacionales utilizados para el desarrollo de la aplicación.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

1.1. Descripción del Problema

Una imagen tomográfica bidimensional es esencialmente una imagen reconstruida a partir de un sinograma, siendo este un conjunto de proyecciones obtenidas por equipos especializados (por ejemplo un tomógrafo). Por medio de técnicas de reconstrucción sobre el sinograma obtenemos una imagen reconstruida (en escala de grises) que se proporciona al usuario para su posterior análisis. En la práctica, el sinograma a menudo se ve afectado por diversas fuentes de ruido, por ejemplo: limitaciones de detección, defectos en equipos de medición, condiciones ambientales, etc.. Estos ruidos pueden afectar la segmentación de las imágenes reconstruidas y en consecuencia su análisis. En este trabajo abordaremos ese problema utilizando la morfología matemática fuzzy.

1.2. Formulación del Problema

Problema General

¿Es posible aplicar la morfología matemática fuzzy en la segmentación de imágenes

reconstruidas a partir de sinogramas afectados por ruido?

Problemas Específicos

1. ¿Qué operadores morfológicos fuzzy pueden ser utilizados para el tratamiento en la segmentación de las imágenes digitales reconstruidas?
2. ¿Es posible implementar computacionalmente el funcionamiento de los operadores morfológicos fuzzy en segmentación de imágenes reconstruidas?
3. ¿Puede la morfología matemática fuzzy mejorar la segmentación de imágenes reconstruidas?

1.3. Objetivos

Objetivo General

Aplicar la morfología matemática fuzzy en segmentación de imágenes reconstruidas a partir de sinogramas afectadas por ruido.

Objetivos Específicos

1. Utilizar los operadores morfológicos para el tratamiento en segmentación de imágenes digitales reconstruidas;
2. Implementar computacionalmente los operadores morfológicos fuzzy para la segmentación de imágenes digitales reconstruidas;
3. Mejorar la segmentación de imágenes reconstruidas mediante la morfología matemática fuzzy.

1.4. Justificación

En la vanguardia de la nueva tecnología, donde la matemática juega un papel importante, la morfología matemática fuzzy a mostrado un gran potencial en el campo del procesamiento de imágenes, en especial en la detección de bordes y la segmentación de imágenes digitales. A diferencia de los métodos tradicionales como Canny, Sobel, etc., la MMF posee una formulación matemática mas completa e intuitiva, lo que se traduce (desde el punto de vista del especialista) en un análisis y en resultados más confiables.

1.5. Limitaciones de la Investigación

- Escasa referencias bibliográficas respecto al tema propuesto;
- No existe base de datos de sinogramas.
- Costo excesivo de artículos referentes al tema;
- Costo excesivo del material informático (software).

1.6. Metodología

El presente trabajo de investigación inicia con una revisión bibliográfica sobre los temas abordados. Se analizaron formalmente los conceptos a ser utilizados, siendo realizadas las demostraciones mas relevantes para el desarrollo del método para segmentación a ser propuesto. En seguida, se estableció la manera en que se usarían operadores fuzzy apropiados con el fin de mejorar la segmentación de una imagen reconstruida a partir de un sinograma ruidoso. Con esto, se realizaron la implementación y los experimentos

computacionales correspondientes. Finalmente, se realizaron los análisis y discusiones de los resultados obtenidos.

1.7. Tipo de Investigación

Utilizaremos el tipo de investigación analítico, descriptivo y deductivo.

Capítulo 2

Marco Teórico Conceptual

2.1. Antecedentes de la Investigación

Una aplicación más completa sobre este trabajo se encuentra el artículo “Some approaches based on interval-valued images and \mathbb{L} -fuzzy mathematical morphology for segmenting images reconstructed from noisy sinograms” [41], recientemente publicado por Sussner et al., en el cual se simuló imágenes reconstruidas a partir de un sinograma con ruido de Poisson. En seguida, sobre esas imágenes reconstruidas se utilizaron diferentes enfoques, siendo uno de los enfoques el que será presentado en esta tesis. En el artículo mencionado, se utilizó la extensión de la morfología matemática fuzzy para segmentación de imágenes reconstruidas basada en la extensión de los cuatro operadores fundamentales de la MMF. Vale señalar que uno de los pilares de esos enfoques es la utilización de algún filtro de ruido basado en la extensión de la MMF sobre una imagen digital corrompida, ya utilizados por diferentes autores destacándose González et al. [14] y Sussner et al. [43] por presentar, en la práctica, buenos resultados.

2.2. Bases Teóricas

En esta sección se presentan los principales conceptos de la teoría de retículos completos donde la morfología matemática puede ser conducida. Estos conceptos pueden ser encontrados en Birkhoff [4], Davey [7] y Grätzer [15].

2.2.1. Relación de Orden Parcial

Definición 2.2.1. [7] Sea \mathbb{L} un conjunto diferente del vacío. Una relación de orden \leq sobre \mathbb{L} es llamada orden parcial se satisface las siguientes condiciones:

1. Reflexividad: $x \leq x$;
2. Antisimetría: Si $x \leq y$ e $y \leq x$ implica $x = y$;
3. Transitividad: Si $x \leq y$ e $y \leq z$ implica $x \leq z$,

para todo $x, y, z \in \mathbb{L}$. El conjunto \mathbb{L} con el orden parcial \leq es llamado conjunto parcialmente ordenado o poset y es denotado por (\mathbb{L}, \leq) .

Sea (\mathbb{L}, \leq) un conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq \mathbb{L}$. Un elemento $l \in \mathbb{L}$ es llamado *cota inferior* de Y si $l \leq y$, para todo $y \in Y$, y el mayor de las cotas inferiores x , en caso de existir, es llamado *ínfimo*, esto es, $\forall l \in \mathbb{L} : (\forall y \in Y : l \leq y) \Rightarrow l \leq x$. De forma similar, un elemento $u \in \mathbb{L}$ es llamado *cota superior* de Y si $y \leq u$, para todo $y \in Y$ y el menor de las cotas superiores x , en caso de existir, es llamado *supremo*, esto es, $\forall u \in \mathbb{L} : (\forall y \in Y : y \leq u) \Rightarrow x \leq u$. El símbolo $\bigwedge Y$ denota el ínfimo de Y y el símbolo $\bigvee Y$ denota el supremo de Y .

Si $Y = \{x, y\}$, entonces el ínfimo de Y ($\bigwedge Y$) será denotado por $x \wedge y$ y el supremo de Y ($\bigvee Y$) será denotado por $x \vee y$. Si $Y = \{y_j \mid j \in J\}$ para algún conjunto de

índices J , entonces el ínfimo de Y ($\bigwedge Y$) será denotado por $\bigwedge_{j \in J} y_j$ y el supremo de Y ($\bigvee Y$) será denotado por $\bigvee_{i \in J} y_j$.

2.2.2. Retículos Completos

Definición 2.2.2. [7] Un poset (\mathbb{L}, \leq) es llamado:

1. Poset acotado, si \mathbb{L} posee ínfimo y supremo.
2. Retículo, si cada subconjunto finito no vacío de \mathbb{L} posee ínfimo y supremo en \mathbb{L} .
3. Retículo completo, si cada subconjunto no vacío de \mathbb{L} posee ínfimo y supremo en \mathbb{L} .

Si \mathbb{L} satisface los ítems 1. y 2., es llamado retículo acotado.

Lema 2.2.3. [7] Sea \mathbb{L} un retículo y $x, y \in \mathbb{L}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $x \leq y$;
2. $x \vee y = y$;
3. $x \wedge y = x$

Teorema 2.2.4. [7] Sea \mathbb{L} un retículo. Entonces la relaciones binarias $\vee, \wedge : \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{L}$ satisfacen los siguiente:

1. $(x \vee y) = (y \vee x)$ (conmutatividad);
2. $(x \wedge y) = (y \wedge x)$ (conmutatividad);
5. $x \vee (x \wedge y) = x$ (absorción);

$$6. x \wedge (x \vee y) = x \text{ (absorción);}$$

$$3. (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \text{ (asociatividad);}$$

$$4. (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \text{ (asociatividad).}$$

para todo $x, y, z \in \mathbb{L}$.

Así, alternativamente, un retículo puede ser visto como una estructura algebraica $(\mathbb{L}, \vee, \wedge)$.

Ejemplo 2.2.5. Sea $P(X)$ el conjunto potencia de $X \neq \emptyset$. La relación de inclusión \subseteq es una orden parcial sobre $P(X)$, así, $(P(X), \subseteq)$ es un poset acotado, siendo su ínfimo \emptyset y su supremo X . También, note que $(P(X), \subseteq)$ es un retículo completo.

Ejemplo 2.2.6. Para todo $x \geq 0, x \in \mathbb{R}$, se tiene que el intervalo $[0, x]$ es un retículo completo con el orden usual heredado de \mathbb{R} . En particular, si $x = 1$, el intervalo $[0, 1]$ es un retículo completo.

Ejemplo 2.2.7. Sea \mathbb{L} un poset. El producto $\mathbb{L}^n = \mathbb{L} \times \dots \times \mathbb{L}$ es un poset con el orden parcial dado por:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.1)$$

Ejemplo 2.2.8. Sea $X \neq \emptyset$. La clase de funciones $\mathbb{L}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{L}\}$ es un poset con el orden parcial dado por:

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in X, \quad (2.2)$$

donde $g, f \in \mathbb{L}^X$.

2.2.3. Aplicaciones entre Posets.

Definición 2.2.9. [7] Sean $(\mathbb{L}, \leq_{\mathbb{L}})$ y $(\mathbb{M}, \leq_{\mathbb{M}})$ posets. La aplicación $f : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$, para todo $x, y \in \mathbb{L}$, es llamada:

- *Creciente o isótona si $x \leq_{\mathbb{L}} y$ implica $f(x) \leq_{\mathbb{M}} f(y)$. En este caso, se dice que f preserva el orden.*
- *Decreciente o antítona si $x \leq_{\mathbb{L}} y$ implica $f(y) \leq f(x)$. En este caso, se dice que f revierte el orden.*

Definición 2.2.10. [7] Sean \mathbb{L} y \mathbb{M} posets. La aplicación $f : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ es llamada isomorfismo de orden si es biyectiva y si f y su inversa f^{-1} preserva el orden, esto es:

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y), \quad (2.3)$$

para todo $x, y \in \mathbb{L}$. Si \mathbb{L} y \mathbb{M} son retículos (o retículos completos), entonces el isomorfismo de orden f es llamado isomorfismo de retículos (o isomorfismo de retículos completos).

Ejemplo 2.2.11. Sea $X \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{P}(X) \simeq \{0, 1\}^X$.

Definición 2.2.12. [20] Sea \mathbb{L} un poset. Una aplicación $\phi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ es llamada (o llamado)

- *idempotente, si $\phi \circ \phi = \phi$;*
- *extensiva, si $x \leq \phi(x)$, para todo $x \in \mathbb{L}$;*
- *anti-extensiva, si $\phi(x) \leq x$, para todo $x \in \mathbb{L}$;*
- *apertura, si ϕ es creciente, anti-extensiva e idempotente;*

- *cierre, si ϕ es creciente, extensiva e idempotente;*

Supongamos que ω y κ son, respectivamente, una abertura y un cierre sobre un poset \mathbb{L} . Desde que ω es anti-extensiva y idempotente y κ es extensiva e idempotente, observamos las siguientes relaciones:

$$\omega = \omega \circ \omega \leq \omega \circ \kappa \leq \kappa \circ \kappa = \kappa \quad (2.4)$$

$$\omega = \omega \circ \omega \leq \kappa \circ \omega \leq \kappa \circ \kappa = \kappa. \quad (2.5)$$

Por tanto se tiene que:

$$\omega \leq \omega \circ \kappa, \kappa \circ \omega \leq \kappa. \quad (2.6)$$

2.2.4. Morfología en Retículos Completos

La morfología matemática basada en retículos completos presenta dos enfoques no necesariamente excluyentes, los cuales son:

1. La MM en el sentido geométrico y topológico basados en los operadores básicos de erosión y dilatación utilizados para extraer información de la imagen, esos operadores son generalmente asociados a un elemento estructurante S (ver [23, 34, 36]).
2. La MM en sentido algebraico, usualmente definida sobre retículos completos, teniendo como base los operadores de erosión y dilatación (ver [19, 32, 33, 34]).

Los siguientes conceptos son utilizados en la MM en el sentido algebraico.

Definición 2.2.13. [20] Sean \mathbb{L} y \mathbb{M} retículos completos. Un operador $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ que conmuta con la operación de supremo es llamado dilatación, esto es

$$\delta \left(\bigvee X \right) = \bigvee_{x \in X} \delta(x). \quad (2.7)$$

para todo subconjunto $X \subseteq \mathbb{L}$.

De forma análoga, una erosión es un operador $\varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ que conmuta con la operación de ínfimo, esto es

$$\varepsilon \left(\bigwedge Y \right) = \bigwedge_{y \in Y} \varepsilon(y). \quad (2.8)$$

para todo subconjunto $Y \subseteq \mathbb{M}$.

