UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

Escuela de Posgrado

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

TÉSIS:

ECUACIÓN DE CALOR Y DE ONDA MEDIANTE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ORDEN FRACCIONAL

Presentado por:

Br. Mario López Mamani. Para optar al Grado

Académico de Maestro en Matemáticas.

Asesor: Dr. Guido Álvarez Jáuregui.

CUSCO – PERU

2019

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

CAPÍTULO III

TEOREMAS DE LA ECUACIÓN DE CALOR Y DE ONDA FRACCIONARIA CON DERIVADAS DE RIEMANN-LIOUVILLE

RESUMEN

Este trabajo de investigación tiene su base en las transformadas de Laplace y de Fourier que se desarrollan en el capítulo I, las cuales son herramientas fundamentales en la resolución de ecuaciones diferenciales y en particular de las ecuaciones de calor y de onda estándar, que son ecuaciones diferenciales parciales de “segundo orden”, el objetivo principal de este trabajo es generalizar el orden de dichas ecuaciones, a ecuaciones diferenciales de orden fraccional a la cual denominamos ecuación de calor y de onda de orden fraccional, para la resolución de estas ecuaciones se requiere como herramienta fundamental el cálculo fraccionario y en particular de las transformadas de Laplace y de Fourier de las derivadas fraccionarias, las cuales se desarrollan en el capítulo II.

En el capítulo III se desarrolla el objetivo principal de este trabajo, el cual es encontrar la solución de la Ecuación de Calor y de Onda de Orden Fraccional, las cuales se hallan usando las propiedades del cálculo fraccionario, principalmente las transformadas de Laplace y de Fourier de las derivadas fraccionarias.

Para este trabajo se usa el método exploratorio, pues trata de analizar e investigar aspectos concretos que aún no han sido analizados en profundidad, básicamente se trata de un primer acercamiento. Así como en el presente trabajo que a partir de modelos matemático como las ecuaciones de calor y de onda estándar, se deducen otros modelos adecuándolos y generalizándolos, y como consecuencia de esta generalización se pretende encontrar otros modelos matemáticos como las ecuaciones de calor y de onda de orden fraccional, y que las primeras ecuaciones queden como un caso muy particular de los nuevos modelos encontrados.

PALABRAS CLAVE:

Estándar, Orden Fraccional, Transformadas de Laplace, Transformadas de Fourier, Integrales de Riemann-Liouville, Derivadas de Riemann-Liouville, Función Mittag-Leffler en dos parámetros.

RESUMO

Este trabalho de investigação tem sua base nas transformadas de Laplace e de Fourier que se desenvolvem no capítulo I, as quais são ferramentas fundamentais na resolução de equações diferenciais e em particular das equações de calor e de onda standard, que são equações diferenciais parciais de segunda ordem, o objetivo principal deste trabalho é generalizar o ordem de ditas equações, a equações diferenciais de ordem fraccional a qual denominamos equação de calor e de onda de ordem fraccional, para a resolução destas equações se requer como ferramenta fundamental o cálculo fracionário e em particular das transformadas de Laplace e de Fourier das derivadas fracionárias, as quais se desenvolvem no capítulo II.

No capítulo III desenvolve-se o objetivo principal deste trabalho, o qual é encontrar a solução da Equação de Calor e de Onda de Ordem Fraccional, as quais se acham usando as propriedades do cálculo fracionário, principalmente as transformadas de Laplace e de Fourier das derivadas fracionárias.

Para este trabalho use-se o método exploratorio, pois trata de analizar e pesquisar aspectos concretos que ainda não têm sido analisados em profundidade, básicamente se trata de uma primeira aproximação. Bem como no presente trabalho que a partir de modelos matemático como as equações de calor e de onda standard, se deduzem outros modelos os adequando e os generalizando, e como consequência desta generalização se pretende encontrar outros modelos matemáticos como as equações de calor e de onda de orden fraccional, e que as primeiras equações fiquem como um caso muito particular dos novos modelos encontrados.

PALAVRAS-CHAVE:

Standard, Ordem Fraccional, Transformadas de Laplace, Transformadas de Fourier, Integrais de Riemann-Liouville, Derivados de Riemann-Liouville, Função de Mittag-Leffler em dois parâmetros.

PRESENTACIÓN

Señor Director de la Escuela de Posgrado de la UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO; en cumplimiento del Reglamento para optar al Grado de Maestro en Matemáticas, pongo a consideración el presente trabajo de tesis para su revisión y posterior inscripción en el libro correspondiente.

La matemática a lo largo de la historia ha tenido un desarrollo importante, fortaleciéndose y formalizándose con el transcurrir del tiempo. Es así que cada vez aparece una nueva teoría que enriquece más a la matemática; es así que a mediados del siglo XVII surge una nueva teoría "El cálculo fraccional" el cual es otra perspectiva de la matemática.

El cálculo fraccional generaliza las derivadas e integrales de orden entero a orden real, es decir el orden de la derivada e integral es un número real.

El desarrollo de esta teoría dio una base y cimiento para una nueva corriente en la matemática, y en la actualidad tiene diversas aplicaciones en las diferentes ramas del saber humano, siendo una de ellas las ecuaciones diferenciales parciales y en particular las ecuaciones de Calor y Onda estándar.

Razón por la cual desarrollo el tema: Ecuación de Calor y de Onda Mediante una Ecuación Diferencial de Orden Fraccional.

Br. Mario López Mamani.

INTRODUCCIÓN

En 1695 el matemático L. Hospital, al intercambiar correspondencia con Leibniz, sobre lo que sería el significado de $\frac{d^n}{dx^n}f$, para $n = \frac{1}{2}$. Inicia una nueva rama de la matemática, denominada Cálculo Fraccional. A nivel mundial un numeroso grupo de matemáticos se han dedicado a desarrollar esta nueva teoría, generalizando estos conceptos del cálculo fraccionario.

En el campo de las ecuaciones diferenciales parciales se tienen diversas aplicaciones, como las ecuaciones de Calor y de Onda Estándar, existiendo diversas técnicas para su solución. El presente trabajo de tesis generaliza estas dos ecuaciones, que son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden a ecuaciones de orden fraccional, que denominamos Ecuación de Calor y de Onda de Orden Fraccional y muestra la solución de la misma desde un punto de vista puramente analítico.

AGRADECIMIENTOS

A mi querida Alma Máter Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, por acogerme en sus aulas y así consolidar mi profesión.

A mi asesor Dr. Guido Álvarez Jáuregui, mi eterno reconocimiento por su orientación y mucha paciencia durante el desarrollo del presente trabajo de tesis.

A todos mis amigos que siempre estuvieron conmigo apoyándome con sus consejos y fortaleciendo mi alma con sus buenos deseos.

DEDICATORIAS

A mi Madre Juliana, por su esfuerzo impresionante, su fortaleza inquebrantable y su amor invaluable, que me ha proporcionado hoy y siempre todo y cada cosa que he necesitado.

A mi hija Madhury, que a su corta edad me ha enseñado mil cosas, todas ellas cargadas de cariño para conmigo, y con su sola sonrisa llena de dicha y felicidad mis días.

A mis hermanos, Paulina, Faustino, Silvia y Santos por su apoyo moral e incondicional y todos mis sobrinos que con sus ocurrencias hacen fácil mi caminar.

A la memoria de mi querido sobrino Jubert (valiente), mi guía espiritual que desde el cielo siempre en compañía de nuestro altísimo nos bendice y guía todos los días.

LISTA DE SIMBOLOS

$\mathcal{L}\{f(t);s\} = F(s)$: Transformada de Laplace de "f" en el parámetro "s".

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s);t\} = f(t)$: Transformada inversa de Laplace de "F" en la variable "t".

$\mathcal{F}\{f(x);k\} = F(k)$: Transformada de Fourier o Integral de Fourier de f en el parámetro "k".

$\mathcal{F}^{-1}\{F(k);x\} = f(x)$: Transformada inversa de Fourier de "F" en la variable "x".

$D^n[f(x)]$: Denota la n-ésima derivada de "f", con $n \in \mathbb{N}$.

$D_t^n[u(t,x)]$: Denota la n-ésima derivada parcial de "u" con respecto a "t", con $n \in \mathbb{N}$.

$D^\alpha[f(x)]$: Denota la derivada de "f" de orden "α", con $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

$D_t^\alpha[u(t,x)]$: Denota la derivada parcial de "u" de orden "α" con respecto a "t", con $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

$I_{a+}^\alpha[f(x)]$: Integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$, por la izquierda.

$I_{b-}^\alpha[f(x)]$: Integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$, por la derecha.

$I_+^\alpha[f(x)]$: Integral fraccionaria de Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$, por la izquierda.

$I_-^\alpha[f(x)]$: Integral fraccionaria de Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$, por la derecha.

${}_xI_{a+}^\alpha[f(t,x)]$: Integral parcial fraccionaria de Riemann-Liouville por la izquierda de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$, con respecto a "x".

${}_xI_{b-}^\alpha[f(t,x)]$: Integral parcial fraccionaria de Riemann-Liouville por la derecha de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$, con respecto a "x".

${}^{RL}D_{a+}^\alpha[f(x)]$: Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de "f" de orden con $\alpha \in \mathbb{R}^+$ por izquierda.

${}^{RL}D_{b-}^\alpha[f(x)]$: Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de "f" de orden con $\alpha \in \mathbb{R}^+$ por derecha.

${}_x^{RL}D_{a+}^\alpha[f(t,x)]$: Derivada parcial de Riemann-Liouville de "f" de orden "α" con respecto a "x" por la izquierda, con $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

${}^{RL}_{x}D^{\alpha}_{b-}[f(t,x)]$: Derivada parcial de Riemann-Liouville de "f" de orden "α" con respecto a "x" por la derecha, con $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

${}^{RL}_{0}D^{\alpha}_{t}[u(t,x)]$: Derivada parcial de Riemann-Liouville de "u" de orden "α" con respecto a "t", con $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

${}^{L}D^{\alpha}_{+}[f(x)]$: Derivadas fraccionaria de Liouville de "f" de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ por la izquierda.

${}^{L}D^{\alpha}_{-}[f(x)]$: Derivadas fraccionaria de Liouville de "f" de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ por la derecha.

${}^{L}_{-\infty}D^{\beta}_{x}[u(t,x)]$: Denota la derivada parcial de Liouville de "u" de orden "β" con respecto a "x", con $\beta \in \mathbb{R}^+$.

$E_{\alpha}(z)$: Función Mittag-Leffler en un parámetro "α".

$E_{\alpha,\beta}(z)$: Función Mittag-Leffler en dos parámetros "α" y "β".

CAPÍTULO I

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.1. SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

Para la descripción de los fenómenos físicos, es necesario utilizar la matemática como una herramienta fundamental para identificar las variables y expresar el modelo matemático del fenómeno a tratar, por tanto es necesario el nexo entre la Física y la Matemática.