Los operadores de dilatación y erosión generalmente están relacionados mediante una relación de dualidad. La noción de dualidad difiere entre los investigadores de la MM. Investigadores como BLoch y Maitre [5], Sinha y Dougherty [35], Nachetegal y Kerre [29], emplean una dualidad basada en el concepto de negación. Otros investigadores, como Maragos [22], Ronse [32], Denge e Heijmans [9], defienden el concepto de adjunción siendo este último el enfoque que utilizaremos en este trabajo.

Definición 2.2.14. [20] Sean $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ y $\varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ donde \mathbb{L} y \mathbb{M} son retículos completos. El par (ε, δ) representa una adjunción, si y solo si

$$\delta(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \varepsilon(y). \quad (2.9)$$

La adjunción, considerada por muchos autores como sinónimo de conexión de Galois [7], representa un papel importante en la MM al garantizar que un par de operadores adjuntos es formado, necesariamente, por una única dilatación y una única erosión [20], siendo esta particularidad garantizada por la siguiente proposición:

Proposición 2.2.15. [20] Sean \mathbb{L} e \mathbb{M} retículos completos y considerando los operadores $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ y $\varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$.

1. Si (ε, δ) forma una adjunción, entonces δ es una dilatación y ε es una erosión.

2. Para toda dilatación δ existe una única erosión ε tal que (ε, δ) forma una adjunción.

La erosión adjunta es dada por

$$\varepsilon(y) = \bigvee \{x \in \mathbb{L} : \delta(x) \leq y\} \quad (2.10)$$

para todo $y \in \mathbb{M}$.

3. Para toda erosión ε existe una única dilatación δ tal que (ε, δ) es una adjunción.

La dilatación adjunta es dada por

$$\delta(x) = \bigwedge \{y \in \mathbb{M} : \varepsilon(y) \geq x\} \quad (2.11)$$

para todo $x \in \mathbb{L}$.

El siguiente teorema muestra como construir aberturas e cierres a partir de erosiones y dilataciones sobre retículos completos.

Teorema 2.2.16. [18] Sean \mathbb{L} e \mathbb{M} retículos completos. Si $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{M}$ y $\varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{L}$ son adjuntos, entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. La composición $\delta \circ \varepsilon : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ es una apertura.
2. La composición $\varepsilon \circ \delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ es un cierre.
3. Si $\mathbb{L} = \mathbb{M}$, entonces $\delta(\varepsilon(x)) \leq x \leq \varepsilon(\delta(x))$, para todo $x \in \mathbb{L}$.

Capítulo 3

Morfología Matemática Binaria

A principios de la década de 1960, Matheron [23] y Serra [34] inventaron la morfología matemática (MM) como parte del procesamiento de imágenes binarias, confiando en gran medida en los primeros trabajos de Minkowski [26] y Hadwiger [16].

Matheron y Serra lograron desarrollar una colección de herramientas llamados operadores morfológicos, los cuales son extremadamente útiles para el análisis de las imágenes binarias.

3.1. Imagen Binaria

Una imagen binaria puede ser descrita en términos de un subconjunto de X (X denota el espacio euclidiano \mathbb{R}^2 o el espacio digital \mathbb{Z}^2) cuyos valores son cero o uno. Específicamente, una imagen binaria, por el isomorfismo que existe entre $\mathcal{P}(X) \simeq \{0, 1\}^X$, está definida como el conjunto:

$$A = \{\mathbf{x} \mid A_f(\mathbf{x}) = 1\} \tag{3.1}$$

El vector \mathbf{x} representa la coordenada del pixel (x, y) mientras que $A_f \in \{0, 1\}^X$ es una imagen binaria que tiene valores cero o uno. Así, el término "imagen binaria" se identifica con el término "conjunto" y los pixeles que poseen valor de 1 son llamados pixeles de primer plano (forman parte del conjunto), mientras que los pixeles con valor 0 son llamados pixeles del plano de fondo.

Dado un subconjunto $A \subseteq X$ y un vector $x \in X$, denotamos por A_x a la *traslación* de A por el vector $x \in X$ tal que,

$$A_x = \{a + x \mid a \in A\}, \quad (3.2)$$

y el símbolo \hat{A} denota una *reflexión* de A alrededor del origen dado por

$$\hat{A} = \{-a \in X \mid a \in A\}. \quad (3.3)$$

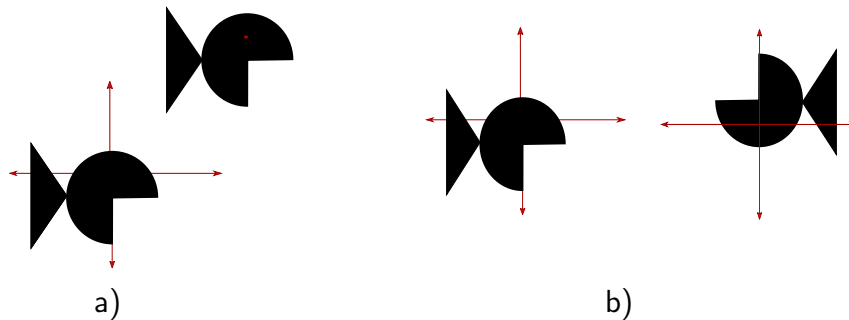


Figura 3.1: Traslación (a) y reflexión (b) de una imagen binaria

La *suma de Minkowski* de los subconjuntos $A, S \subset X$ es definido por

$$A \oplus S = \{a + s \mid a \in A, s \in S\}, \quad (3.4)$$

y a la *diferencia de Minkowski* de dos subconjuntos $A, S \subset X$ es definido por

$$A \ominus S = \{x : s + x \in A, \forall s \in S\} = \{x \mid S_x \subseteq A\} \quad (3.5)$$

El subconjunto $S \subset X$ es llamado *elemento estructurante*. Este subconjunto generalmente es usado para extraer informaciones topológicas o geométricas de una imagen.

3.2. Erosión y Dilatación de una Imagen Binaria

Definición 3.2.1. [20] Sean $A \subset X$ una imagen binaria y $S \subset X$ un elemento estructurante. Se define la erosión binaria $\varepsilon_S(A)$ por:

$$\varepsilon_S(A) = A \ominus S \quad (3.6)$$

En la Figura 3.2 se muestra un ejemplo de erosión de una imagen binaria de acuerdo con la Definición 3.2.1

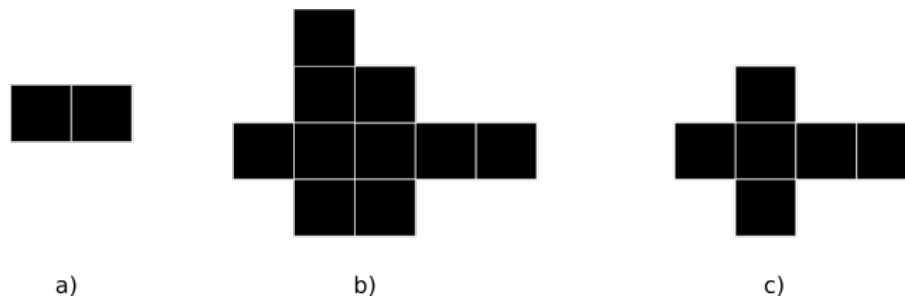


Figura 3.2: a) Elemento estructurante. b) Imagen binaria. c) Erosión de una imagen binaria.

Teorema 3.2.2. Dado $A \subset X$ una imagen binaria y $S \subset X$ un elemento estructurante. La erosión binaria $\varepsilon_S(A)$ puede también ser escrito como

$$\varepsilon_S(A) = \bigcap_{s \in S} A_{-s}. \quad (3.7)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 x \in \varepsilon_S(A) &\Leftrightarrow S_x \subseteq A \\
 &\Leftrightarrow x + s \in A, \forall s \in S \\
 &\Leftrightarrow \exists a \in A \text{ tal que } a = x + s, \forall s \in S \\
 &\Leftrightarrow \exists a \in A \text{ tal que } a - s = x, \forall s \in S \\
 &\Leftrightarrow x \in A_{-s}, \forall s \in S \\
 &\Leftrightarrow \bigcap_{s \in S} A_{-s}.
 \end{aligned}$$

□

Definición 3.2.3. [20] Sean $A \subset X$ una imagen binaria y $S \subset X$ un elemento estructurante. Se define la dilatación binaria $\delta_S(A)$ por:

$$\delta_S(A) = A \oplus S. \quad (3.8)$$

En la Figura 3.3 se muestra un ejemplo de dilatación de una imagen binaria de acuerdo con la Definición 3.2.3.

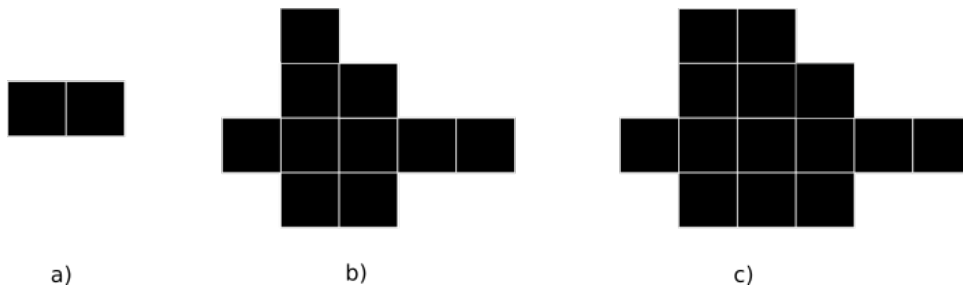


Figura 3.3: a) Elemento estructurante. b) Imagen binaria. c) Dilatación de una imagen binaria.

Teorema 3.2.4. Dado $A \subset X$ una imagen binaria y $S \subset X$ elemento estructurante. La dilatación binaria, $\delta_S(A)$, puede también ser escrito como

$$\delta_S(A) = \bigcup_{s \in S} A_s.$$

Demostración. Para todo $A, S \subset (X)$. Sea $x \in X$,

$$\begin{aligned} x \in A \oplus S &\Leftrightarrow \exists a \in A, \exists s \in S \text{ tal que } x = a + s \\ &\Leftrightarrow \exists s \in S \text{ tal que } x \in A_s \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{s \in S} A_s. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2.5. Dado $A \subset X$ una imagen binaria y $S \subset X$ elemento estructurante.

La dilatación binaria, $\delta_S(A)$, puede también ser escrito como

$$\delta_S(A) = \{x \mid \hat{S}_x \cap A \neq \emptyset\} \quad (3.9)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} A \oplus S &= \{x = a + s \mid a \in A, s \in S\} \\ &= \{x \mid a \in A, x - a \in S\} \\ &= \{x \mid a \in A, a - x \in \hat{S}\} \\ &= \{x \mid a \in A, a \in \hat{S}_x\} \\ &= \{x \mid \hat{S}_x \cap A \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

□

3.3. Propiedades de la Erosión y la Dilatación de una Imagen Binaria

Proposition 3.3.1. Sean $A, B, S, R \subset X$ y $h \in X$. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $(A \oplus S)_h = A_h \oplus S$;
2. $(A \oplus S) \oplus R = A \oplus (S \oplus R)$;
3. $A \subseteq B \Rightarrow A \oplus S \subseteq B \oplus S$;

Demostración.

1. Sea $h \in X$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 x \in (A \oplus S)_h &\Leftrightarrow \exists y \in (A \oplus S) \text{ tal que } x = y + h \\
 &\Leftrightarrow y + s \in A, \forall s \in S \text{ tal que } x - h = y \\
 &\Leftrightarrow x - h + s \in A, \forall s \in S \text{ tal que } x - h = y \\
 &\Leftrightarrow x + s - h \in A, \forall s \in S \\
 &\Leftrightarrow x + s \in A_h, \forall s \in S \\
 &\Leftrightarrow x \in (A_h \oplus S).
 \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned}
 z \in (A \oplus S) \oplus R &\Leftrightarrow z + r \in A \oplus S, \forall r \in R \\
 &\Leftrightarrow z + r \in A \oplus S, \forall r \in R \\
 &\Leftrightarrow (z + r) + s \in A, \forall s \in S, \forall r \in R \\
 &\Leftrightarrow z + (r + s) \in A, \forall s \in S, \forall r \in R \\
 &\Leftrightarrow z + y \in A, \forall y \in R \oplus S \\
 &\Leftrightarrow z \in A \oplus (R \oplus S).
 \end{aligned}$$

3. Sea $x \in A \oplus S$. Así, $x + s \in A$, para todo $s \in S$. Como $A \subseteq B$ entonces $x + s \in B$, para todo $s \in S$, luego $x \in B \oplus S$. Por tanto $A \oplus S \subseteq B \oplus S$.

□

Proposition 3.3.2. Sean $A, B, S, R \subset X$ y $h \in X$. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $(A \oplus S)_h = A_h \oplus S$;
2. $(A \oplus S) \oplus R = A \oplus (S \oplus R)$;
3. $A \subseteq B \Rightarrow A \oplus S \subseteq B \oplus S$.

Demostración.

1. Sea $h \in X$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 x \in (A \oplus S)_h &\Leftrightarrow \exists a \in A, \exists s \in S \text{ tal que } x = (a + s) + h \\
 &\Leftrightarrow \exists a \in A, \exists s \in S \text{ tal que } x = (a + h) + s \\
 &\Leftrightarrow \exists y \in A_h, \exists s \in S \text{ tal que } x = y + s \\
 &\Leftrightarrow x \in A_h \oplus S.
 \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned}
 z \in (A \oplus S) \oplus R &\Leftrightarrow \exists r \in R, \exists y \in A \oplus S \text{ tal que } z = r + y \\
 &\Leftrightarrow \exists r \in R, \exists a \in A, \exists s \in S \text{ tal que } z = r + (s + a) \\
 &\Leftrightarrow \exists r \in R, \exists a \in A, \exists s \in S \text{ tal que } z = (r + s) + a \\
 &\Leftrightarrow \exists n \in R \oplus S, \exists a \in A \text{ tal que } z = n + a \\
 &\Leftrightarrow z \in A \oplus (R \oplus S).
 \end{aligned}$$

3. Suponga que $A \subseteq B$. Si $x \in A \subseteq B$ entonces existen $a \in A$ y $s \in S$ tal que $x = a + s$. Como $a \in A$ entonces $a \in B$. Así, $x = a + s \in B \oplus S$, por tanto $A \oplus S \subseteq B \oplus S$.

□

3.4. Dualidad entre la Dilatación y la Erosión

Heijmans [20], Bloch y Maître [6], Sinha y Dougherty [35] relacionan la dilatación y la erosión de acuerdo a la noción de dualidad, la cual considera las siguientes perspectivas:

- La noción de dualidad basada en el complemento de conjuntos:

- $(X \oplus A)^c = X^c \ominus \hat{A}$, Eso debido a que,

$$\begin{aligned}
 (X \oplus A)^c &= \left(\bigcup_{a \in A} X_a \right)^c = \bigcap_{a \in A} X_a^c \\
 &= \bigcap \{X^c + a \mid a \in A\} \\
 &= \bigcap \{X^c - (-a) \mid -a \in \hat{A}\} \\
 &= \bigcap \{X^c - a' \mid a' \in \hat{A}\} \\
 &= \bigcap_{a' \in \hat{A}} X_{-a'}^c = X^c \ominus \hat{A}.
 \end{aligned}$$

- $(X \ominus A)^c = X^c \oplus \hat{A}$.

2. La noción de dualidad basada en la adjunción:

- $\delta_S(A) \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq \varepsilon_S(B)$, esto es $A \oplus S \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq B \ominus S$.

$$\begin{aligned}
 A \oplus S \subseteq B &\Leftrightarrow \bigcup_{s \in S} A_s \subseteq B \\
 &\Leftrightarrow A_s \subseteq B, \forall s \in S \\
 &\Leftrightarrow A \subseteq B \ominus S.
 \end{aligned}$$

3.5. Apertura y Cierre de una Imagen Binaria

Definición 3.5.1. [20] Sean $A \subset X$ una imagen binaria y $S \subset X$ un elemento estructurante. La apertura de una imagen binaria A por un elemento estructurante S es

definida por:

$$\gamma_S(A) := \delta_S(\varepsilon_S(A)) = (A \ominus S) \oplus S = A \circ S \quad (3.10)$$

En la Figura 4.29 se muestra dos ejemplos de aplicaciones de la apertura. En la parte superior de la Figura 4.29, el cierre elimina pequeñas salientes. En la parte inferior, la apertura elimina ruido de la imagen corrompida por ruido.

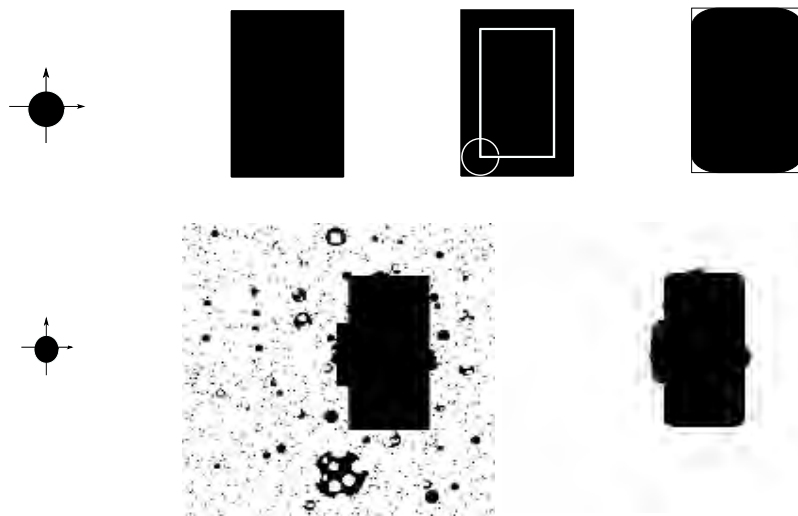


Figura 3.4: Ejemplo de apertura de una imagen binaria

Definición 3.5.2. [20] Sean $A \subset X$ una imagen binaria y $S \subset X$ un elemento estructurante. La cerradura de una imagen binaria A por un elemento estructurante S es definida por:

$$\phi_S(A) := \varepsilon_S(\delta_S(A)) = (A \oplus S) \ominus S = A \bullet S \quad (3.11)$$

Una aplicación del operador cierre es que puede eliminar pequeños huecos. Esto puede ser observado tanto en la parte superior como en la parte inferior de la Figura 3.5.

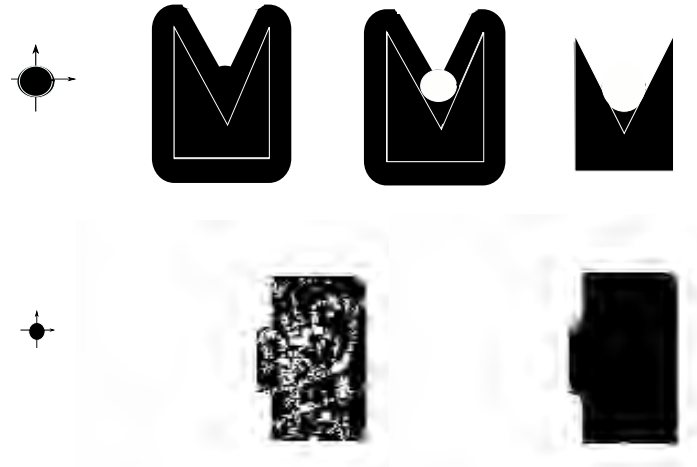


Figura 3.5: Ejemplo de cierre de una imagen binaria

Tanto la apertura como la cerradura son idempotentes, esto es:

$$(A \circ S) \circ S = A \circ S$$

$$(A \bullet S) \bullet S = A \bullet S.$$

La demostración de estas dos última propiedades están sujetas al siguiente lema

Lema 3.5.3. Sean $A, B \subset X$. Las siguientes relaciones entre la erosión, la dilatación, apertura y cerramiento son válidas

$$A \oplus B = (A \bullet B) \oplus B = (A \oplus B) \circ B. \quad (3.12)$$

Demostración. Sea $G = A \oplus B$, $H = G \ominus B$ e $I = H \oplus B$. Por la adjunción entre la dilatación y la erosión se tiene que:

$$G = A \oplus B \Rightarrow A \subseteq G \ominus B \Rightarrow G = A \oplus B \subseteq H \oplus B = I$$

$$\text{e } H = G \ominus B \Rightarrow H \oplus B \subseteq G \Rightarrow I \subseteq G.$$

Por tanto $G = I$, esto implica que:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= H \oplus B = (G \ominus B) \oplus B \\ &= ((A \oplus B) \ominus B) \oplus B \\ &= (A \bullet B) \oplus B = (A \oplus B) \circ B. \end{aligned}$$

□

En el siguiente teorema se muestra que el cierre es una operación idempotente.

Teorema 3.5.4. Sean $A, B \subset X$. Entonces

$$(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B \tag{3.13}$$

Demostración. Sean $A, B \subset X$.

$$\begin{aligned} A \oplus B = (A \bullet B) \oplus B &\Rightarrow (A \oplus B) \ominus B = ((A \bullet B) \oplus B) \ominus B \\ &\Rightarrow A \bullet B = (A \bullet B) \bullet B. \end{aligned}$$

□

La importancia de la idempotencia es que la apertura y el cierre no cambian después de realizar más de una iteración.

Capítulo 4

Morfología Matemática Fuzzy (MMF)

En esta sección serán presentados los principales conceptos de la teoría de conjuntos fuzzy y en la secuencia la MMF. En la MMF, enfocaremos en la relación de adjunción entre los operadores de dilatación y la erosión, como consecuencia la apertura es anti-extensiva y el cierre es extensivo.

4.1. Extensión de la MM Binaria

Tradicionalmente las imágenes binarias son representadas por subconjuntos de X (\mathbb{Z}^d o \mathbb{R}^d), mientras que las imágenes en escala de grises se pueden representar por funciones $X \rightarrow [0, 1]$. Así, la teoría de conjuntos fuzzy parece ser una opción lógica para la extensión de la MM binaria a la MM en imágenes en escala de grises, pues las imágenes en escala de grises pueden ser representadas por conjuntos fuzzy. Así, las herramientas dadas por la teoría de conjuntos fuzzy se pueden utilizar para definir operadores morfológicos fuzzy. Este enfoque, fue introducido por De Baets en [8], quien

propuso el uso de conjunciones e implicaciones fuzzy para definir operadores morfológicos fuzzy. De Baets consideró como un primer paso las t-normas como conjunciones fuzzy, y sus implicaciones residuales como implicaciones fuzzy. El concluyó que la pareja formada por una t-norma y su implicación residual genera una “buena” morfología matemática fuzzy, satisfaciendo propiedades algebraicas deseables.

4.2. Teoría de Conjuntos Fuzzy

La teoría de los conjuntos fuzzy extiende la teoría clásica de conjuntos. Esta teoría matemática fue introducida por Lotfi Zadeh [46] como una herramienta para modelar la imprecisión y la ambigüedad que surge en sistemas complejos. Un estudio más detallado de la teoría de conjuntos fuzzy puede ser encontrada en las siguientes referencias bibliográficas: [1, 2, 21].

Definición 4.2.1. [46] *Un conjunto fuzzy es definido como una función $\mathbf{a} : X \rightarrow [0, 1]$, donde \mathbf{a} es llamada de función de pertenencia y el valor de $\mathbf{a}(x)$ representa el grado de pertenencia de x en el conjunto fuzzy \mathbf{a} .*

Observación 4.2.2.

- La clase de los conjuntos fuzzy en X es denotado por $\mathcal{F}(X) = [0, 1]^X = \{a : X \rightarrow [0, 1]\}$.
- Se identifica un conjunto clásico $A \in \mathcal{P}(X)$ como un conjunto fuzzy $\mathbf{a} \in \mathcal{F}(X)$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{a}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0. & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (4.1)$$

De esta manera, un conjunto clásico A puede ser interpretado como un caso particular de un conjunto fuzzy, donde el valor de la función de pertenencia se encuentra en el conjunto $\{0, 1\}$.

Como fue comentado a un inicio, la teoría de conjuntos fuzzy puede ser usada para el desarrollo de los operadores básicos de la MM fuzzy desde que una imagen es representada como un función $\mathbf{a} : X \rightarrow [0, 1]$, la cual puede ser interpretada como un conjunto fuzzy \mathbf{a} en X . En adelante nos referiremos a una imagen $\mathbf{a} \in \mathcal{F}(X)$ como un conjunto fuzzy.

4.3. Operadores Fuzzy

Entre los operadores básicos de la teoría de conjuntos fuzzy que extienden los operadores lógicos booleanos, se tiene la conjunción y la implicación fuzzy. Vale resaltar que, en esta sección solo se enfocará en esos dos operadores, aunque existen otros operadores fuzzy como el operador s -norma y el operador de negación fuzzy.

Definición 4.3.1. [46] *Una conjunción fuzzy $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es un operador creciente en cada argumento que satisface $C(0, 0) = C(0, 1) = C(1, 0) = 0$ y $C(1, 1) = 1$. En particular, si C es conmutativa y asociativa que satisface $C(x, 1) = x$, para todo $x \in [0, 1]$, es llamada norma triangular o simplemente t -norma.*

Note que, la conjunción C extiende la conjunción clásica, también llamada conjunción Booleana " \wedge " en $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$, esto es: $\{0 \wedge 0\} = \{0 \wedge 1\} = \{1 \wedge 0\} = 0$ y $\{1 \wedge 1\} = 1$.

Ejemplo 4.3.2.

$$\begin{aligned}
T_M(x, y) &= x \wedge y && \text{Mínimo} \\
T_{LK}(x, y) &= 0 \vee (x + y - 1) && \text{Łukasiewicz} \\
T_{nM}(x, y) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x + y \leq 1 \\ x \wedge y & \text{caso contrario} \end{cases} && \text{Mínimo Nilpotente} \\
T_P(x, y) &= xy && \text{Producto.}
\end{aligned}$$

Las conjunciones de T_M, T_{LK}, T_{nM} y T_P , son ejemplos de t-normas.

Definición 4.3.3. [46] Un operador $I : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ decreciente en el primer argumento, creciente en el segundo argumento es llamado implicación fuzzy I y satisface $I(0, 0) = I(0, 1) = I(1, 1) = 1$ y $I(1, 0) = 0$. En particular, si la implicación fuzzy satisface $I(1, x) = x$, para todo $x \in [0, 1]$, I es llamada implicación de frontera.