En el desarrollo de la Matemática, las Ecuaciones Diferenciales es una de las ramas más importantes, los primeros resultados de las Ecuaciones Diferenciales tuvieron lugar probablemente hacia finales del siglo XVI y comienzos del siglo XVII. I. Napier (1550 – 1617), empleo una interpretación cinemática en la construcción de sus tablas logarítmicas, que constituyen una solución numérica, obtenida por aproximaciones, de una Ecuación Diferencial de primer orden. Otros problemas relacionados con los fenómenos naturales, Galileo (1564 – 1642), Descartes (1596 – 1650) y F. De Beaune (1601 – 1652), entre otros utilizaron Ecuaciones Diferenciales.

- Los primeros indicios del cálculo fraccionario aparecen hacia a fines del siglo XVII, alrededor de algunos comentarios de L'Hospital respecto al valor de "n" en la notación $\frac{d^n y}{dx^n}$, para $n = \frac{1}{2}$ establecida por Leibniz.
- En 1738 Leonhard Euler le encontraría sentido a esta notación cuando "n" no es entero, aclarando que si bien la razón diferencial para el caso entero se calcula por diferenciación continua.
- Después de 80 años (1818) S.F. Lacroix retoma el problema de las derivadas fraccionarias, encontrando una fórmula para el cálculo de $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}(x^a)$.

- En 1822 Jean Baptiste Joseph Fourier, generalizó el caso anterior para "α" real, estableciendo la fórmula.

$$\frac{d^{\alpha}f(x)}{dx^{\alpha}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^{\alpha}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)cos\left(tx - t\lambda + \frac{\alpha\pi}{2}\right)dt$$

- En 1832, Liouville partiendo del hecho de que para $n \in \mathbb{N}$, se tiene: $D^{n}(e^{ax}) = a^{n}e^{ax}$, no vio inconveniente en generalizar para el caso "n" no natural. Asi si una función "f" puede expandirse como la serie:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, e^{a_k x}$$

Liouville define la derivada de orden α como:

$$D^{\alpha}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, a_k^{\alpha}e^{a_k x}, \qquad \forall\alpha \in \mathbb{C}$$

- Liouville también obtuvo una fórmula no muy rigorosa, expresa por:

$$D^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{(-1)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty}f(x+t)t^{\alpha-1}dt\,, -\infty < x < \infty, \qquad Re(\alpha) > 0$$

- En 1847 Riemann basado en las series de Taylor establece la siguiente definición de integral fraccionaria de orden $\alpha > 0$.

$$I^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\,, \qquad x > 0$$

- Sin embargo es a partir de 1974 que el cálculo fraccionario empieza a tomar importancia como campo de investigación en matemáticas. En este año B. Ross organiza la "primera conferencia de Cálculo Fraccionario y sus aplicaciones".

- A mediados del siglo XX, se introduce el concepto de una Ecuación Diferencial de Orden Fraccional, en 1954 J. H. Barrett, 1990 T. F. Nonnenmacher y en 1997 K. Diethelm. Trabajan con Ecuaciones Diferenciales de orden no – entero, pero de una manera muy superficial, ya en 1993 K. S. Miller - B. Ross y en 1994 I. Podlubny, desarrollan de manera muy amplia el concepto de una Ecuación Diferencial de Orden Fraccional.

Entre las ecuaciones fundamentales de la Física, se encuentran las ecuaciones de Calor y de Onda, que son Ecuaciones Diferenciales Parciales de Segundo Orden, cuya solución las podemos encontrar por varios autores, estas dos ecuaciones siempre han sido asociadas a familias muy distintas de fenómenos físicos, ahora surge la pregunta ¿existirá una ecuación fraccionaria, que relacione estos dos fenómenos en forma independiente?, las ecuaciones diferenciales de orden fraccional ¿serán una herramienta para relacionar estos dos fenómenos? y más aún ¿cómo será la solución de dicha ecuación si existiese esta relación? y finalmente describir la relación existente entre la ecuación de Calor y de Onda mencionado a través de una ecuación diferencial fraccionaria y las ecuaciones de Calor y de Onda, expresadas en forma estándar.

El objetivo de este trabajo es absolver todas estas interrogantes, utilizando una Ecuación Diferencial de Orden Fraccional, desde un punto de vista puramente matemático.

Entre las ecuaciones fundamentales de la Física se encuentran las Ecuaciones de Calor y de Onda.

La Ecuación de Calor Estándar, está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) \tag{1.1}$$

O denotada de la forma:

$$D_t[u(t,x)] = \lambda^2 D_x^2[u(t,x)]$$

Bajo las condiciones iniciales:

$$u(0,x) = f(x) \quad y$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0; \quad \lim_{x\to\pm\infty} u_x(t,x) = 0; \;\; para\, t > 0 \qquad (1.2)$$

Que es la notación que utilizaremos en el desarrollo del presente trabajo de investigación.

Donde:

- λ^2, es una constante positiva llamada "Coeficiente de Difusión"
- $u(t,x)$ es una función, que se asume nula para $t < 0$.

El fenómeno físico típicamente relacionado con esta ecuación es el de la difusión del calor a lo largo de una varilla semi-infinita, donde $u(t,x)$ es la variable temperatura en el tiempo "t", a una distancia "x" del extremo.

La Ecuación de Onda, cuando consideramos las oscilaciones de una cuerda no acotada, toma la forma más sencilla.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) \qquad (1.3)$$

O denotada de la forma:

$$D_t^2[u(t,x)] = \lambda^2 D_x^2[u(t,x)]$$

Con condiciones iniciales;

$$u(0,x) = g(x); \quad D_t u(0,x) = f(x) \quad y$$

$$u(t,0) = 0, \quad \underset{x\to\pm\infty}{\text{Lim}}\, u(t,x) = 0; \quad \underset{x\to\pm\infty}{\text{Lim}}\, u_x(t,x) = 0; \;\; para\; t > 0 \qquad (1.4)$$

Donde λ denota la velocidad de ondas y $u(t,x)$ la desviación longitudinal de la cuerda del eje x, en un tiempo determinado t.

Estas dos ecuaciones son los ejemplos más simples de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, de tipo parabólico e hiperbólico respectivamente.

Ahora consideremos la Ecuación Diferencial de Orden Fraccional de una forma muy general, definida por:

$$D_t^{\alpha}[u(t,x)] = \lambda^2 D_x^{\beta}[u(t,x)]; \;\; t,\lambda \in \mathbb{R}_+; x \in \mathbb{R} \qquad (1.5)$$

Con: $0 < \alpha \leq 2$ y $\beta > 0$, la cual representa a las ecuaciones clásicas de Calor (1.1) y de onda (1.3). Y que consideramos como una generalización de éstas dos ecuaciones, pues si sustituimos los valores de $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ en la ecuación (1.5), se encuentra la Ecuación de Calor (1.1) y si sustituimos los valores de $\alpha = 2$ y $\beta = 2$ en la ecuación (1.5), se encuentra la Ecuación de Onda (1.3).

Existen muchos métodos de solución para las ecuaciones diferenciales de orden fraccional, en el presente trabajo se utilizará las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville.

1.1.2. FORMULACION DEL PROBLEMA.

1.1.2.1. Problema General

Dada la Ecuación Diferencial de Orden Fraccional:

$${}_0^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)] = \lambda^2 \, {}_{-\infty}^{\;\;L}D_x^{\beta}[u(t,x)]; \;\; t,\lambda^2 \in \mathbb{R}_+; x \in \mathbb{R} \qquad (1.6)$$

Con condiciones iniciales definidas por:

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-1}[u(0,x)] = f(x), x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0, t > 0 $$

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-2}[u(0,x)] = g(x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1.7} $$

Cuando: $0 < \alpha \leq 2$ y $\beta > 0$.

Donde:

- ${}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)]$: representa la derivada parcial de Riemann-Liouville de $u(t,x)$, con respecto a la variable "t" de orden "α", con $0 < \alpha \leq 2$.
- ${}_{-\infty}^{L}D_x^{\beta}[u(t,x)]$: representa la derivada parcial de Liouville de $u(t,x)$, con respecto a la variable "x" de orden "β", con $\beta > 0$.

A la cual se denominará **Ecuación de Calor y Onda de Orden Fraccional**.

¿Será posible encontrar una solución de la ecuación de Calor y Onda de Orden Fraccional?.

1.1.2.2. Problemas específicos

- ¿Es posible expresar las ecuaciones de Calor y de Onda mediante una Ecuación Diferencial Parcial de Orden Fraccional?
- ¿Qué relación existirá entre las soluciones de la Ecuación de Calor y de Onda Estándar, con la solución de la Ecuación de Calor y de Onda de Orden Fraccional?

1.1.3. JUSTIFICACION E IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACION:

Conforme ha ido evolucionando la ciencia y la tecnología, las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias sin duda tomaron un papel muy importante en el desarrollo de la aplicación de las matemáticas, principalmente en el área de la Física, pues esta permite que muchos conceptos de Ecuaciones Diferenciales de orden entero se generalicen y permitan el estudio más amplio de diversas ramas de la Matemática, y en algunos casos las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias permite la relación entre dos fenómenos, como es el caso del presente trabajo de investigación ya que primero establece una relación entre las Ecuaciones de Calor y de Onda Estándar, y las generaliza mediante las Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccional.

Cabe indicar que, si bien es cierto su origen de este tema se remonta a los años 1695, cuando G.W. Leibniz, quien fue el primero en introducir el término de “Ecuación Diferencial” y L. H’ospital, quienes intercambiaron opiniones sobre el significado de:

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad para \quad n = \frac{1}{2}$$

Pero los trabajos relacionados a Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccional propiamente dichas, se realizaron a mediados del siglo XX por Al – Bassam (1965), K. S. Miller y B. Ross (1993) y I. Podlubny (1994); hasta hoy en día es un tema muy poco conocido y todos los trabajos relacionados a este tema son la mayoría generalizaciones de las Ecuaciones Diferenciales de orden entero.

A diferencia de las Ecuaciones Diferenciales de orden entero, las Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccional muestran estudios mucho más específicos, mucho más exactos, finos; por ende los objetos de estudio son mucho más exactos. Es por tal razón que se espera motive el desarrollo de futuros proyectos del estudio de la aplicación de la matemática a otras ramas del conocimiento.

Este trabajo contribuye a una mayor motivación por parte del lector al estudio de la Matemática Pura, y sus diversas aplicaciones principalmente en el área de la Física.

1.1.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION:

1.1.4.1. OBJETIVO GENERAL

Encontrar la solución de la Ecuación de Calor y de Onda de Orden Fraccional.