Note que, la implicación de frontera I extiende la implicación clásica " \rightarrow " en $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$, i.e., $\{0 \rightarrow 0\} = \{0 \rightarrow 1\} = \{1 \rightarrow 1\} = 1$ y $\{1 \rightarrow 0\} = 0$.

Ejemplo 4.3.4.

$$\begin{aligned}
I_{LK}(x, y) &= 1 \wedge (y - x + 1), && \text{Łukasiewicz} \\
I_{KD}(x, y) &= (1 - x) \vee y, && \text{Kleene-Dienes} \\
I_{FD}(x, y) &= \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y, \\ (1 - x) \vee y & x > y \end{cases} && \text{Fodor} \\
I_{GD}(x, y) &= \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq y, \\ y & x > y \end{cases} && \text{Gödel.}
\end{aligned}$$

Otros ejemplos de conjunciones incluyendo t-normas e implicaciones de frontera fuzzy, pueden ser encontrados en [1, 2, 21].

Una conjunción fuzzy puede estar relacionada con una implicación fuzzy a través de una relación de dualidad con respecto a la adjunción [10]. Así se define el concepto de adjunción entre la conjunción y la implicación como sigue:

Definición 4.3.5. Sea $C_{\mathcal{F}}$ una conjunción fuzzy e $I_{\mathcal{F}}$ una implicación fuzzy tal que el par $(C_{\mathcal{F}}, I_{\mathcal{F}})$ son adjuntos si, y solamente si, $(C_{\mathcal{F}}(a, \cdot), I_{\mathcal{F}}(a, \cdot))$, para todo $a \in [0, 1]$, son adjuntos en el sentido de la Ecuación (2.9).

Definición 4.3.6. Una función $I : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ es llamada *R-implicación* si existe una *t-norma* T tal que:

$$I(x, y) = \bigvee \{t \in [0, 1] \mid T(x, t) \leq y\}, \quad \forall x, y \in [0, 1]. \quad (4.2)$$

Proposición 4.3.7. Sea T una *t-norma* fuzzy. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i. T es continua a izquierda (continua en el segundo argumento).
- ii. T e I_T formar un par adjunto (o son adjuntos), esto significa que, T e I_T satisfacen el siguiente principio residual:

$$T(x, z) \leq y \Leftrightarrow z \leq I_T(x, y), \quad \forall x, y, z \in [0, 1].$$

- iii. El supremo en la Ecuación (4.2) es el máximo, i.e.,

$$I(x, y) = \max\{t \in [0, 1] \mid T(x, t) \leq y\}, \quad \forall x, y \in [0, 1].$$

Demostración.

- i.) \Rightarrow ii.) Suponiendo que T es una *t-norma* continua a izquierda y asumimos que, para algún $x, y, z \in [0, 1]$,

$$T(x, z) \leq y \Rightarrow z \in \{t \in [0, 1] \mid T(x, t) \leq y\}, \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow I_T(x, y) \geq z. \quad (4.4)$$

Ahora, para algún $x, y, z \in [0, 1]$, consideramos los siguientes casos

- $z < I_T(x, y)$.

En este caso, como

$$z < I_T(x, y) \Rightarrow \exists t' > z \text{ tal que } T(x, t') \leq y \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow T(x, z) \leq y \quad (4.6)$$

- $z = I_T(x, y)$.

En este caso, como $z = I_T(x, y)$ entonces $z \in \{t \in [0, 1] \mid T(x, t) \leq y\}$ o $z \notin \{t \in [0, 1] \mid T(x, t) \leq y\}$.

Desde que

$$z \in \{t \in [0, 1] \mid T(x, t) \leq y\} \Rightarrow T(x, z) \leq y. \quad (4.7)$$

Para $z \notin \{t \in [0, 1] \mid T(x, t) \leq y\}$. En este caso, existe una sucesión creciente $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $t_i < z$, $T(x, t_i) \leq y$, $\forall i \in \mathbb{N}$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} t_i = z$. Por la continuidad a izquierda, tenemos

$$T(x, z) = T(x, \lim_{i \rightarrow \infty} t_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} T(x, t_i) \leq y. \quad (4.8)$$

- *ii.)* \Rightarrow *iii.)* Asumimos que T e I_T forman una adjunción, entonces

$$z = I_T(x, y) \geq I_T(x, y) \Rightarrow T(x, z) = T(x, I_T(x, y)) \leq y. \quad (4.9)$$

Por tanto, el supremo en la Ecuación (4.2) es el máximo.

- *iii.)* \Rightarrow *i.)* Desde que a T -norma es creciente y conmutativa es suficiente mostrar que T satisface:

$$T(x, \sup_{s \in S} y_s) = \sup_{s \in S} T(x, y_s) \quad (4.10)$$

donde $x, y_s \in [0, 1]$ para cada $s \in S$ (S conjunto de índices).

Para mostrar esta afirmación, observe en primer lugar que de la monotocidad de T se tiene la siguiente desigualdad:

$$T(x, \sup_{s \in S} y_s) \geq \sup_{s \in S} T(x, y_s). \quad (4.11)$$

Por otro lado sea $y = \sup_{s \in S} T(x, y_s)$, implica que

$$\begin{aligned} T(x, y_s) \leq y, \quad s \in S &\Rightarrow y_s \in \{t \in [0, 1] \mid T(x, t) \leq y\}, \quad s \in S \\ &\Rightarrow y_s \leq I_T(x, y), \quad s \in S \\ &\Rightarrow \sup_{s \in S} y_s \leq I_T(x, y) \end{aligned}$$

Por la monotocidad de T , se tiene:

$$T(x, \sup_{s \in S} y_s) \leq T(x, I_T(x, y)) \leq y = \sup_{s \in S} T(x, y_s). \quad (4.12)$$

De las desigualdades anteriores se tiene que T es continua a izquierda.

□

Ejemplo 4.3.8. [1, 44] Como ejemplos de pares adjuntos se tienen (T_M, I_{GD}) , (T_P, I_P) , (T_{LK}, I_{LK}) , y (T_{nM}, I_{FD}) .

Por la Proposición 4.3.7, si T es una t-norma e I es una implicación fuzzy tal que T e I forman una adjunción, entonces $I(x, \cdot)$ es una erosión e $T(x, \cdot)$ es una dilatación en $[0, 1]$, para todo $x \in [0, 1]$.

Note que, existen implicaciones fuzzy que no representan erosiones y conjunciones fuzzy que no son dilataciones.

Ejemplo 4.3.9. Considere la siguiente implicación fuzzy:

$$I_{CE}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 1 \text{ e } y = 0 \\ 1, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (4.13)$$

Note que $I_{CE}(1, \cdot)$ no satisface la Ecuación (2.8) pues

$$I_{CE} \left(1, \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \right) = I_{CE}(1, 0) = 0$$

mientras que,

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} I_{CE} \left(1, \frac{1}{n} \right) = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} 1 = 1$$

Así, I_{CE} es una implicación fuzzy pero $I_{CE}(x, \cdot)$ no representa una erosión.

4.4. Operadores Básicos de la MMF

La erosión binaria de un conjunto A por elemento estructurante S , $E_B(A, S)$, es definida como el conjunto de todos los puntos x tal que el traslado del elemento estructurante S_x está contenido dentro del conjunto A (ver Ecuación (3.6)). Formalmente, se tiene la siguiente relación:

$$E_B(A, S) = \{x \in X : Inc(S_x, A)\}, \quad (4.14)$$

donde $Inc : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ representa la inclusión de conjuntos, esto es

$$Inc(S_x, A) = 1 \Leftrightarrow S_x \subseteq A. \quad (4.15)$$

De la misma forma, se formula la dilatación binaria de un elemento estructurante A por S , $D_B(A, S)$ (ver Ecuación (3.8)), de acuerdo con la siguiente relación:

$$D_B(A, S) = \{x \in X : Sec(S_x, A)\}, \quad (4.16)$$

donde $Sec : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ representa la intersección de conjuntos

$$Sec(S_x, A) = 1 \Leftrightarrow \hat{S}_x \cap A \neq \emptyset. \quad (4.17)$$

La MMF está basada en la definición de erosión y dilatación fuzzy las cuales son extensiones de la erosión y dilatación binaria. Así, Sussner y Valle en [44] incorporan las

definiciones de medida de inclusión y medida de intersección fuzzy permitiendo visualizar la generalización de la MM binaria para la MMF.

Definición 4.4.1. [44] Sea X el espacio Euclidiano \mathbb{R}^2 o el espacio digital \mathbb{Z}^2 . Una medida de inclusión fuzzy $Inc_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1]$ tal que la restricción para $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ coincide con la inclusión para conjuntos clásicos, esto es, que para todo $A, B \in \mathcal{P}(X)$ y sus correspondientes conjuntos fuzzy $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{F}(X)$, se tiene

$$A \subseteq B \Rightarrow Inc(A, B) = Inc_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$$

$$A \not\subseteq B \Rightarrow Inc(A, B) = Inc_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$$

Definición 4.4.2. [44] Sea X el espacio Euclidiano \mathbb{R}^2 o el espacio digital \mathbb{Z}^2 . Una medida de intersección fuzzy $Sec_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow [0, 1]$ tal que la restricción para $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ coincide con la intersección para conjuntos clásicos, esto es, que para todo $A, B \in \mathcal{P}(X)$ y sus correspondientes conjuntos fuzzy $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{F}(X)$, se tiene:

$$A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow Sec(A \cap B) = Sec_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow Sec(A, B) = Sec_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

A seguir veremos como la implicación fuzzy y la conjunción fuzzy permiten definir medidas de inclusión e intersección fuzzy.

Definición 4.4.3. [44] Sean los conjuntos fuzzy $\mathbf{a}, \mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$. Una medida de inclusión fuzzy $Inc_{\mathcal{F}}$ se denomina como una intersección Inf-I si y solo si es dada por:

$$Inc_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}, \mathbf{a})(x) = \bigwedge_{x \in X} I_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}(x), \mathbf{a}(x)), \quad (4.18)$$

donde $I_{\mathcal{F}} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una implicación fuzzy.

Definición 4.4.4. [44] Sea X el espacio Euclidiano \mathbb{R}^2 o el espacio digital \mathbb{Z}^2 y sean los conjuntos fuzzy $\mathbf{a}, \mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$. Una medida de intersección fuzzy $Sec_{\mathcal{F}}$ es una medida de

intersección fuzzy Sup-C si, y solo si, $Sec_{\mathcal{F}}$ es dada por la ecuación:

$$Sec_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}, \mathbf{a})(x) = \bigvee_{x \in X} C_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}(x), \mathbf{a}(x)), \quad (4.19)$$

donde $C_{\mathcal{F}} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una conjunción fuzzy.

Se define a la traslación de un elemento estructurante \mathbf{s} por x , denotado por \mathbf{s}_x , como

$$\mathbf{s}_x(y) = \mathbf{s}(y - x), \quad \forall y \in X \quad (4.20)$$

y a la reflexión de \mathbf{s} en torno de origen, denotado por $\bar{\mathbf{s}}$, como:

$$\bar{\mathbf{s}}(y) = \mathbf{s}(-y), \quad \forall y \in X. \quad (4.21)$$

A seguir son definidos los operadores fundamentales de la MMF

Definición 4.4.5. [44] Sea X el espacio Euclidiano \mathbb{R}^2 o el espacio digital \mathbb{Z}^2 y sean $\mathbf{a}, \mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$. Se define $\mathcal{E}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ como:

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x) = Inc_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}_x, \mathbf{a}), \quad (4.22)$$

El operador $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ es una erosión fuzzy si $Inc_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}, \cdot)$ conmuta como el ínfimo para todo $s \in \mathcal{F}(X)$, en este caso el operador $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}, \cdot)$ representa una erosión para todo elemento estructurante \mathbf{s} .

Definición 4.4.6. [44] Sea X el espacio Euclidiano \mathbb{R}^2 o el espacio digital \mathbb{Z}^2 y sean $\mathbf{a}, \mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$, se define $\mathcal{D}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ como:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(\mathbf{x}) = Sec_{\mathcal{F}}(\bar{\mathbf{s}}_x, \mathbf{a}), \quad (4.23)$$

El operador $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ es una dilatación fuzzy si $Sec_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}, \cdot)$ conmuta como el supremo para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$, en este caso el operador $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}, \cdot)$ representa una dilatación.

Definición 4.4.7. [10] Sea X el espacio Euclidiano \mathbb{R}^2 o el espacio digital \mathbb{Z}^2 , y sean $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}, \mathcal{E}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$. Decimos que el par $(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}, \mathcal{D}_{\mathcal{F}})$ forma una adjunción si, y solamente si, $(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\cdot, \mathbf{s}), \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\cdot, \mathbf{s}))$ forma una adjunción, para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$.

Teorema 4.4.8. Sea el operador $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ inducida por la medida de inclusión $\text{Inf-}I$, esto es, $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ es dado por las Ecuaciones (4.22) y (4.18). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Los operadores $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\cdot, \mathbf{s})$ son erosiones, para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$.
2. Los operadores $\text{Inc}_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}, \cdot)$ son erosiones, para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$.
3. Los operadores $I_{\mathcal{F}}(s, \cdot)$ son erosiones, para todo $s \in [0, 1]$.

Demostración. Sean $K = \{1, 2, \dots, k, \dots\}$ conjunto de índices, $\mathbf{a}_k, \mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$ y $x \in X$ tal que

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}} \left(\bigwedge_{k \in K} \mathbf{a}_k, \mathbf{s} \right) (x) = \bigwedge_{k \in K} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_k, \mathbf{s})(x). \quad (4.24)$$

Equivalentemente,

$$\text{Inc}_{\mathcal{F}} \left(\mathbf{s}_x, \bigwedge_{k \in K} \mathbf{a}_k \right) = \bigwedge_{k \in K} \text{Inc}_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}_x, \mathbf{a}_k), \quad (4.25)$$

entonces esta medida de inclusión $\text{Inc}_{\mathcal{F}}$ es una erosión en el segundo argumento.

Ahora asumimos que $\text{Inc}_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}, \cdot)$ son erosiones para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$. Así, mostraremos que

$$I_{\mathcal{F}} \left(s, \bigwedge_{k \in K} a_k \right) = \bigwedge_{k \in K} I_{\mathcal{F}}(s, a_k), \quad (4.26)$$

para todo $s, a_k \in [0, 1]$.

En efecto, sean s y $a_k \in [0, 1]$ constantes tal que $\mathbf{s}(x) = s$ y $\mathbf{a}_k(x) = a_k$ para todo $x \in X$ y $k \in K$, por tanto:

$$\begin{aligned}
I_{\mathcal{F}} \left(s, \bigwedge_{k \in K} a_k \right) &= \bigwedge_{x \in X} I_{\mathcal{F}} \left(\mathbf{s}(x), \bigwedge_{k \in K} \mathbf{a}_k(x) \right) \\
&= Inc_{\mathcal{F}} \left(\mathbf{s}, \bigwedge_{k \in K} \mathbf{a}_k \right) \\
&= \bigwedge_{k \in K} \left(\bigwedge_{x \in X} I_{\mathcal{F}} (\mathbf{s}(x), \mathbf{a}_k(x)) \right) \\
&= \bigwedge_{k \in K} I_{\mathcal{F}} (s, a_k).
\end{aligned}$$

Finalmente, suponiendo que $I_{\mathcal{F}}$ es una erosión en el segundo argumento. Será probado que $Inc_{\mathcal{F}}$ representa una erosión en el segundo argumento. En efecto, sean $\mathbf{s}, \mathbf{a}_k \in \mathcal{F}(X)$, entonces:

$$\begin{aligned}
Inc_{\mathcal{F}} \left(\mathbf{s}, \bigwedge_{k \in K} \mathbf{a}_k \right) &= \bigwedge_{x \in X} I_{\mathcal{F}} \left(\mathbf{s}(x), \left(\bigwedge_{k \in K} \mathbf{a}_k \right) (x) \right) \\
&= \bigwedge_{x \in X} I_{\mathcal{F}} \left(\mathbf{s}(x), \left(\bigwedge_{k \in K} \mathbf{a}_k(x) \right) \right) \\
&= \bigwedge_{x \in X} \left(\bigwedge_{k \in K} I_{\mathcal{F}} (\mathbf{s}(x), \mathbf{a}_k(x)) \right) \\
&= \bigwedge_{k \in K} \left(\bigwedge_{x \in X} I_{\mathcal{F}} (\mathbf{s}(x), \mathbf{a}_k(x)) \right) \\
&= \bigwedge_{k \in K} Inc_{\mathcal{F}} (\mathbf{s}, \mathbf{a}_k).
\end{aligned}$$

Por tanto $Inc_{\mathcal{F}}$ es una erosión. □

Teorema 4.4.9. *Sea X el espacio Euclidiano \mathbb{R}^2 o el espacio digital \mathbb{Z}^2 y sea el operador $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ inducida por la medida de intersección Sup-C, esto es, $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ es dado por las Ecuaciones (4.23) y (4.19). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. Los operadores $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\cdot, \mathbf{s})$ son dilataciones, para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$.
2. Los operadores $Sec_{\mathcal{F}}(\mathbf{s}, \cdot)$ son dilataciones, para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$.
3. Los operadores $C_{\mathcal{F}}(s, \cdot)$ son dilataciones, para todo $s \in [0, 1]$.

Demostración. La demostración es de forma similar al teorema anterior. \square

Para aspectos prácticos, en este trabajo utilizaremos un elemento estructurante \mathbf{s} centrado en el origen ($\mathbf{0} = (0, 0)$) tal que $\mathbf{s}(\mathbf{0}) = 1$, y sus valores distintos de cero son dados por la matriz:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{255} \begin{pmatrix} 219 & 219 & 219 \\ 219 & 255 & 219 \\ 219 & 219 & 219 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Note que, para facilitar la notación, este elemento estructurante será identificado apenas con la matriz \mathbf{s} . Desatacamos también que, dicho elemento estructurante es muy utilizado en diferentes investigaciones en procesamiento de imágenes, ver [12, 13, 40, 43].

Ejemplo 4.4.10. *En este ejemplo consideramos la imagen rice.jpg de dimensión 256×256 , la cual pertenece a la base de datos del software MATLAB, y el elemento de estructurante dado por la matriz (4.27). Así, utilizando las Ecuaciones (4.22) y (4.23), determinamos la erosión fuzzy y dilatación fuzzy de la imagen rice.jpg basada en los operadores I_{FD} y T_{nM} . La figura 4.1 muestra la erosión y la dilatación fuzzy de la imagen rice.jpg por el elemento estructurante \mathbf{s} .*

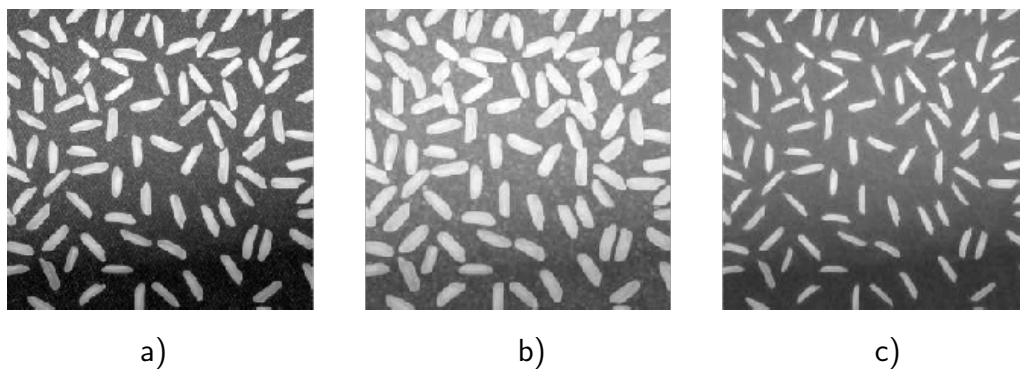


Figura 4.1: a) Imagen original b) Dilatación fuzzy de la imagen original por elemento estructurante \mathbf{s} . c) Erosión fuzzy de la imagen original por el elemento estructurante \mathbf{s} .

Además de la erosión y la dilatación, la apertura fuzzy y la cerradura de una imagen en escala de grises de una imagen \mathbf{a} por un elemento estructurante \mathbf{s} puede ser definido como sigue.

Definición 4.4.11. [24] Sea X el espacio Euclidiano \mathbb{R}^2 o el espacio digital \mathbb{Z}^2 . El cierre fuzzy $C_{T,I}(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ de una imagen en escala de grises $\mathbf{a} \in \mathcal{F}(X)$ por un elemento estructurante $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$ está definida por:

$$C_{T,I}(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}), \mathbf{s}). \quad (4.28)$$

La apertura fuzzy $O_{T,I}(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ de una imagen en escala de grises $\mathbf{a} \in \mathcal{F}(X)$ por un elemento estructurante $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$ está definida por:

$$O_{T,I}(\mathbf{a}, \mathbf{s}) = \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}), \mathbf{s}). \quad (4.29)$$

Proposición 4.4.12. Sea X el espacio euclidiano \mathbb{R}^2 o el espacio digital \mathbb{Z}^2 y $\mathbf{a}, \mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$ tal que $\mathbf{s}(0,0) = 1$. Si T es una t -norma fuzzy e I una implicación de frontera entonces

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \leq \mathbf{a} \leq \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}). \quad (4.30)$$

Demostración. Para todo $x \in X$, por un lado

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x) &= \bigwedge_{y \in X} I(\mathbf{s}_x(y), \mathbf{a}(y)) \\ &\leq I(\mathbf{s}_x(x), \mathbf{a}(x)) \\ &= I(1, \mathbf{a}(x)) = \mathbf{a}(x), \end{aligned}$$

visto que I es una implicación de frontera.

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x) &= \bigvee_{y \in X} T(\bar{\mathbf{s}}_x(y), \mathbf{a}(y)) \\
&\geq T(\bar{\mathbf{s}}_x(x), \mathbf{a}(x)) \\
&= T(1, \mathbf{a}(x)) = \mathbf{a}(x).
\end{aligned}$$

Así, se tiene que $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x) \leq \mathbf{a}(x) \leq \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x)$, $\forall x \in X$. Por tanto,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \leq \mathbf{a} \leq \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}). \quad (4.31)$$

□

Además de eso, la erosión fuzzy y dilatación fuzzy puede ser expresada por medio de la adjunción, esto visto en la siguiente proposición.

Proposición 4.4.13. *Sea X el espacio euclidiano \mathbb{R}^2 o el espacio digital \mathbb{Z}^2 y sean T una t -norma fuzzy e I una implicación fuzzy. Si par (I, T) es una adjunción entonces el par $(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\cdot, \mathbf{s}), \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\cdot, \mathbf{s}))$ es una adjunción, para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$.*

Demostración. En efecto, para todo $a, s, t \in [0, 1]$ tenemos que $T(a, t) \leq s \Leftrightarrow t \leq I(a, s)$. Para todo $\mathbf{a}, \mathbf{s}, \mathbf{h} \in \mathcal{F}(X)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \leq \mathbf{h} &\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x) \leq \mathbf{h}(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X, \bigvee_{y \in X} T(\bar{\mathbf{s}}_x(y), \mathbf{a}(y)) \leq \mathbf{h}(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall y \in Y, T(\bar{\mathbf{s}}_x(y), \mathbf{a}(y)) \leq \mathbf{h}(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X, \forall y \in Y, \mathbf{a}(y) \leq I(\bar{\mathbf{s}}_x(y), \mathbf{h}(x)) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in Y, \mathbf{a}(y) \leq \bigwedge_{x \in X} I(\bar{\mathbf{s}}_x(y), \mathbf{h}(x)) \\
&\Leftrightarrow \forall y \in Y, \mathbf{a}(y) \leq \bigwedge_{x \in X} I(\mathbf{s}_y(x), \mathbf{h}(x)) \\
&\Leftrightarrow \mathbf{a} \leq \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{h}, \mathbf{s})
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.4.14. En este ejemplo consideramos la imagen *rice.jpg* corrompida por un ruido de Poisson en el software de MATLAB con la función `imnoise('rice.jpg','poisson')`, y el elemento de estructurante \mathbf{s} dado por la matriz (4.27). Así, utilizamos las Ecuaciones (4.28) y (4.29), para determinar la apertura y cierre fuzzy de la imagen corrompida. Estos operadores basados en los operadores fuzzy de I_{FD} y T_{nM} . La figura (4.1) muestra la erosión y la dilatación fuzzy de la imagen *rice.jpg* por el elemento estructurante \mathbf{s} .

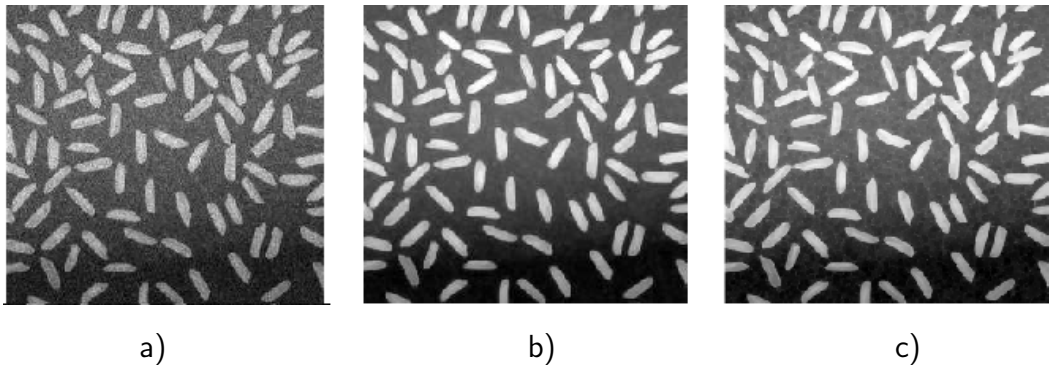


Figura 4.2: a) Imagen corrompida por ruido de Poisson. b) Apertura de la imagen corrompida por ruido de Poisson. c) Cierre Apertura de la imagen corrompida por ruido de Poisson.