1.1.4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

a) Establecer la relación existente entre las Ecuaciones de Calor y de Onda Estándar con la Ecuación de Calor y de Onda de Orden Fraccional.

b) Demostrar que las soluciones de la Ecuación de Calor y de Onda Estándar, es un caso particular de la Ecuación de Calor y de Onda de Orden Fraccional.

1.2. MARCO TEORICO CONCEPTUAL

1.2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACION:

Existen trabajos de investigación relacionados con el trabajo que se desarrolla, así como:

a) Nivel Internacional

i) Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J. (2006), Libro "*Theory and Applications of Fractional Differential Equations".* Edit. Elsevier. Obra muy amplia desarrollada íntegramente a este tema. Que en su capítulo VI titulado "Partial Fractional Differential Equations", estudia ampliamente las ecuaciones de Difusión – Onda Fraccional, pero trabaja con de Derivadas de Caputo, en cambio el presente se usa las derivadas de Riemann-Liouville.

ii) Podlubny, Igor. (1999). Libro "*Fractional Differential Equations"*. Technical University of Kosice, Slovak Republic. Academic Prees. Obra dedicada íntegramente a este tema, que en su capítulo de las aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Fraccionales, desarrolla la Ecuación de Difusión Fraccional, mas no así la ecuación de Onda, en cambio el presente trabajo de investigación desarrolla ambas ecuaciones tanto las de Calor como las de Onda.

b) Nivel Nacional y Regional

i) Gutiérrez, G. (2012). Tesis *"Solución Fundamental de la Derivada de Orden Fraccional"*. Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco. El objetivo de esta tesis fue, "obtener la solución fundamental para el operador derivada de orden fraccional", quien llego a concluir: "Se determinó la solución fundamental de la derivada de orden fraccional usando la propiedad de exponentes fraccionales de la derivada de orden fraccional"

ii) López, M. (2007). Tesis *"Transformadas Integrales para Ecuaciones Diferenciales de Orden Fraccional"*. Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco. El objetivo de esta tesis fue, Desarrollar las Ecuaciones Diferenciales Lineales de Orden Fraccional con condiciones iniciales utilizando Transformadas Integrales, describiendo diferentes métodos de solución para dichas ecuaciones. Dentro de las aplicaciones de esta tesis, se encuentran las ecuaciones.

- “Ecuación Fraccional de Difusión de Nigmatullin”, la cual esta enunciada de la forma:

$$ {}_0D_t^{\alpha}[u(t,x)] = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}[u(t,x)];\;\; t \in \mathbb{R}_+; x \in \mathbb{R} $$

Con condiciones iniciales definidas por:

$$ {}_0D_t^{\alpha-1}[u(0,x)] = f(x), x \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0, t > 0 $$

La cual está demostrada en la tesis mencionada. Como notamos esta ecuación es un caso particular de la ecuación (1.6), cuya generalización y solución es objeto de estudio del presente trabajo de investigación.

- “Ecuación Fraccional de Difusión de Schneider – Wyss”, la cual esta enunciada de la forma:

$$ u(t,x) = \varphi(x) + \lambda^2 \; {}_0D_t^{-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[u(t,x)];\;\; t \in \mathbb{R}_+; x \in \mathbb{R} $$

Con condiciones iniciales definidas por:

$$ \lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0, \qquad u(0,x) = \varphi(x) $$

Esta ecuación también está demostrada en dicho trabajo, como se nota es un caso particular de la ecuación (1.6), cuya solución es objeto de estudio del presente trabajo de investigación.

1.2.2. BASES TEORICAS FILOSOFICAS:

De acuerdo a Jeremy Avigad, el **conocimiento matemático** ha sido considerado por mucho tiempo como un paradigma del conocimiento humano con verdades que son a la vez necesarias y ciertas, por lo que dar una explicación del conocimiento matemático es una parte importante de la epistemología.

- **Axioma.** Es una proposición evidente que se admite sin demostración.
- **Postulado.** Es una proposición no tan evidente como un axioma pero que también se admite sin demostración.
- **Lema.** Es una proposición que sirve de base a la demostración de un teorema. Es como un "teorema preliminar" que se considera más importante.
- **Teorema**. Es una proposición que puede ser demostrada como verdadera dentro de un marco lógico, que partiendo de un supuesto (hipótesis), afirma una verdad (tesis).
- **Corolario.** Es una proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.
- **Escolio.** Es una advertencia o nota que se hace a fin de aclarar, ampliar o restringir proposiciones anteriores.

1.2.3. MARCO CONCEPTUAL:

1.2.3.1. SERIES DE POTENCIAS.

DEFINICION: [1] Sea una función compleja de variable compleja $S_n: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$. Una serie de potencia es una sucesión de funciones denotada por $(S_n)_{n\geq 0}$, definida inductivamente por:

$S_0(z) = a_0 \in \mathbb{C}$; para $n = 0$.

$S_n(z) = S_{n-1}(z) + a_n z^n$; para $n \geq 1$, donde $a_n \in \mathbb{C}$.

de la definición se sigue que:

[1] Ver [8] de Peter O'Neil. Pg. 420.

$$S_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \,,$$

luego $S_n(z)$ es en particular un polinomio y se llama la reducida de orden "n" de la serie:

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

1.2.3.2. FORMULA DE TAYLOR.

TEOREMA 1.1.:[2] Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, una función derivable $(n+1)$ veces en el intervalo abierto $\langle a,b \rangle$ y $f^{(n+1)}$ continua en $[a,b]$, entonces:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Donde $a < x < b$.

1.2.3.3. FUNCION GAMMA.

DEFINICION:[3] Sea una función compleja de variable compleja $\Gamma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, la función Gamma en la variable "z" denota por $\Gamma(\mathrm{z})$; se define por:

$$\Gamma(\mathrm{z}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt\,, \quad Re(z) > 0$$

La función Gamma satisface la siguiente ecuación:

$$\Gamma(\mathrm{z}+1) = \mathrm{z}\Gamma(\mathrm{z})$$

[2] Para la demostración de este teorema, véase [5], por Krzysztof M. Pg. 99.
[3] Ver [3] de Kilbas A. Pg. 24.

1.2.3.4. FUNCION BETA.

DEFINICION:[4] Sea una función compleja de variable compleja $\mathcal{B}: \mathbb{C}x\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, la función Beta en las variables "z" y "w" denotada por $\mathcal{B}(z, w)$ se define por:

$$\mathcal{B}(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}, \qquad (Re(z) > 0;\ \ Re(w) > 0)$$

TEOREMA 1.2.:[5] Sean las funciones Gamma $\Gamma: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y Beta $\mathcal{B}: \mathbb{C}x\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, funciones complejas de variable compleja, entonces se cumple la siguiente relación:

$$\mathcal{B}(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

TEOREMA 1.3.:[6] Sea una función Gamma $\Gamma: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, entonces se cumple la siguiente relación:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

1.2.3.5. TRANSFORMADA DE LAPLACE.

DEFINICION:[7] Sea $f: [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ una función. La transformada de Laplace de f en el parámetro "s", denotado por $F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\}$, se define como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

donde $s \in \mathbb{C}$.

---

[4] Ver [3] de Kilbas A. Pg. 26.
[5] Para la demostración de este teorema véase [12], por Uchasara A. Pg. 17.
[6] Para la demostración de este teorema véase [12], por Uchasara A. Pg. 18.
[7] Ver [7], por Murray S. Pg. 1.

DEFINICION:[8] Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función, se dice que f es continua por tramos o seccionalmente continua en el intervalo $[a, b]$, si es posible particionar el intervalo en un número finito de subintervalos de tal manera que la función sea continua en cada uno de ellos, pero no necesariamente en los extremos de los subintervalos.

DEFINICION:[9] Sea una función $f: [0, +\infty\rangle \rightarrow \mathbb{C}$, se dice que f es de orden exponencial "c" $(c > 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$, si existen dos constantes reales positivas M y T tales que:

$$|e^{-ct} f(t)| < M \quad \text{ó} \quad |f(t)| < Me^{ct} \qquad \forall\, t \geq T$$

TEOREMA 1.4.:[10] Sea $f: [0, +\infty\rangle \rightarrow \mathbb{R}$ una función seccionalmente continua en cada intervalo finito $0 \geq t \geq T$ y de orden exponencial "c" y para $t > T$; entonces existe la transformada de Laplace $F(s)$, $\forall\, s > c$.

NOTACIÓN:

Denotemos por: "$\mathcal{L}$", al espacio de funciones para los cuales existe la transformada de Laplace. Es decir:

Si $f \in \mathcal{L}$, entonces existe la transformada de Laplace de la función f.

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

Para todas las propiedades que se suceden, se supondrá que todas las funciones satisfacen las condiciones del Teorema 1.4, de modo que sus transformadas de Laplace existen.

[8] Ver [7], por Murray S. Pg. 2.
[9] Ver [9], por Pierantozzi T. Pg. 38.
[10] Para la demostración de este teorema véase [7], por Murray S. Pg. 28.

1. PROPIEDAD DE LA LINEALIDAD:[11]

Dadas las constantes c_1 y c_2, con $\mathcal{L}\{f_1(t); s\} = F_1(s)$; $\mathcal{L}\{f_2(t); s\} = F_2(s)$ entonces:

$$\mathcal{L}\{c_1\, f_1(t) + c_2\, f_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1F_1(s) + c_2F_2(s)$$

2. PROPIEDAD DE LA TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE LAS DERIVADAS:

- Si $\mathcal{L}\{f(t); s\} = F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f'(t); s\} = s\mathcal{L}\{f(t); s\} - f(0) = sF(s) - f(0)$$

Si f es continua para $0 \leq t \leq N$ y de orden exponencial para $t > N$, mientras que f' es seccionalmente continua para $0 \leq t \leq N$.

PRUEBA:

$$\mathcal{L}\{f'(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \lim_{P\to\infty} \int_0^P e^{-st} f'(t)dt$$

$$= \lim_{P\to\infty} \left\{ [e^{-st} f(t)]_0^P + s\int_0^P e^{-st} f(t)dt \right\}$$

$$= \lim_{P\to\infty} \left\{ e^{-sP} f(P) - f(0) + s\int_0^P e^{-st} f(t)dt \right\}$$

$$= s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt - f(0) = sF(s) - f(0)$$

Puesto que f es de orden exponencial N cuando $t \to \infty$, de manera que $\lim_{P\to\infty} e^{-sP} f(P) = 0$ para $s > N$.

[11] Ver [7], por Murray S. Pg. 12.

- Si $\mathcal{L}\{f(t);s\}=F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f''(t);s\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

Si f y f' son continuas para $0\leq t\leq N$ y de orden exponencial para $t>N$, mientras que f'' es seccionalmente continua para $0\leq t\leq N$.

PRUEBA:

Por la propiedad anterior, tenemos:

$$\mathcal{L}\{g'(t);s\}=sG(s)-g(0)$$

Sea $g(t)=f'(t)$. Entonces:

$$\mathcal{L}\{f''^{(t)};s\}=s\mathcal{L}\{f'(t);s\}-f'(0)$$

$$=s[s\mathcal{L}\{f(t);s\}-f(0)]-f'(0)=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

- Si $\mathcal{L}\{f(t);s\}=F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t);s\}=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-s^{n-3}f''(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

Si $f,f',f''\ldots,f^{(n-1)}$ son continuas para $0\leq t\leq N$ y de orden exponencial para $t>N$, mientras que $f^{(n)}$ es seccionalmente continua para $0\leq t\leq N$.

3. PROPIEDAD DE LA TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE LA INTEGRAL:[12]

Si $\mathcal{L}\{f(t);s\}=F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\,;s\right\}=\frac{F(s)}{s}$$

TEOREMA 1.5.:[13] Sean $f,g:[0,+\infty\rangle\to\mathbb{R}$, dos funciones continuas por tramos y de orden exponencial, con sus transformadas de Laplace en el parámetro "s" dadas por

[12] Ver [7], por Murray S. Pg. 16.
[13] Para la demostración de este Teorema véase [7], por Murray S. Pg. 55.

$\mathcal{L}\{f(t);s\} = F(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t);s\} = G(s)$. Entonces la **Transformada de Laplace de la convolución** es igual al producto de sus Transformadas de Laplace, es decir:

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t);s\} = F(s)G(s) \quad \text{ó}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s);t\} = \int_0^t f(\tau)G(t-\tau)d\tau = f(t) * g(t)$$

DEFINICION:[14] Sea $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty\rangle$ una función. La **Transformada Inversa de Laplace** de F denotado por $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s);t\}$, se define como:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s),t\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st}F(s)ds, \quad a = Re(s)$$

1.2.3.6. TRANSFORMADA DE FOURIER.

La siguiente definición corresponde a las condiciones, conocidas como "Condiciones de Dirichlet", bajo las cuales es posible la representación en serie de Fourier de una función, así tenemos:

DEFINICION:[15] Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que satisface las **Condiciones de Dirichlet**, si verifica.

- La función f tiene un número finito de discontinuidades en un periodo.
- La función f tiene un número finito de máximos y mínimos en un periodo.
- La integral del valor absoluto de $f(t)$ en un periodo, es finito. Es decir:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|dt < \infty$$

---

[14] Ver [3], por Kilbas A. Pg. 18.
[15] Ver [2], por Hwei P. Hsu. Pg. 16.

Donde T, representa el periodo.

DEFINICION:[16] Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función continua absolutamente integrable en $\mathbb{R}$. La **Transformada de Fourier o Integral de Fourier** de f en el parámetro “k”, denotado por $F(k) = \mathcal{F}\{f(x); k\}$, se define como:

$$F(k) = \mathcal{F}\{f(x); k\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x)dx$$

Donde $k \in \mathbb{C}$.

DEFINICION:[17] La **convolución de Fourier**, de dos funciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denotado por $f * g$, está definida por la integral:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)d\tau$$

Siempre que $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b g(x)dx$, existan para todo intervalo $[a, b]$ y $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-\tau)g(\tau)|d\tau$, converge.

ESCOLIO.- Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas que están definidas en $\mathbb{R}$, entonces la **Transformada de Fourier de la convolución** es igual al producto de sus Transformadas de Fourier, esto es:

$$\mathcal{F}\{f(x) * g(x); k\} = F(k)G(k)$$

DEFINICION:[18] Sea $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. La **Transformada Inversa de Fourier** de F denotado por $f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k); x\}$, se define como:

[16] Ver [8], por O’Neil P. Pg. 67.
[17] Ver [8], por O’Neil P. Pg. 81.
[18] Ver [8], por O’Neil P. Pg. 69.

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k); x\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}F(k)dk$$

1.2.3.7. ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL:

DEFINICION:[19] Sean $k \geq 1$ entero y $U \in \mathbb{R}^n$ un abierto. Una ecuación diferencial parcial es una ecuación de la forma:

$$F(D^k f(x), D^{k-1} f(x), \ldots, f(x), x) = 0$$

Donde $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^k(U)$ y $F: \mathbb{R}^{n^k}$ x ... x $\mathbb{R}^{n^1}$x $\mathbb{R}^n$ x $U \to \mathbb{R}$

Son funciones, el entero k que aparece en la definición es llamado orden de la ecuación.

ESCOLIO: El operador D de la definición anterior representa la derivada parcial con respecto a una de las variables del dominio de F.

ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL DE SEGUNDO ORDEN:

La ecuación general en derivadas parciales de segundo orden que incluye dos variables independientes "x","y"; tiene la forma:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

Donde: $F: U \subset \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$, U es un abierto en $\mathbb{R}^8$; $z: U' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, U' es un abierto en $\mathbb{R}^2$; con $p = z_x$; $q = z_y$; $r = z_{xx}$; $s = z_{xy}$; $t = z_{yy}$.

19 Ver [1], por Gutierrez G. Pg. 15.

1.3. METODOLOGÍA

1.3.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN:

Es de tipo exploratorio, pues trata de analizar e investigar aspectos concretos que aún no han sido estudiados a profundidad, básicamente se trata de un primer acercamiento. Así como en el presente trabajo que a partir de modelos matemático como las ecuaciones de calor y de onda estándar, se deducen otros modelos adecuándolos y generalizándolos, y como consecuencia de esta generalización se pretende encontrar otros modelos matemáticos como las ecuaciones de calor y de onda de orden fraccional, y que las primeras ecuaciones queden como un caso muy particular de los nuevos modelos encontrados.

1.3.2. NIVEL DE INVESTIGACIÓN:

La investigación es de nivel pura o básica, pues se trata de investigar y relacionar hasta cierto punto nuevos conceptos, relacionándolos e infiriendo otros resultados. Este nivel de investigación no se ocupa de las aplicaciones prácticas.

1.3.3. DISEÑO DE INVESTIGACIÓN:

El diseño es no experimental, en razón que manipula conceptos en condiciones abiertas o no contraladas, usando el diseño del método transversal pues describe y analiza la interrelación entre dos modelos, en nuestra investigación estudia la dependencia de la Solución de la Ecuación de Calor y Onda estándar, por medio de las Ecuaciones Diferenciales Parciales de Orden Fraccional.

1.3.4. DELIMITACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN:

1.3.4.1. DELIMITACIÓN ESPACIAL Y TEMPORAL

El desarrollo del presente trabajo de investigación se está llevando a cabo en la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, provincia y departamento del

Cusco. Durante los meses Marzo del 2018 y que se pretende concluir en Febrero del 2019.

1.3.4.2. DELIMITACIÓN CONCEPTUAL

La presente investigación se encuentra enmarcada dentro del área de las Ecuaciones Diferenciales. Las Ecuaciones Diferenciales (E.D.) es una de las ramas amplias de la matemática la cual puede clasificarse de acuerdo al siguiente cuadro.

$$E.D.\begin{cases} E.D.\,de\ Orden\ Entero \begin{cases} Ordinarias \\ Parciales \end{cases} \\ E.D.Fraccional \begin{cases} Ordinarias \\ Parciales \begin{cases} Coef.\ variables \\ Coef.\ constantes \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

El Problema del tipo Cauchy generalizado así denominado, objeto de estudio de la presente investigación es una Ecuación Diferencial Parcial de orden Fraccional con Coeficientes Constantes.

1.3.4.3. LIMITACIONES

En la realización de cualquier trabajo de investigación es muy común afrontar y superar obstáculos y dificultades para llegar a su culminación, estas limitaciones son de órdenes muy variados, entre ellas la gran diversidad y enfoque de la información al respecto del tema que cada autor tiene su propio criterio de abordar el tema. El presente trabajo no podía escapar de esta situación, otra limitación y dificultad es la de adecuar el contenido teórico para poder aplicarlos, generalizarlos y así lograr los objetivos del presente trabajo de investigación.

CAPITULO II

MARCO TEORICO

2.1. INTEGRALES Y DERIVADAS FRACCIONARIAS DE RIEMANN-LIOUVILLE SOBRE UN INTERVALO REAL FINITO.

DEFINICIÓN 2.1.1.- Sea $f \in L_1(a,b)$[20]. Definamos para $x \in [a,b]$ la función

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(z)dz$$

Así también, definamos $I_a^2 f(x) = I_a^1[I_a^1 f(x)]$ y aplicando el teorema de Fubini,[21] tenemos:

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \int_a^z f(r)\,drdz = \int_a^x (x-z)f(z)\,dz$$

Similarmente, definamos $I_a^3 f(x) = I_a^1[I_a^2 f(x)]$, así tenemos:

$$I_a^3 f(x) = \int_a^x \int_a^z \int_a^r f(t)\,dt\,drdz = \frac{1}{2}\int_a^x (x-z)^2 f(z)\,dz$$

Esta fórmula puede generalizarse para $n \in \mathbb{N}$, obteniéndose la n-ésima integral de la f, como muestra el siguiente teorema.

TEOREMA 2.1.: sea $n \in \mathbb{N}$ y $f \in L_1(a,b)$. La n-ésima integral de la función f está dado por:

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)\,dz, \qquad x > a.$$

---

[20] Definición: El espacio $L_1(a,b)$ está formado por las funciones medibles $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ para las que $|f(x)|$ es integrable. Esto es, $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$. La norma de cualquier elemento f de este espacio se define como: $\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx$

[21] Para la demostración de este Teorema véase los Links 5) y 6).

DEMOSTRACION:

Demostraremos este teorema por inducción sobre "n"

El caso $n = 2$ ya lo demostramos anteriormente.

Supongamos que se cumple el teorema para $n = k$. Es decir:

$$I_a^k f(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^x (x-z)^{k-1} f(z)\, dz$$

Ahora probaremos si la fórmula es válida para $n = k + 1$. Así por el teorema de Fubini y de acuerdo con las propiedades de la función Gamma tenemos que:

$$I_a^{k+1} f(x) = I_a^1 I_a^k f(x) = \int_a^x \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^s (s-z)^{k-1} f(z)\, dz\, ds$$

$$I_a^{k+1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^x \int_a^s (s-z)^{k-1} ds f(z)\, dz$$

$$I_a^{k+1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^x \frac{(x-z)^k}{k} f(z)\, dz$$

$$I_a^{k+1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_a^x (x-z)^k f(z)\, dz$$

Esta ecuación conocida como fórmula de Cauchy, puede extenderse para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}^+$, de la siguiente manera:

DEFINICION 2.1.2.- Sea $f \in L_1(a, b)$ las integrales:

$$I_{a+}^{\alpha}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-z)^{\alpha-1} f(z) dz, \quad con\ \ x > a$$

$$I_{b-}^{\alpha}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (z-x)^{\alpha-1} f(z) dz, \quad con\ \ x < b \qquad (2.1)$$

Son conocidas como integrales fraccionarias de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$, por la izquierda y por la derecha, respectivamente.