Observación 4.4.15. Considerando el par $(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}, \mathcal{D}_{\mathcal{F}})$ es una adjunción, para todo $\mathbf{s} \in \mathcal{F}(X)$, note que:

1. si $\mathbf{h} = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ entonces $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{h}, \mathbf{s}) \leq \mathbf{a}$, esto significa que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}), \mathbf{s}) \leq \mathbf{a}. \quad (4.32)$$

2. si $\mathbf{r} = \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})$ entonces $\mathbf{a} \leq \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$, esto significa que

$$\mathbf{a} \leq \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}), \mathbf{s}). \quad (4.33)$$

Por los Itens 1. y 2. se tiene que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}), \mathbf{s}) \leq \mathbf{a} \leq \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}), \mathbf{s}) \quad (4.34)$$

$$O_{T,I}(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \leq \mathbf{a} \leq C_{T,I}(\mathbf{a}, \mathbf{s}). \quad (4.35)$$

4.5. Gradiente Morfológico Fuzzy

En MM, el operador clásico *gradiente morfológico* de una imagen en escala de grises, también llamado *gradiente de Beucher* [3], se define como la diferencia aritmética entre los operadores morfológicos de dilatación y erosión por un elemento estructurante [31, 37]. Expresado de esta manera, el gradiente morfológico devuelve la máxima variación de intensidad entre dos píxeles de la imagen dentro de una vecindad definida por el elemento estructurante. Vale resaltar, que si el elemento de estructurante es el mismo para la dilatación y la erosión, de modo que contiene el origen ($\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$), entonces la erosión de la imagen por el elemento estructurante es menor que la dilatación de la imagen por el elemento estructurante [37].

Basado en concepto de gradiente morfológico, González-Hidalgo et al. [11, 13] define el *gradiente morfológico fuzzy* como la diferencia entre la dilatación fuzzy y la erosión fuzzy por el elemento estructurante \mathbf{s} . En este caso, la dilatación fuzzy se basa en la t -norma T , y la erosión fuzzy en una implicación frontera I , en ambos casos se considera el elemento de estructurante centrado en el origen tal que $\mathbf{s}(\mathbf{0}) = 1$, de esta manera el gradiente morfológico fuzzy se define como:

$$G(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x) = \mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x) - \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s})(x), \forall x \in X. \quad (4.36)$$

donde $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}), \mathcal{E}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \in \mathcal{F}(X)$, y $-$ una diferencia usual. Note que definida de esta forma, por la Proposición 4.4.12, se garantiza que la dilatación siempre es mayor que la erosión.

Ejemplo 4.5.1. *En este ejemplo, consideramos la dilatación y erosión fuzzy determinados en el Ejemplo 4.4.14. Así, utilizando la Ecuación (4.36) determinamos el gradiente morfológico fuzzy de la imagen rice.jpg por el elemento estructurante \mathbf{s} .*

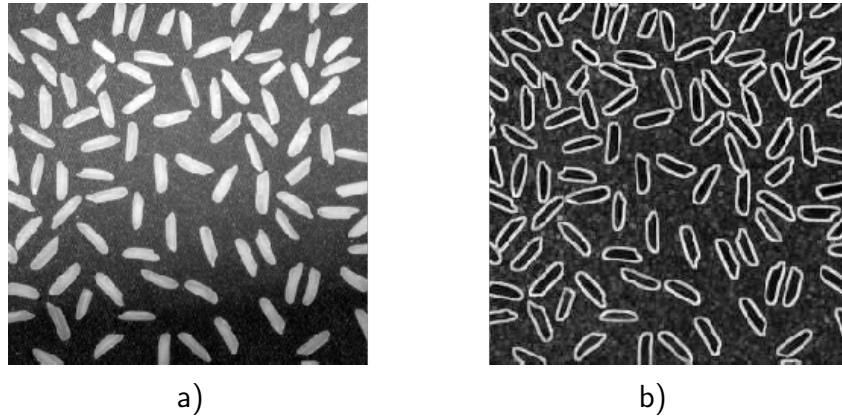


Figura 4.3: a) Imagen original. b) Gradiente morfológico fuzzy de la imagen original por el elemento estructurante s .

Capítulo 5

Segmentación de Imágenes

Reconstruidas basada en MMF

En esta sección será presentada la aplicación de la MMF en la segmentación de imágenes reconstruida a partir de sinogramas afectados por ruido de Poisson.

5.1. Segmentación de una Imagen Digital

La segmentación de una imagen digital se refiere al proceso de dividir dicha imagen en múltiples regiones (conjuntos de píxeles) u objetos, con el fin de simplificar y/o cambiar la representación de una imagen para facilitar su análisis. Como resultado, cada uno de los píxeles en la misma región es similar con respecto a alguna característica o propiedad computacional, como el color, la intensidad, la textura o la continuidad. Existen diversos métodos para segmentar una imagen por ejemplo limiarización, algoritmo de watershed, etc.. El *algoritmo de watershed* [3] se basa en encontrar los límites de una regiones conexas en una imagen. Existen varias versiones de este algoritmo, incluyendo la transformación de inmersión de Vincent y Soille [45] y el método topográfico de F.



Figura 5.1: Imágenes segmentadas

Meyer [25]. Generalmente en este algoritmo se aplica la transformada h -mínima que suprime todos los mínimos de la imagen cuya profundidad es menor que h .

En este trabajo utilizaremos la MMF para determinar las bordas de una imagen utilizando el gradiente morfológico fuzzy seguido del algoritmo de watershed, de esta forma disminuir posibles problemas de segmentación.

5.2. Imágenes Reconstruidas

Las imágenes reconstruidas generalmente son obtenidas a partir de un examen de tomografía. Una tomografía es un método muy usado en medicina para el estudio de cáncer del corazón, del cerebro, etc.. La tomografía es realizada en dos pasos:

- **Primer paso:** Consiste en utilizar un medicamento que lleva una sustancia radioactiva que se introduce en el organismo a través de una vena. Al ir transportado en la sangre, llega al órgano que queremos estudiar. El radiofármaco no tiene efectos secundarios y la radiación que emite es mínima. El radiofármaco es captado por un tomógrafo, que realizará un examen de la zona a estudiar (cabeza, tórax, abdo-

men, pelvis, etc.) para después almacenarlas en un sinograma. Un **sinograma** es el resultado de un conjunto de proyecciones angulares captadas por el tomógrafo.

- **Segundo paso:** Reconstrucción de imágenes a partir de métodos de reconstrucción en los que destacan los métodos analíticos como “filtered backprojection” (FBP) [30].

Para el análisis de las imágenes reconstruidas es utilizado el *Phantom* (ver Figura 5.2). Un Phantom (imagen original) es una imagen en escala de grises diseñado especialmente para evaluar, analizar y ajustar el rendimiento de varios dispositivos de imágenes. Un Phantom proporciona resultados más consistentes que usar un sujeto vivo o un cadáver, y también evita someter a un sujeto vivo a un riesgo directo.

Con el fin de analizar el método propuesto, realizamos experimentos utilizando el Phantom (ver Figura 5.2) empleado por Miquel et al. [27] para el análisis de imágenes médicas.

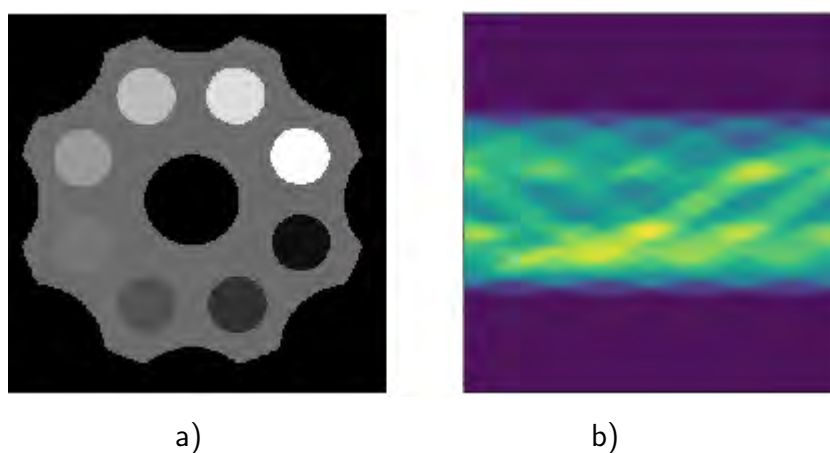


Figura 5.2: a) Phantom. b) Sinograma

En este trabajo nos enfrentaremos al ruido de generado por el tomógrafo que afectan al sinograma, siendo llamado **sinograma ruidoso** la cual puede afectar de manera significativa análisis de la imagen reconstruida. Para experimentos prácticos y simular la

realidad de los sinogramas ruidosos, decidimos introducir el ruido de Poisson al sinograma utilizado en [27] (ver Figura 5.4) y posteriormente utilizar el FBP para reconstruirla de esa forma generar una imagen reconstruida aproximada (ver Figura 5.3). El objetivo de este trabajo es utilizar la MMF para segmentar una imagen reconstruida a partir de un sinograma con ruido de Poisson, este proceso será explicado en la siguiente sección.

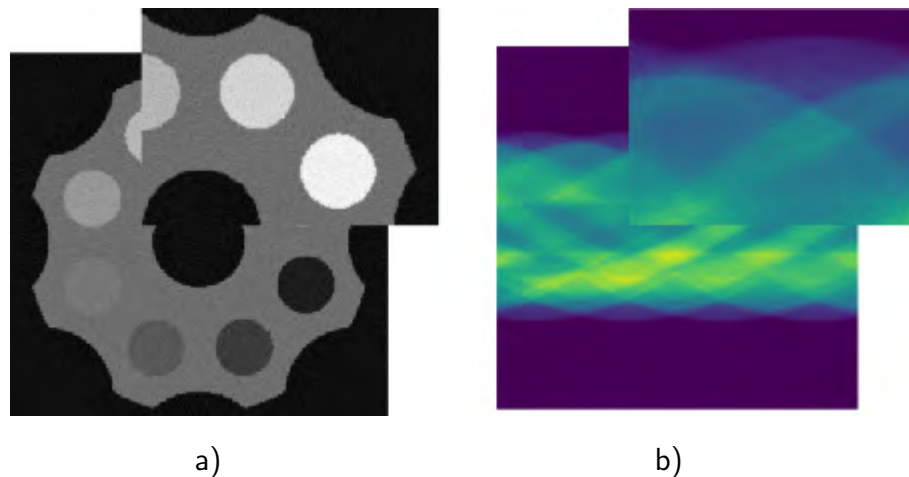


Figura 5.3: a) Imagen reconstruida a partir de un sinograma con ruido de Poisson. b) Sinograma.

En los experimentos computacionales utilizamos un sinograma ruidoso que es una matriz P de 512×512 . El Ruido de Poisson introducido sobre el sinograma, el cual es determinado por el parámetro $\lambda_{i,j} = \frac{kp_{ij}}{\sum_{i,j=1}^{512} p_{ij}}$, donde $k=1957945205.4794521$ y p_{ij} son la entradas de la matriz P .

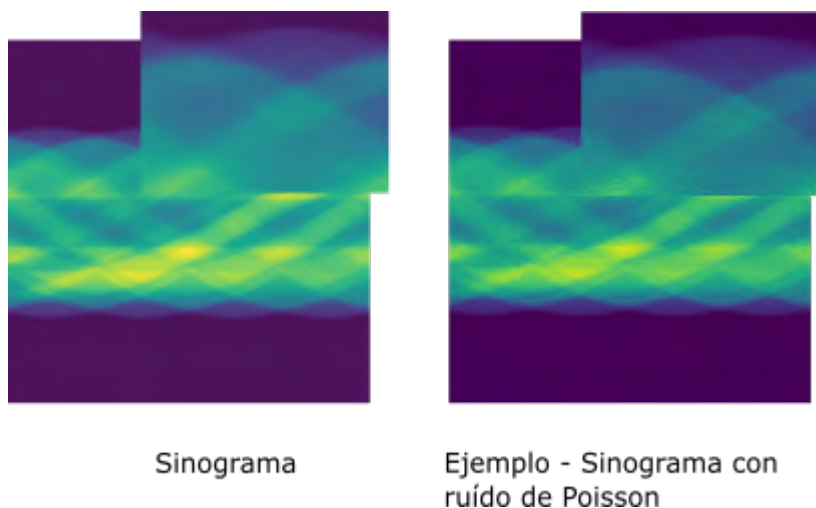


Figura 5.4: Sinograma con ruido de Poisson

5.3. Utilización de la MMF en Segmentación de Imágenes Reconstruidas

Como comentado en la sección anterior, en la práctica las imágenes reconstruidas se ven afectadas por el ruido durante su adquisición. Este es un problema importante para analistas que procesan esas imágenes. En consecuencia, es necesario un pre-procesamiento para lidiar con este ruido. Así, Utilizaremos un método de remoción de ruido basado en los operadores fuzzy de apertura y cierre fuzzy que, en la práctica, han demostrado eficientes resultados [14, 43].

El filtro morfológico fuzzy de remoción de ruido basado en los operadores de apertura y cierre fuzzy (MMF-CO) y está dada por [43]:

$$Im_R = \frac{C_{T,I} + O_{T,I}}{2}. \quad (5.1)$$

Recuerde por la Ecuación (4.34) que se cumple la siguiente relación:

$$O_{T,I}(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \leq \mathbf{a} \leq C_{T,I}(\mathbf{a}, \mathbf{s}) \quad (5.2)$$

EL método estudiado sigue la siguiente secuencia: Sobre la imagen representante Im_R , la cual es una imagen aproximada a la imagen a (ver Ecuación (5.2)), es calculado el gradiente morfológico fuzzy dado por la Ecuación (4.36); A partir del gradiente morfológico fuzzy, es utilizado el algoritmo de watershed, este algoritmo está disponible en el software MATLAB (o PYTHON). Este proceso está ilustrado en la Figura 5.5.