Estas integrales de la definición anterior, también son válidas para funciones $f \in L_p(a,b)$ con $1 \leq p \leq \infty$.[22]

Y cuando $\alpha = n$, resulta:

$$I_{a+}^{n}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-z)^{n-1} f(z)dz =$$

$$= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(z)dz, \qquad con \;\; x > a. \qquad y$$

$$I_{b-}^{n}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_x^b (z-x)^{n-1} f(z)dz =$$

$$= \int_x^b dx_1 \int_{x_1}^{b} dx_2 \dots \int_{x_{n-1}}^{b} f(z)dz, \qquad con \;\; x < b.$$

Como notamos se obtienen de nuevo las fórmulas que denotan la integral de orden entero "n" de una función real, a una única integral de convolución.

DEFINICION 2.1.3.- Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función definida en el intervalo $[a,b]$, las expresiones:

$$^{RL}D_{a+}^{\alpha}[f(x)] = (D^n I_{a+}^{n-\alpha})[f(x)] = \left(\frac{d^n}{dx^n} I_{a+}^{n-\alpha}\right)[f(x)]$$

$$^{RL}D_{b-}^{\alpha}[f(x)] = ((-D)^n I_{b-}^{n-\alpha})[f(x)] = \left(-\frac{d^n}{dx^n} I_{b-}^{n-\alpha}\right)[f(x)] \qquad (2.2)$$

[22] Los espacios $L_p(a,b)$ con $1 \leq p \leq \infty$, se puede encontrarse en los Links 1) y 2).

Representan las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$, con $n-1 \leq \alpha < n,\ n \in \mathbb{Z}$ por la izquierda y por la derecha respectivamente.

DEFINICION 2.1.4.- Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, una función definida en el intervalo $[a,b]$ y sean $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{Z}$ tales que $n-1 \leq \alpha < n$, se define la derivada fraccionaria de orden α según Riemann-Liouville como:

$$^{RL}D_a^\alpha[f(x)] = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-z)^{n-\alpha-1} f(z)dz\right]$$

Siempre que la expresión del lado derecho exista.

ESCOLIO: Notemos que si α es un número entero positivo entonces la definición anterior coincide con la derivada de orden entero. En efecto, si $\alpha = k, k \in \mathbb{N}$ y $t > a$ tenemos que:

$$^{RL}D_a^\alpha[f(x)] = D_a^k[f(x)] = \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} I_a^{k+1-k}[f(x)] = \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} I_a\ [f(x)] = \frac{d^k}{dx^k}[f(x)]$$

El siguiente teorema muestra las condiciones bajo las cuales la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville existe.

TEOREMA 2.2.: [23] Si $f \in AC[a,b]$, donde $AC[a,b]$ representa el conjunto de las funciones absolutamente continuas[24], y $0 < \alpha < 1$ entonces la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville $^{RL}D^\alpha f$, existe para $0 < \alpha < 1$. Si $\alpha > 1$ en la derivada $^{RL}D^\alpha f$, una condición suficiente para que las expresiones de la definición anterior existan es que: $f \in AC^{[\alpha]}[a,b]$,

[23] Para la demostración del teorema 2.2. véase [13], por Vargas L. Pg. 11.

[24] **Definición:** Una función $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ se dice que es absolutamente continua en $[a,b]$ el cual se denota por $AC[a,b]$, si para cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que para toda familia finita de intervalos disjuntos $[a_k, b_k] \subset [a,b]$, $k = 1,2,\dots,n$ que verifique $\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta$ se cumple que $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$

donde $AC^n[a,b]$ con $n = 1,2, \dots$, es el espacio de funciones f con derivadas continuas hasta de orden "$n-1$" en $[a,b]$ y tales que $f^{(n-1)}(x) \in AC[a,b]$.

Cuando la función f depende de dos variables y siempre que se verifiquen las condiciones necesarias planteadas para el caso de una sola variable TEOREMA 2.2., sobre la existencia de los operadores fraccionarios, con respecto a la variable de integración. Se definen las integrales y derivadas parciales de Riemman-Liouville.

DEFINICIÓN 2.1.5.- Sea una función $f: \mathbb{R}^+ \mathrm{x} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} |f(t,x)| dtdx < \infty$, las integrales parciales fraccionarias de Riemann-Liouville se definen como:

$$ {}_xI_{a+}^{\alpha}[f(t,x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-z)^{\alpha-1} f(t,z) dz, \quad con \ x > a $$

$$ {}_xI_{b-}^{\alpha}[f(t,x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (z-x)^{\alpha-1} f(t,z) dz, \quad con \ x < b \tag{2.3} $$

DEFINICIÓN 2.1.6.- Sea una función $f: \mathbb{R}^+ \mathrm{x} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} |f(t,x)| dtdx < \infty$, las derivadas parciales fraccionarias de Riemann-Liouville se definen como:

$$ {}_x^{RL}D_{a+}^{\alpha}[f(t,x)] = \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} \ {}_xI_{a+}^{n-\alpha} \right) [f(t,x)] = $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_a^x \frac{f(t,z)}{(x-z)^{\alpha-n+1}} dz; \quad (x > a) $$

$$ {}_x^{RL}D_{b-}^{\alpha}[f(t,x)] = \left((-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \ {}_xI_{b-}^{n-\alpha} \right) [f(t,x)] = $$

$$ = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_x^b \frac{f(t,z)}{(z-x)^{\alpha-n+1}} dz; \quad (x < b) \tag{2.4} $$

2.2. INTEGRALES Y DERIVADAS FRACCIONARIAS DE LIOUVILLE.

Las definiciones de integrales fraccionarias de Riemann-Liouville, fueron extendidas por Liouville, de manera natural a los semiejes $\langle -\infty, b]$ y $[a, +\infty\rangle$ y por lo tanto al eje real cuando $a \to -\infty$ y $b \to +\infty$.

DEFINICION 2.2.1.- Sea $f \in L_1(\mathbb{R})$ las integrales fraccionarias de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de Liouville, por izquierda y por derecha están definidas por las expresiones:

$$^{L}I_{-}^{\alpha}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad con\ -\infty < x < \infty$$

$$^{L}I_{+}^{\alpha}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad con\ -\infty < x < \infty \qquad (2.5)$$

respectivamente.

Cuando $\alpha = n$, las expresiones de la definición anterior devuelven las fórmulas que reducen la integral de orden entero "n" de una función real a una única integral de convolución.

DEFINICION 2.2.2.- Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real con $f \in AC^{[\alpha]}(\mathbb{R})$, las derivadas de Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ con $n-1 \leq \alpha < n$; $n \in \mathbb{Z}$ por izquierda y por derecha, están definidas por las expresiones:

$$^{L}D_{+}^{\alpha}[f(x)] = D^{n}\ {}^{L}I_{+}^{n-\alpha}[f(x)]$$

$$^{L}D_{-}^{\alpha}[f(x)] = (-1)^{n} D^{n}\ {}^{L}I_{-}^{n-\alpha}[f(x)] \qquad (2.6)$$

respectivamente.

Cuando $\alpha = n$ coinciden con las definiciones usuales de derivada.

Cuando la función f depende de dos variables y siempre que se verifiquen las condiciones necesarias planteadas para el caso de una sola variable TEOREMA 2.2., sobre la existencia de los operadores fraccionarios, con respecto a la variable de integración. Se definen las integrales y derivadas parciales de Liouville.

DEFINICIÓN 2.2.3.- Sea una función $f: \mathbb{R}^{+}\text{x}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\int_{\mathbb{R}^{+}} \int_{\mathbb{R}} |f(t,x)| dtdx < \infty$, las integrales parciales fraccionarias de Liouville por izquierda y por derecha, se definen por las expresiones:

$$_{-\infty}^{\ \ L}I_x^{\alpha}[f(t,x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-z)^{\alpha-1} f(t,z) dz, \quad con\ -\infty < x < \infty$$

$$_{+\infty}^{\ \ L}I_x^{\alpha}[f(t,x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{+\infty} (z-x)^{\alpha-1} f(t,z) dz, \quad con\ -\infty < x < \infty \qquad (2.7)$$

respectivamente.

DEFINICIÓN 2.2.4.- Sea una función $f: \mathbb{R}^{+}\text{x}\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\int_{\mathbb{R}^{+}} \int_{\mathbb{R}} |f(t,x)| dtdx < \infty$, las derivadas parciales fraccionarias de Liouville de orden $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ con $n-1 \leq \alpha < n; n \in \mathbb{Z}$ por izquierda y por derecha, se definen por las expresiones:

$$_{-\infty}^{\ \ L}D_x^{\alpha}[f(t,x)] = \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}\, _{-\infty}^{\ \ L}I_x^{n-\alpha}\right)[f(t,x)]$$

$$_{+\infty}^{\ \ L}D_x^{\alpha}[f(t,x)] = \left((-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n}\, _{+\infty}^{\ \ L}I_x^{n-\alpha}\right)[f(t,x)] \qquad (2.8)$$

respectivamente.

2.3. PROPIEDADES DE LA DERIVADA E INTEGRAL FRACCIONARIA DE RIEMANN-LIOUVILLE.

En esta sección se enuncia una serie de propiedades básicas de los operadores de derivación e integración de Riemann-Liouville, con el fin de resaltar las principales diferencias y analogías entre el comportamiento de éstos y el de los operadores enteros clásicos.

En esta sección por simplicidad utilizaremos la siguiente notación:

- $D_{a+}^{\alpha} = {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} = D_{a}^{\alpha}$
- $I_{a+}^{-\alpha} = D_{a+}^{\alpha} = I_{a}^{-\alpha}$ cuando $\alpha > 0$.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Entonces:

PROPIEDAD 2.3.1. Sea $f \in L_1(a, b)$, entonces se cumple:[25]

$$\lim_{\alpha \to 0} I_{a}^{\alpha}[f(x)] = \lim_{\alpha \to 0} D_{a}^{\alpha}[f(x)] = f(x); \quad \forall x \in [a, b]$$

PROPIEDAD 2.3.2.(Semigrupo o Ley de los exponentes) Sea $f \in L_1(a, b)$, entonces se cumple:

$$I_{a}^{\alpha} I_{a}^{\beta}[f(x)] = I_{a}^{\alpha+\beta}[f(x)]; \quad \forall x \in [a, b]$$

PRUEBA:

Para demostrar esta propiedad haremos uso del Teorema de Fubini.

$$I_{a}^{\alpha} I_{a}^{\beta}[f(x)] = I_{a}^{\alpha}\left(I_{a}^{\beta}[f(x)]\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} (x - z)^{\alpha-1} I_{a}^{\beta}[f(z)] dz$$

[25] Para la demostración de la propiedad 2.3.1. véase [11], por Quispe V. Pg. 36.

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-z)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^z (z-s)^{\beta-1} f(s)ds\right)dz$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x f(s)\left(\int_s^x (x-z)^{\alpha-1}(z-s)^{\beta-1}dz\right)ds$$

Haciendo $u = \frac{z-s}{x-s}$, entonces; $(x-s)u = z-s \;\Rightarrow\; (x-s)du = dz$

Además:

$$(x-s)^{\beta-1}u^{\beta-1} = (z-s)^{\beta-1} \quad \text{y} \quad (1-u)^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha-1} = (x-z)^{\alpha-1}$$

Sustituyendo estos resultados, tenemos:

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x f(s)\left(\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1}(x-s)^{\alpha+\beta-1}du\right)ds$$

$$= \frac{\mathcal{B}(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1}ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x f(s)(x-s)^{\alpha+\beta-1}ds$$

De donde se prueba que:

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta}[f(x)] = I_a^{\alpha+\beta}[f(x)]$$

PROPIEDAD 2.3.3. [26] Sea $f \in L_1(a,b)$, entonces se cumple:

$$D_a^{\alpha} I_a^{\alpha}[f(x)] = f(x); \quad \forall x \in [a,b]$$

Es decir; análogamente a lo que ocurre en el caso entero, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville es el operador inverso izquierdo de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

[26] Para la demostración de la Propiedad 2.3.3. véase [11], por Quispe V. Pg. 36.

PROPIEDAD 2.3.4. Sea $f \in L_1(a,b)$, entonces se cumple:

$$D_a^{\beta} I_a^{\alpha}[f(x)] = I_a^{\alpha-\beta}[f(x)]; \quad si \ \ (\alpha \geq \beta)$$

$$D_a^{\beta} I_a^{\alpha}[f(x)] = I_a^{\beta-\alpha}[f(x)]; \quad si \ \ (\alpha \leq \beta)$$

Para todo $x \in [a,b]$.

PROPIEDAD 2.3.5. Sea $f \in L_1(a,b)$ y $I_a^{n-\alpha}(f) \in AC^n[a,b]$, entonces se cumple:

$$I_a^{\alpha} D_a^{\alpha}[f(x)] = f(x) - \sum_{j=1}^{n} D_a^{\alpha-j}[f(a)] \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)} \quad \forall x \in [a,b]$$

La condición $I_a^{n-\alpha}[f(x)] \in AC^n[a,b]$ implica que existe la derivada fraccionaria de f de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ con $n-1 \leq \alpha < n$; $n \in \mathbb{Z}$ (sumable). Esta propiedad muestra que el operador de integración de Riemann-Liouville, de modo análogo al caso entero, no es en general el inverso izquierdo de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

PROPIEDAD 2.3.6. Sean $r \in \mathbb{N}$ y $f \in L_1(a,b)$ tales que $I_a^{\alpha}(f) \in AC^{r-1}[a,b]$, entonces se cumple:

$$D^r\left[I_a^{\alpha}[f(x)]\right] = I_a^{\alpha-r}[f(x)]; \quad si \ \ (r \leq n)$$

$$D^r\left[I_a^{\alpha}[f(x)]\right] = I_a^{r-\alpha}[f(x)]; \quad si \ \ (r > n)$$

Para todo $x \in [a,b]$.

PROPIEDAD 2.3.7. [27] Sean $r \in \mathbb{N}$ y $f \in L_1(a,b)$ tales que $I_a^{n-\alpha}(f) \in AC^{n+r-1}[a,b]$, entonces se cumple:

[27] Para la demostración de la propiedad 2.3.7. véase [13], por Vargas L. Pg. 13.

$$D_a^r\left[D_a^\alpha[f(x)]\right] = D_a^{\alpha+r}[f(x)]; \quad \forall x \in [a,b]$$

PROPIEDAD 2.3.8. Sean $r \in \mathbb{N}$ y $f \in AC^{n+r-1}[a,b]$, entonces se cumple:

$$D_a^\alpha\left[D_a^r[f(x)]\right] = D_a^{\alpha+r}[f(x)] - \sum_{j=1}^{r} D^{r-j}[f(a)]\frac{(x-a)^{-(j+\alpha)}}{\Gamma(1-j-\alpha)} \ ; \ \forall x \in [a,b]$$

PROPIEDAD 2.3.9. [28] Sean $f \in L_1(a,b)$ tal que $I_a^{m-\beta}(f) \in AC^{m-1}[a,b]$ y $I_a^{n-(\alpha+\beta)}(f) \in AC^{n-1}[a,b]$, si $(\alpha+\beta) < n$; ó $I_a^k(f) \in AC^{[\alpha+\beta]}[a,b]$, si $(\alpha+\beta) > n$, con "k" que es la parte decimal de $(\alpha+\beta)$ entonces se cumple:

$$D_a^\alpha\left[D_a^\beta[f(x)]\right] = D_a^{\alpha+\beta}[f(x)] - \sum_{j=1}^{m} D_a^{\beta-j}[f(a)]\frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)} \ ; \ \forall x \in [a,b]$$

En la expresión anterior observamos que en general no se cumple la propiedad de semigrupo para la derivada fraccionaria.

Las 2 propiedades que a continuación suceden, presentan las expresiones obtenidas al calcular la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de algunas funciones elementales, tales como las funciones constante y exponencial de la derivada clásica a la derivada fraccionaria de dichas funciones.

PROPIEDAD 2.3.10. [29] Si $\gamma > 0$ y $x > a$, se cumple las siguientes relaciones:

$a)$ $\quad I_a^\alpha(x-a)^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}(x-a)^{\gamma+\alpha-1}$

$b)$ $\quad D_a^\alpha(x-a)^{\gamma-1} = \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(x-a)^{\gamma-\alpha-1}$

---

[28] Para la demostración de la propiedad 2.3.9. véase [3], por Kilvas A. Pg. 75.

[29] Para la demostración de la Propiedad 2.3.10.véase [13], por Vargas L. Pg. 5 y [11], por Quispe V. Pg. 39.

CASOS PARTICULARES:

- Si: $\gamma = \alpha$, tenemos:

$$D_a^\alpha (x-a)^{\alpha-j} = 0, \quad (j = 1,2,\dots,n)$$

Esta expresión, significa que las funciones de la forma $(x-a)^{\alpha-j}$ con $(j = 1,2,\dots,n)$ desempeñan el mismo papel con respecto a la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, que el de la función constante con la derivada clásica.

- Si: $\gamma = 1$, tenemos:

$$D_a^\alpha (1) = \frac{1}{(x-a)^\alpha \Gamma(1-\alpha)}$$

Esta expresión significa que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, de una constante no nula, no es cero. Y se hace nula cuando $a \to -\infty$.

- Es importante también resaltar que la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, de una función $f(x) = 0\ \forall x \in [a,b]$, es cero. Es decir:

$${}^{RL}D_a^\alpha (0) = 0$$

PROPIEDAD 2.3.11. Si $f(x) = e^{\lambda x}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica que:

$$D_a^\alpha (e^{\lambda x}) = \frac{e^{\lambda a}}{(x-a)^\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda x - \lambda a)$$

Donde la función $E_{\alpha,\beta}(z)$, es la función especial de Mittag-Leffler.

La siguiente observación muestra que la propiedad de semigrupo para las derivadas fraccionarias no se cumplen en general. Esto es:

ESCOLIO:

- Sean $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}$. Teniendo en cuenta la propiedad 2.3.10 con $a = 0$, se tiene:

$$D^{\frac{1}{2}} f(x) = D^{\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = 0$$

Por lo tanto $D^{\frac{1}{2}}\left[D^{\frac{1}{2}} f(x)\right] = D^{\frac{1}{2}}[0] = 0$.

Por otra parte $D^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}[f(x)] = D[f(x)] = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

De donde se concluye en general que:

$$D^{\alpha} D^{\beta}[f(x)] \neq D^{\alpha+\beta}[f(x)]$$

- Sean $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{3}{2}$. Teniendo en cuenta la propiedad 2.3.10 con $a = 0$, se tiene:

$$D^{\frac{1}{2}} g(x) = D^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad y$$

$$D^{\frac{3}{2}} g(x) = D^{\frac{3}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = 0$$

De donde se puede deducir que:

$$D^{\frac{3}{2}}\left[D^{\frac{1}{2}} g(x)\right] = D^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} D^{\frac{3}{2}}(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-2\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$D^{\frac{1}{2}}\left[D^{\frac{3}{2}} g(x)\right] = D^{\frac{1}{2}}[0] = 0$$

$$D^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}[g(x)] = D^{2}[g(x)] = D^{2}\left[x^{\frac{1}{2}}\right] = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$$

De donde podemos concluir en general que:

$$D^{\alpha} D^{\beta}[f(x)] \neq D^{\beta} D^{\alpha}[f(x)] = D^{\alpha+\beta}[f(x)]$$

2.4. TRANSFORMADA DE LAPLACE Y DE FOURIER DE LAS DERIVADAS FRACCIONARIAS:

Primero presentaremos algunas notaciones importantes para la existencia de las transformadas de Laplace y de Fourier de las derivadas fraccionarias de Riemman-Liouville.

- Denotemos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^+)$, con $\mathbb{R}^+$, al espacio de las funciones continuas y exponenciales de orden $v > 0$, para las que existe la transformada de Laplace unidimensional.
- Dado $\alpha > 0$ con $n - 1 < \alpha \leq n$, denotemos al espacio de funciones por $\bar{\mathcal{L}} = {}^{RL}\mathcal{L}^{\alpha}\,(\mathbb{R}^+)$, para indicar los subespacios de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^+)$ de las funciones para las cuales existe la transformada de Laplace de sus derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville, al siguiente espacio de funcones:

$$\left\{f \in [C^{n-1}(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{L}(\mathbb{R}^+)] \,/\, D_0^{\alpha-k-1}\big(f(t)\big) \ \textit{es exponencial de orden} \right.$$
$$\left. v_k > 0, \qquad k = 0,1,\dots,n-1\right\}$$

- Denotemos por $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, al espacio de funciones para las cuales la transformada de Fourier unidimensional existe.
- Denotemos por $\mathcal{S}$ al espacio de Schwartz de las funciones infinitamente derivables en todo el eje real, las cuales, al igual que todas sus derivadas tienden a cero para $|x| \to +\infty$. Es decir:

$$\mathcal{S} = \left\{\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \,/\, \lim_{|x|\to\infty} x^n \varphi^{(m)}(x) = 0\right\}$$

  Para n y m enteros y no negativos arbitrarios.
- Además $C^{\infty}(\mathbb{R})$, denota el espacio de todas las funciones infinitamente derivables.
- Denotemos al espacio $\bar{\mathcal{S}}$, que contiene al espacio de Schwartz, definido por:

$$\bar{\mathcal{S}} = \left\{\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \,/\, \lim_{|x|\to\infty} \varphi^{(m)}(x) = 0\,, \qquad m = 0,1,2,\dots\right\}$$

En las cuales, es donde sobre este espacio se puede definir la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de Liouville de orden α, para todo $\alpha > 0$.