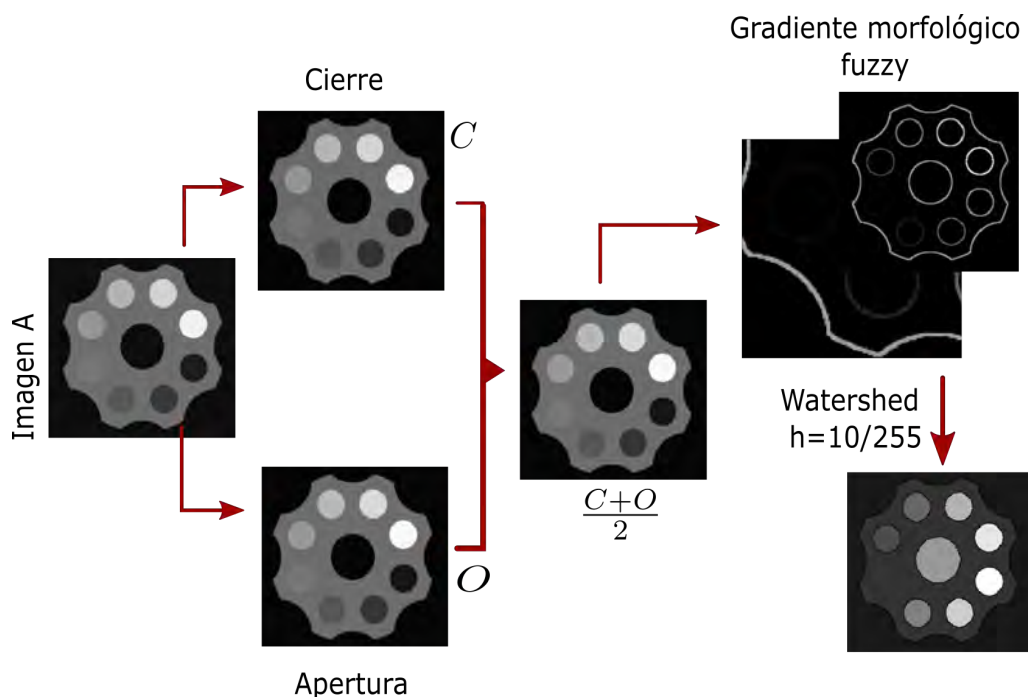


Figura 5.5: Secuencia para segmentar una imagen reconstruida a partir de sinogramas afectadas por ruido de Poisson.

La determinación del gradiente morfológico fuzzy de una imagen reconstruida está basada en el par (T_{nM}, I_{FD}) . Esto debido a que, utilizando este par en el cálculo del gradiente morfológico fuzzy sobre el Phantom dado en la Figura 5.2 (imagen original no corrompida), se observó que, es posible determinar todas las regiones de interés del Phantom. Esta afirmación que se puede observar en la Figura 5.6 (note que el Phantom tiene 9 regiones de interés). Además de eso, existen en detección de bordes donde este par muestra tener buenos resultados [12, 40].

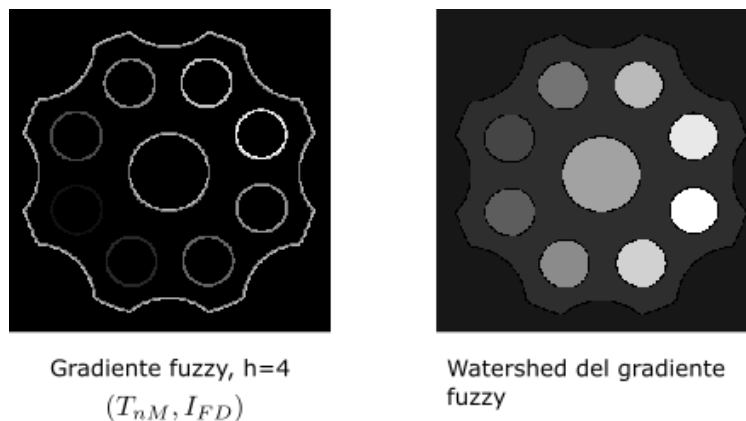


Figura 5.6: Segmentación del Phantom

Para ver el impacto de este método propuesto, realizaremos los siguientes experimentos.

- **Primer experimento**

Este experimento consiste en ver si efectivamente es necesario la utilización de un filtro de remoción de ruido. La secuencia de este experimento es la siguiente: Sobre la reconstrucción del sinograma afectado por ruido de Poisson, utilizamos la MMF basado en el par (T_{nM}, I_{FD}) para determinar el gradiente morfológico fuzzy, seguido del algoritmo del watershed con diferentes h -mínimas para determinar los segmentos o las regiones de dicha imagen reconstruida. Los resultados de este experimento son observados en la Figura 5.7, donde claramente se puede ver una sobre-segmentación para $h \in \{\frac{3}{255}, \frac{4}{255}, \dots, \frac{11}{255}\}$, es decir una cantidad enorme de regiones, de la imagen reconstruida; y para $h \in \{\frac{9}{255}, \dots, \frac{11}{255}\}$ falta de regiones. Por lo tanto en ambos casos el análisis de esa imagen reconstruida puede ser afectada.

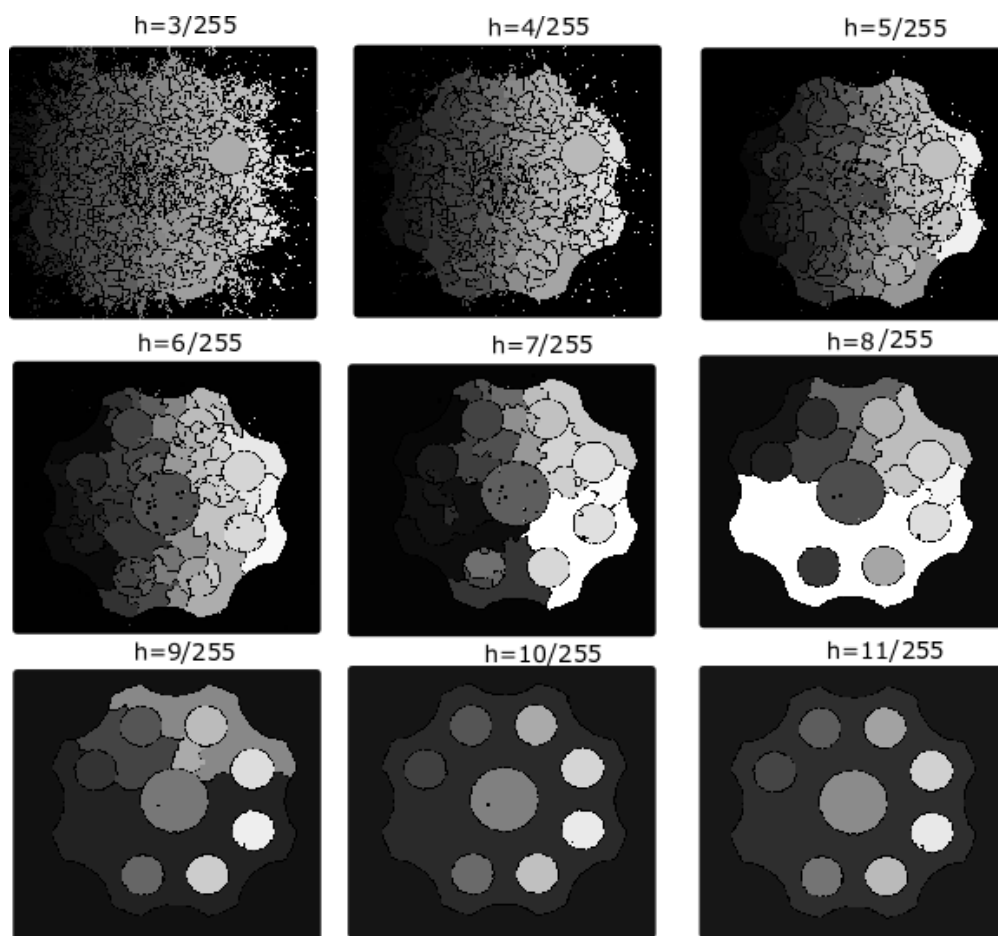


Figura 5.7: Segmentación de una imagen ruidosa utilizando MMF basada en el par (T_M, I_{GD}) .

▪ Segundo experimento

Debido a lo expuesto en el primer experimento, se hace necesario la utilización de un filtro de remoción de ruido. Así, en este segundo experimento es utilizado el filtro de remoción de ruido basado en los operadores de apertura y cierre fuzzy (MMF-CO) dado en la Ecuación (5.1), que su vez están basados en el par adjunto (T_M, I_{GD}) . De esta forma generamos una nueva imagen imagen Im_R , sobre está imagen utilizamos la MMF basado en el par (T_{nM}, I_{FD}) para determinar el gradiente morfológico fuzzy, seguido del algoritmo de Watershed con diferentes h -mínimas

para determinar los segmentos o las regiones de dicha imagen reconstruida. Los resultados de este experimento son observados en la Figura 5.8, donde claramente se puede ver una mejora significativa en la segmentación de la imagen reconstruida, por ejemplo para $h = 7/255$ y $h = 8/255$ son determinados todos los segmentos de la imagen reconstruida .

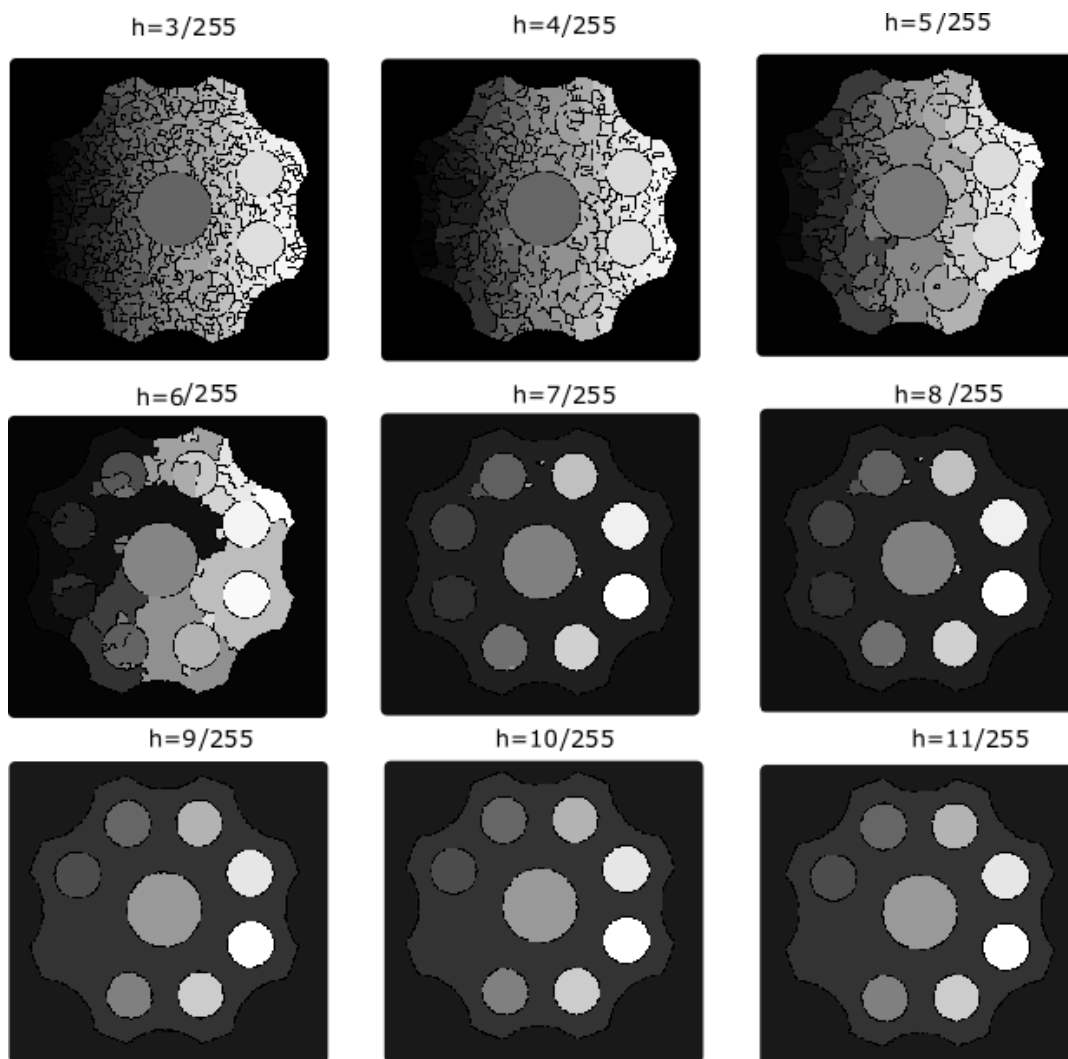


Figura 5.8: Segmentación de una imagen ruidosa utilizando MMF-CO, seguido de la MMF basada en el par (T_M, I_{KD}) .