La siguiente propiedad define la transformada de Laplace de la derivada de orden entero "n"de una función, esto es:

PROPIEDAD 2.4.1. [30] Sea una función continua $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, con derivadas continuas hasta de orden "n", y talque $f^{(h)}(t)$ sea exponencial de orden v_h para todo $h = 0,1, \dots, n-1$. Entonces la Transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$ en el parámetro "s", está dada por:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st} f^{(n)}(t)dt = s^n \mathcal{L}\{f(t); s\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$$

$$\int_0^\infty e^{-st} f^{(n)}(t)dt = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$$

Para todo "s" con $Re(s) > m$ y

$$m = \max_{h=0,1,\dots,n-1} v_h$$

La siguiente propiedad presenta la Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville.

PROPIEDAD 2.4.2. [31] Dada la función $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^+)$, con $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$ y $f \in AC^{n-1}(\mathbb{R}^+)$, entonces la Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville $D_0^\alpha[f(t)]$, en el parámetro "s", está dada por:

[30] Para la demostración de la Propiedad 2.4.1.véase [11], por Quispe V. Pg. 23.
[31] Para la demostración de la Propiedad 2.4.2.véase [11], por Quispe V. Pg. 45.

$$\mathcal{L}\{D_0^{\alpha}[f(t)];s\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\left[D_0^{\alpha}\big(f(t)\big)\right]dt=s^{\alpha}\mathcal{L}\{f(t);s\}-\sum_{k=0}^{n-1}s^k\left[D_0^{\alpha-k-1}\big(f(0)\big)\right]$$

$$=s^{\alpha}F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^k\left[D_0^{\alpha-k-1}\big(f(0)\big)\right]$$

Siempre que $D_0^{\alpha-k-1}[f(t)]$ sea exponencial de orden $v_k>0$ para todo $k=0,1,\dots,n-1$ y $Re(s)>m$, con

$$m=\max_{k=0,1,\dots,n-1}v_k$$

PROPIEDAD 2.4.3.: Dada la función $f\in\bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$, $\alpha>0$, $n-1<\alpha\leq n$, entonces la Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville con respecto a "t" ${}_0D_t^{\alpha}[f(t,x)]$, en el parámetro "s", está dada por:

$$\int_0^{\infty}e^{-st}\left[{}_0D_t^{\alpha}[f(t,x)]\right]dt=s^{\alpha}\mathcal{L}\{f(t,x);s\}-\sum_{k=0}^{n-1}s^k\left[{}_0D_t^{\alpha-k-1}[f(0,x)]\right]\quad(2.9)$$

CASOS PARTICULARES:

- En la propiedad anterior, si $k=n-1$, entonces resulta $\alpha-n<0$, pues $n-1<\alpha\leq n$ y por lo tanto se deduce que:

  $$D_0^{\alpha-n}=I_0^{n-\alpha}$$

  Es decir esta condición inicial es proporcionada por el valor de la integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orden "$n-\alpha$" de la función f, calculada para $t=0$.

- Si $n=1$, es decir: $0<\alpha\leq 1$, entonces

  $$\int_0^{\infty}e^{-st}\left[D_0^{\alpha}\big(f(t)\big)\right]dt=s^{\alpha}F(s)-D_0^{\alpha-1}\big(f(0)\big)$$

  Y cuya generalización está dada por:

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[\ {}_0D_t^\alpha[f(t,x)]\right]dt = s^\alpha \mathcal{L}\{f(t,x);s\} - \ {}_0D_t^{\alpha-1}[f(0,x)] \quad (2.10)$$

- Si $n = 2$, es decir: $1 < \alpha \leq 2$, entonces

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[D_0^\alpha\big(f(t)\big)\right]dt = s^\alpha F(s) - \left\{s^0\left[D_0^{\alpha-1}\big(f(0)\big)\right] + s^1\left[D_0^{\alpha-1-1}\big(f(0)\big)\right]\right\}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[D_0^\alpha\big(f(t)\big)\right]dt = s^\alpha F(s) - \left[D_0^{\alpha-1}\big(f(0)\big)\right] - s\left[D_0^{\alpha-2}\big(f(0)\big)\right]$$

Y cuya generalización está dada por:

$$\int_0^\infty e^{-st}\left[\ {}_0D_t^\alpha[f(t,x)]\right]dt =$$

$$= s^\alpha \mathcal{L}\{f(t,x);s\} - \left[\ {}_0D_t^{\alpha-1}[f(0,x)]\right] - s\left[\ {}_0D_t^{\alpha-2}[f(0,x)]\right] \quad (2.11)$$

La siguiente propiedad muestra la transformada de Fourier de la derivada de orden entero de una función.

PROPIEDAD 2.4.4 Dada la función derivable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con derivada continua hasta el orden "n" talque:[32]

$$\lim_{|x|\to\infty} f^{(h)}(x) = 0\,, \qquad h = 0,1,\dots,n-1$$

Entonces, la transformada de Fourier de la derivada de orden entero "n" $f^{(n)}(x)$, en el parámetro "k", está dada por:

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x);k\} = (-ik)^n\,\mathcal{F}\{f(x);k\} = (-ik)^n\,F(k)$$

La siguiente propiedad muestra la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de Liouville. Esto es:

[32] Para la demostración de la Propiedad 2.4.4.véase [2], por Hwei P. Hsu. Pg. 116.

PROPIEDAD 2.4.5. Dada una función $f \in C^{n-1}(\mathbb{R})$, con $\alpha > 0,\ n-1 < \alpha \leq n$, tales que:

$$\lim_{|x|\to\infty} f^{(h)}(x) = 0\,, \quad h = 0,1,\dots,n-1$$

Entonces, la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de Liouville ${}^{L}D_{+}^{\alpha}\big(f(x)\big)$, en el parámetro "$k$", está dada por:

$$\mathcal{F}\{\ {}^{L}D_{+}^{\alpha}\big(f(x)\big); k\} = (-ik)^{\alpha}\,\mathcal{F}\{f(x); k\} = (-ik)^{\alpha}\,F(k)$$

PROPIEDAD 2.4.6. Dada una función $f: \mathbb{R}^{+}\mathrm{x}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\iint |f(t,x)|dxdt < \infty$, con $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$, tales que:

$$\lim_{|x|\to\infty} f_{x}^{(h)}(t,x) = 0\,, \quad h = 0,1,\dots,n-1$$

Entonces, la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de Liouville con respecto a "x" ${}_{-\infty}^{\ L}D_{x}^{\alpha}[f(t,x)]$, en el parámetro "$k$", está dada por:

$$\mathcal{F}\{\ {}_{-\infty}^{\ L}D_{x}^{\alpha}[f(t,x)]; k\} = (-ik)^{\alpha}\,\mathcal{F}\{f(t,x); k\} \tag{2.12}$$

2.5. FUNCIONES ESPECIALES ASOCIADAS AL CÁLCULO FRACCIONARIO.

2.5.1. FUNCION MITTAG – LEFFLER EN UN PARAMETRO.[33]

La función exponencial e^{z}, juega un rol muy importante en la teoría de las ecuaciones diferenciales de orden entero. Cuya generalización esta descrita mediante la función de un parámetro, mediante la relación.

33 Véase los Likns. 3) y 4).

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}$$

Para $\alpha > 0,\ \ z \in \mathbb{C}$. Esta función fue introducida por G.M. Mittag – Leffler y sido también estudiada por A. Wiman.

Por supuesto cuando $\alpha = 1$, esta expresión se transforma en la muy conocida función exponencial e^z. Esto es:

$$E_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j + 1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(\mathrm{j})!} = e^z \qquad (2.13)$$

2.5.2. FUNCION MITTAG – LEFFLER EN DOS PARAMETROS.

La función Mittag – Leffler juega un rol muy importante en el cálculo fraccionario, esta función fue introducida por Agarwal. Un gran número de relaciones para esta función fueron obtenidas por Humbert y Agarwal, usando la técnica de la transformada de Laplace. Esta función tendría que ser llamada la función de Agarwal; sin embargo Humbert y Agarwal generosamente usaron y cedieron la misma notación como para la función de Mittag – Leffler en un parámetro y que es la razón que ahora la función de dos parámetros es también llamada la función de Mittag – Leffler. La cual es definida por Agarwal en 1953, en donde propuso una generalización de la función de Mittag – Leffler sustituyendo la constante 1 en el argumento de la función Gamma, por un nuevo parámetro β. Esto es:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \quad con \quad \alpha > 0,\ \ \beta > 0 \qquad (2.14)$$

2.5.3 ALGUNAS RELACIONES IMPORTANTES REFERIDAS A LA FUNCION MITTAG – LEFFLER.

- Para $\beta = 1$, obtenemos la función Mittag – Leffler en un parámetro. Esto es:

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$$

- Para $\alpha = 1, \beta = m$ y enteros $m \geq 2$, Obtenemos:

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}}\left[e^{z} - \sum_{j=0}^{m-2} \frac{z^{j}}{(\mathrm{j})!}\right]$$

- Para $\alpha = 2, \beta = 1$. Obtenemos:

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z^2)^j}{\Gamma(2j+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2\mathrm{j})!} = cosh(z) \qquad (2.15)$$

Donde $cosh(z)$, representa el coseno hiperbólico.

- Para $\alpha = 2, \beta = 2$. Obtenemos:

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z^2)^j}{\Gamma(2j+2)} = \frac{1}{z}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{(2\mathrm{j}+1)!} = \frac{senh(z)}{z} \qquad (2.16)$$

Donde $senh(z)$, representa el seno hiperbólico.

- Para $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$. Obtenemos:

$$E_{\frac{1}{2},1}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma\left(\frac{j}{2}+1\right)} = e^{z^2} erfc(-z)$$

Donde $erfc(z)$, es la función complementar error, la cual está definida por:

$$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

Además $erfc(z) = 1 - erf(z)$, en donde:

$$erf(z) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{z} e^{-t^2} dt$$

Es denominada como función error.

- Para $\alpha > 0, \beta > 0$ y enteros $m \geq 1, n \geq 0$. Obtenemos:

$$E_{2\alpha,\beta}(z^2) = \frac{1}{2}\left[E_{\alpha,\beta}(z) + E_{\alpha,\beta}(-z)\right]$$

Denominada formula de duplicación.