Del primer y segundo experimento donde los resultados son expuestos en las Figuras

5.7 y 5.8, podemos concluir que, utilizar el filtro morfológico fuzzy MMF-CO basado en el par (T_M, I_{KD}) seguido del gradiente morfológico fuzzy basado en el par $(T_{nM,FD})$ generó mejores resultados que sin utilizar dicho filtro.

Conclusiones

1. Se aplicó la morfología matemática fuzzy para la segmentación de imágenes reconstruidas a partir de sinogramas afectados por ruido de Poisson. Este método consiste en utilizar un filtro de ruido basado en los operadores de apertura fuzzy y cierre fuzzy sobre la imagen reconstruida, seguido del cálculo del gradiente morfológico fuzzy sobre la imagen filtrada, y finalmente, por medio del algoritmo de watershed, se determinó las regiones para su posterior análisis. Para el desarrollo del método mencionado fue necesario estudiar la morfología matemática fuzzy como extensión de la morfología matemática binaria, enfatizando en sus principales propiedades algebraicas. Vale resaltar que ambas teorías están definidas sobre una estructura algebraica llamada retículos completos. En efecto, se observa que los retículos completos son la base para estudiar la morfología matemática de forma más general.
2. El método antes mencionado está basado en los cuatro operadores fundamentales, los cuales son: la erosión fuzzy, dilatación fuzzy, apertura fuzzy y cierre fuzzy, ya que el método desarrollado está basado en estos cuatro operadores. También resaltamos la importancia de la propiedad algebraica de adjunción entre la dilatación fuzzy y la erosión fuzzy.
3. Se realizó la implementación y los experimentos computacionales correspondientes,

junto al análisis de los resultados obtenidos.

4. Se compararon cualitativamente los resultados de la aplicación del método desarrollado con y sin filtro de ruido, observándose que la utilización del filtro de ruido genera mejores resultados.

Recomendaciones

Para trabajos futuros, se propone realizar computacionalmente una fase de entrenamiento y otra de prueba para determinar el h -mínimo que genere mejores resultados en ambos experimentos, luego utilizar algún método de comparación, por ejemplo la medida de Jaccard, para hacer un análisis cuantitativo. Si los resultados son significativos podríamos aplicar este método en tomografías de pacientes con alguna enfermedad y ver si realmente genera buenos resultados, esto en colaboración de especialistas.

Implementación Computacional

Función para calcular la erosión y la dilatación fuzzy

```
function [DilatacaoF ErosaoF]=DilatacaoErosaoFuzzy(im,w,r,A)

OpA=A{1};

OpB=A{2};

OFtnorma=str2func(OpA);

OFImplic=str2func(OpB);

im=(double(im));

[i,j]=size(im);

vertical=ones(1,i);

horizontal=ones(1,j+2);

imModidown=[0*vertical' im 0*vertical'];

f=[0*horizontal;imModidown; 0*horizontal];

im1Modidown=[r*vertical' im r*vertical'];

f1=[r*horizontal;im1Modidown; r*horizontal];

[x,y]=size(f);

for s=2:x-1

for t=2:y-1

w2=[f(s-1,t-1) f(s-1,t) f(s-1,t+1)];...
```

```

f(s,t-1) f(s,t) f(s,t+1);...
f(s+1,t-1) f(s+1,t) f(s+1,t+1)];
w3=[f1(s-1,t-1) f1(s-1,t) f1(s-1,t+1);...
f1(s,t-1) f1(s,t) f1(s,t+1);...
f1(s+1,t-1) f1(s+1,t) f1(s+1,t+1)];
%Operadores t-normas-----
p1=OFtnorma(w,w2,r);
dila=max(max(p1));
p2(s,t)=dila;
%Operadores implicaciones-----
r1=double(OFImplic(w,w3,r));
eros1=min(min(r1));
r2(s,t)=eros1;
end
end
[v1,v2]=size(p2);
DilatacaoF=imcrop(p2,[2 2 v2 v1]);
ErosaoF=imcrop(r2,[2 2 v2 v1]);
%Figuras-----
%figure, imshow(p2-r2,[])
%figure, imshow(Erosao,[]);
%figure, imshow(Dilatacao,[]);

```

Función para determinar el gradiente morfológico fuzzy y su segmentación

```
function [GradForIm, waGrad]=gradienteFuzzy(dilatacionF,erosionF,hh)
```

```

%hh==h-minima

borde=dilatacion-erosion;

conn= conndef(3,'maximal');

%figuras-----

figure, imshow(p2,[]);

figure, imshow(r2,[]);

figure, imshow(borde,[])

%gradiente y algoritmo de watershed---

GradHmin = imhmin(GradForIm,hh,conn);

waGrad = watershed(GradHmin,conn);

```

Programa para segmentar una imagen reconstruida

```

clear all

clc

A2=["maxC_nM","minI_KD"]; Operdores Fuzzy

A1=["maxC_M","minI_GD"];

B=ones(3,3);

w=[219 219 219;219 255 219;219 219 219]/255;

r=1;

%% Image original

load 'phantom.dat'

Ior = mat2gray(phantom);

image1=image.jpg %image corrompida por ruido de Poisson

[DilatacaoF ErosaoF]=DilatacaoErosaoFuzzy(image1,B,r,A2);

[D1 E1]=DilatacaoErosaoFuzzy(DilatacaoF,B,r,A2);

```

```
[D2 E2]=DilatacaoErosaoFuzzy(ErosaoF,B,r,A2);  
Media= (E1+D2)/2;  
%imagen segmentada y gradiente MMF de la imagen corrompida  
[dilatacion,erosion]=DilatacaoErosaoFuzzy(Media,w,A1);  
[GradForIm, waGrad]=gradienteFuzzy(dilatacion,erosion,hh);
```

Bibliografía

- [1] Baczynski, M., Beliakov, G., Sola, H. B., and Pradera, A. *Advances in Fuzzy Implication Functions*. Springer, 2013.
- [2] Barros, L. C. d. Teoria fuzzy e biomatemática. *Campinas: IMECC-UNICAMP* (2002).
- [3] Beucher, S., and Lantuéjoul, C. Use of watersheds in contour detection.
- [4] Birkhoff, G. Lattice theory, 3rd edn.(7th. print) amer. math. In *Society, Colloq. Publs* (1993).
- [5] Bloch, I., Heijmans, H., and Ronse, C. Mathematical morphology. In *Handbook of Spatial Logics*. Springer, 2007, pp. 857–944.
- [6] Bloch, I., and Maitre, H. Fuzzy mathematical morphologies: A comparative study. *Pattern Recognition* 28, 9 (1995), 1341 – 1387.
- [7] Davey, B. A., and Priestley, H. A. *Introduction to lattices and Order*. Cambridge University Press, 2002.
- [8] De Baets, B. A fuzzy morphology: a logical approach. 53–67.

- [9] De Baets, B., Kerre, E., and Gupta, M. The fundamentals of fuzzy mathematical morphology, part 1: basic concepts. *International Journal of General Systems* 23 (1994), 155–171.
- [10] Deng, T.-Q., and Heijmans, H. J. Grey-scale morphology based on fuzzy logic. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 16, 2 (2002), 155–171.
- [11] González-Hidalgo, M., and Massanet, S. A fuzzy mathematical morphology based on discrete t-norms: fundamentals and applications to image processing. *Soft Computing* 18, 11 (2014), 2297–2311.
- [12] González-Hidalgo, M., Massanet, S., Mir, A., and Ruiz-Aguilera, D. On the choice of the pair conjunction–implication into the fuzzy morphological edge detector. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 23, 4 (2015), 872–884.
- [13] González-Hidalgo, M., Massanet, S., and Torrens, J. Discrete t-norms in a fuzzy mathematical morphology: Algebraic properties and experimental results. 1–8.
- [14] González-Hidalgo, M., Massanet, S., Mir, A., and Ruiz-Aguilera, D. Improving salt and pepper noise removal using a fuzzy mathematical morphology-based filter. *Applied Soft Computing* 63 (2018), 167–180.
- [15] Grätzer, G. A. *Lattice Theory: First Concepts and Distributive Lattices*. W. H. Freeman, San Francisco, CA, 1971.
- [16] Hadwiger, H. Vorlesungen über inhalt. *Oberfläche, und Isoperimetrie*, "Springer-Verlag, Berlin (1957).
- [17] Hadwiger, H. *Vorlesungen über inhalt, Oberfläche und isoperimetrie*, vol. 93. Springer-Verlag, 2013.

- [18] Heijmans, H. Mathematical morphology: a geometrical approach in image processing. *Nieuw Archief voor Wiskunde* 10, 3 (1992).
- [19] Heijmans, H., and Ronse, C. The algebraic basis of mathematical morphology i. dilations and erosions. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 50, 3 (1990), 245 – 295.
- [20] Heijmans, H. J. Morphological image operators. *Advances in Electronics and Electron Physics Suppl., Boston: Academic Press,| c1994* (1994).
- [21] Klir, G., and Yuan, B. *Fuzzy sets and fuzzy logic*, vol. 4. Prentice hall New Jersey, 1995.
- [22] Maragos, P. Lattice image processing: a unification of morphological and fuzzy algebraic systems. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 22, 2-3 (2005), 333–353.
- [23] Matheron, G. Random sets and integral geometry. *Wiley New York* 1975.
- [24] Mélange, T., Nachttegael, M., Sussner, P., and Kerre, E. Basic properties of the interval-valued fuzzy morphological operators. In *Fuzzy Systems (FUZZ), 2010 IEEE International Conference on* (2010), IEEE, pp. 1–8.
- [25] Meyer, F. Topographic distance and watershed lines. *Signal Processing* 38, 1 (July 1994), 113–125.
- [26] Minkowski, H. Volumen und oberfläche. *Mathematische Annalen* 57 (1903), 447–495.

- [27] Miqueles, E. X., Rinkel, J., O'Dowd, F., and Bermúdez, J. S. V. Generalized Titarenko's algorithm for ring artefacts reduction. *Journal of Synchrotron Radiation* 21, 6 (Nov 2014), 1333–1346.
- [28] Nachtegaele, M., and Kerre, E. E. Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies. *Fuzzy sets and systems* 124, 1 (2001), 73–85.
- [29] Nachtegaele, M., and Kerre, E. E. Connections between binary, gray-scale and fuzzy mathematical morphologies. *Fuzzy sets and systems* 124, 1 (2001), 73–85.
- [30] Natterer, F. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, 2001.
- [31] Rivest, J.-F., Soille, P., and Beucher, S. Morphological gradients. *Journal of Electronic Imaging* 2, 4 (1993), 326–337.
- [32] Ronse, C. Why mathematical morphology needs complete lattices. *Signal Processing* 21, 2 (1990), 129 – 154.
- [33] Ronse, C., and Heijmans, H. The algebraic basis of mathematical morphology: li. openings and closings. *CVGIP: Image Understanding* 54, 1 (1991), 74 – 97.
- [34] Serra, J. *Image analysis and mathematical morphology*. Academic Press, Inc., 1982.
- [35] Sinha, D., and Dougherty, E. R. Fuzzy mathematical morphology. *J. Vis. Comun. Image Represent.* 3, 3 (Sept. 1992), 286–302.
- [36] Soille, P. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- [37] Soille, P. Morphological image analysis: principles and applications.

- [38] Sternberg, S. R. Grayscale morphology. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 35, 3 (1986), 333 – 355.
- [39] Sussner, P., and Carazas, L. C. An approach towards image edge detection based on interval-valued fuzzy mathematical morphology and admissible orders. In *Proceedings of the 11th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2019)* (2019/08), Atlantis Press, pp. 690–697.
- [40] Sussner, P., and Carazas, L. C. An approach towards image edge detection based on interval-valued fuzzy mathematical morphology and admissible orders. In *Proceedings of the 11th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT 2019)* (2019/08), pp. 690–697.
- [41] Sussner, P., Carazas, L. C., and Miqueles, E. X. Some approaches based on interval-valued images and I-fuzzy mathematical morphology for segmenting images reconstructed from noisy sinograms. In *Joint Proceedings of the 19th World Congress of the International Fuzzy Systems Association (IFSA), the 12th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT), and the 11th International Summer School on Aggregation Operators (AGOP)* (2021), Atlantis Press, pp. 452–462.
- [42] Sussner, P., Nachtegael, M., Mélange, T., Deschrijver, G., Esmi, E., and Kerre, E. Interval-valued and intuitionistic fuzzy mathematical morphologies as special cases of \mathbb{L} -fuzzy mathematical morphology. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 43, 1 (2012), 50–71.
- [43] Sussner, P., and Schuster, T. Linear versus lattice fuzzy transforms: Image algebra representation, observations, and results in image denoising. In *2018 IEEE*

International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE) (July 2018), pp. 1–8.

- [44] Sussner, P., and Valle, M. E. Classification of fuzzy mathematical morphologies based on concepts of inclusion measure and duality. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 32, 2 (2008), 139–159.
- [45] Vincent, L., and Soille, P. Watersheds in digital spaces: An efficient algorithm based on immersion simulations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 13, 6 (1991), 583–598.
- [46] Zadeh, L. Fuzzy sets. *Information and Control* 8, 3 (1965), 338 – 353.