2.6. TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA FUNCION MITTAG – LEFFLER EN DOS PARAMETROS.

Como se expuso la función de Mittag - Leffler en dos parámetros $E_{\alpha,\beta}(z)$, es una generalización de la función Mittag - Leffler en un parámetro $E_{\alpha}(z)$, y esta a su vez es la generalización de la función exponencial e^z.

En primer lugar demostraremos que se verifica:

$$\mathcal{L}\{t^k e^{at}, s\} = \int_0^\infty e^{-st}(t^k e^{at})dt = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}} \quad Re(s) > |a| \qquad (2.17)$$

Que representa la transformada de Laplace de la función $t^k e^{at}$, la cual nos ayudara a obtener la relación existente entre la transformada de Laplace y la función de Mittag - Leffler en dos parámetros.

En efecto:

Previamente teniendo en cuenta que se cumple la siguiente relación:[34]

$$\int_0^\infty e^{-t} e^{at} dt = \frac{1}{1-a} \quad |a| < 1$$

Luego aplicando la derivada a ambos miembros de la ecuación anterior, con respecto al valor de “a”, k – veces se tiene:

[34] Ver [7], por Murray S. Pg. 11.

$$\frac{d^k}{da^k}\left(\int_0^\infty e^{-t}e^{at}dt\right) = \frac{d^k}{da^k}\left(\frac{1}{1-a}\right) \quad |a| < 1$$

$$\int_0^\infty e^{-t}t^k e^{at}dt = \frac{k!}{(1-a)^{k+1}} \quad |a| < 1$$

Teniendo en cuenta la relación anterior, obtenemos la transformada de Laplace de la función $t^k e^{at}$. Esto es:

$$\mathcal{L}\{t^k e^{at}, s\} = \int_0^\infty e^{-st}(t^k e^{at})dt = \frac{k!}{(s-a)^{k+1}} \quad Re(s) > |a| \tag{2.18}$$

Ahora con estas referencias, demostraremos la relación existente entre la transformada de Laplace y la función de Mittag - Leffler en dos parámetros dada por la relación:

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^\alpha), s\right\} = \frac{k!\, s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}} \quad Re(s) > |a|^{1/\alpha} \tag{2.19}$$

Donde $t > 0$, "a" es una constante y

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}E_{\alpha,\beta}(x)$$

La cual es base fundamental para demostrar los teoremas de la ecuación de calor y de onda fraccionaria, que es tema de estudio del presente trabajo.

En efecto:

En primer lugar demostremos que se verifica la relación dada por:

$$\sum_{j=0}^{\infty}(a)^j s^{-\alpha j-\beta} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a} \tag{2.20}$$

Siempre que: $|a| < |s^\alpha|$.

Esto es:

$$\sum_{j=0}^{\infty}(a)^j s^{-\alpha j-\beta} = s^{-\beta}\sum_{j=0}^{\infty}(a)^j s^{-\alpha j}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(a)^j s^{-\alpha j-\beta} = s^{-\beta}\left[1+\frac{(a)^1}{s^{\alpha}}+\frac{(a)^2}{s^{2\alpha}}+\frac{(a)^3}{s^{3\alpha}}+\cdots\right] \tag{2.21}$$

Sea

$$U = \left[1+\frac{(a)^1}{s^{\alpha}}+\frac{(a)^2}{s^{2\alpha}}+\frac{(a)^3}{s^{3\alpha}}+\cdots\right] =$$

$$U = \left[1+\frac{(a)^1}{s^{\alpha}}\left(1+\frac{(a)^1}{s^{\alpha}}+\frac{(a)^2}{s^{2\alpha}}+\cdots\right)\right] = \left[1+\frac{(a)^1}{s^{\alpha}}(U)\right]$$

$$U-\frac{(a)^1}{s^{\alpha}}(U) = 1$$

$$U = \left(\frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha}-a}\right) \tag{2.22}$$

Sustituyendo esta última expresión, finalmente se verifica que:

$$\sum_{j=0}^{\infty}(a)^j s^{-\alpha j-\beta} = s^{-\beta}\left(\frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha}-a}\right) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a}$$

Siempre que: $|a| < |s^{\alpha}|$.

Ahora en segundo lugar, aplicando la transformada inversa de Laplace en el parámetro "t", tenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a};t\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(a)^{j}s^{-\alpha j-\beta}\,;t\right\}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}(a)^{j}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-\alpha j-\beta};t\right\}=\sum_{j=0}^{\infty}(a)^{j}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha j+\beta}};t\right\}=\sum_{j=0}^{\infty}(a)^{j}\,\frac{t^{\alpha j+\beta-1}}{\Gamma(\alpha j+\beta)}$$

Puesto que se cumple que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{p}};t\right\}=\frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)}\quad Re(s)>0,\qquad Re(p)>0$$

En donde se obtiene una relación importante dada por:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a};t\right\}=t^{\beta-1}\sum_{j=0}^{\infty}(a)^{j}\,\frac{t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j+\beta)}=t^{\beta-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(at^{\alpha})^{j}}{\Gamma(\alpha j+\beta)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a};t\right\}=t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})\tag{2.23}$$

Ahora en tercer lugar, aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la última expresión, obtenemos:

$$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a}=\mathcal{L}\left\{t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha});s\right\}=\int_{0}^{\infty}e^{-st}\left(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})\right)dt$$

$$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a}=\int_{0}^{\infty}e^{-st}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})dt\tag{2.24}$$

Donde: $s,\alpha,\beta\in\mathbb{C}, Re(\alpha)>0, Re(\beta)>0,\ |a|<|s^{\alpha}|$

Finalmente aplicando la derivada a ambos miembros de la ecuación anterior, con respecto al valor de "a", k – veces, análogamente como se hizo al empezar la presente sección, tenemos:

$$\frac{d^k}{da^k}\left(\int_0^\infty e^{-st}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)dt\right) = \frac{d^k}{da^k}\left(\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-st}t^{\beta-1}\frac{d^k}{da^k}\left[E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)\right]dt = s^{\alpha-\beta}\frac{d^k}{da^k}\left(\frac{1}{s^\alpha - a}\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-st}t^{\beta-1}\left[E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^\alpha)\right]t^{\alpha k}dt = \frac{k!\, s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}}$$

$$\int_0^\infty e^{-st}t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^\alpha)dt = \frac{k!\, s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}}$$

De donde finalmente tenemos la relación existente entre la transformada de Laplace y la función de Mittag - Leffler en dos parámetros dada por la relación:

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha k+\beta-1}E_{\alpha,\beta}^{(k)}(at^\alpha), s\right\} = \frac{k!\, s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}} \quad Re(s) > |a|^{1/\alpha}$$

Donde $t > 0$, “a” es una constante y

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}E_{\alpha,\beta}(x)$$

CAPITULO III

TEOREMAS DE LA ECUACION DE CALOR Y DE ONDA FRACCIONARIA CON DERIVADAS DE RIEMANN-LIOUVILLE

3.1. ECUACION DE CALOR ESTANDAR:

El problema de conducción de calor fue planteado por el matemático francés Joseph Fourier en su libro teoría analítica de calor en 1808. En dicho libro establece la ecuación de la conducción de calor, descrita por:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = K\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \qquad 0 \le x \le 1, \qquad t \ge 0$$

Donde K es una constante que depende del material considerado, denominada constante de difusividad térmica.

Cuando se plantea el problema de calor, se busca una función $u(t,x)$ que satisfaga la ecuación anterior, bajo algunas condiciones iniciales y de frontera, que corresponde a una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo parabólico.

Así consideremos la ecuación de Calor, dada por:[35]

$$D_t u(t,x) = \lambda^2 D_x^2 u(t,x) \tag{3.1}$$

O denota también en la forma:

$$u_t(t,x) = \lambda^2 u_{xx}(t,x)$$

Bajo las condiciones iniciales:

---

[35] Ver [9], por Pierantozzi T. Pg. 53.

$$u(0,x) = f(x) \quad y \tag{3.2}$$

$$\operatorname*{Lim}_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0; \quad \operatorname*{Lim}_{x\to\pm\infty} u_x(t,x) = 0; \;\; para\, t > 0$$

Donde λ^2 denota el coeficiente de difusión, que es una constante positiva que depende del material sobre el cual se difunde el calor, este material puede ser un sólido o líquido.

Para la solución de esta ecuación de calor se puede resolver mediante el método denominado "separación de variables", pero la solución se mostrará mediante el método de las transformadas Fourier, en efecto:

Primero aplicando la transformada de Fourier a las derivadas $u_t(t,x)$ y $u_{xx}(t,x)$ con respecto a la variable "x", en el parámetro "k", esto es:

$$\mathcal{F}\{u_{xx}(t,x);k\} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(t,x)e^{ikx}dx$$

Mediante integrales parciales sucesivas y teniendo en cuenta las condiciones iniciales se obtiene:

$$= \operatorname*{Lim}_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} u_{xx}(t,x)e^{ikx}dx = \operatorname*{Lim}_{x\to\infty}\left[\left[u_x(t,x)e^{ikx}\right]_{-x}^{x} - ik\int_{-x}^{x} u_x(t,x)e^{ikx}dx\right]$$

$$= -ik \operatorname*{Lim}_{x\to\infty}\left[\int_{-x}^{x} u_x(t,x)e^{ikx}dx\right]$$

$$= -ik \operatorname*{Lim}_{x\to\infty}\left[\left[u(t,x)e^{ikx}\right]_{-x}^{x} - ik\int_{-x}^{x} u(t,x)e^{ikx}dx\right]$$

$$= -k^2\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{ikx}dx = -k^2\mathcal{F}\{u(t,x);k\}$$

Es decir:

$$\mathcal{F}\{u_{xx}(t,x);k\} = -k^2\mathcal{F}\{u(t,x);k\} = -k^2U(t,k) \tag{3.3}$$

Por otra parte:

$$\mathcal{F}\{u_t(t,x);k\} = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t,x)e^{ikx}dx$$

$$\mathcal{F}\{u_t(t,x);k\} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{ikx}dx = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\{u(t,x);k\} = \frac{\partial}{\partial t}U(t,k)$$

Es decir:

$$\mathcal{F}\{u_t(t,x);k\} = U_t(t,k) \tag{3.4}$$

Luego aplicando la transformada de Fourier a la ecuación de calor (3.1), con respecto a la variable "x", en el parámetro "k", se tiene:

$$\mathcal{F}\{u_t(t,x);k\} = \lambda^2\mathcal{F}\{u_{xx}(t,x);k\} \tag{3.5}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.3) y (3.4) en la ecuación (3.5), tenemos:

$$U_t(t,k) = -\lambda^2k^2U(t,k)$$

$$U_t(t,k) + \lambda^2k^2U(t,k) = 0$$

Luego el polinomio característico asociado a la ecuación diferencial anterior está dada por:

$$r + \lambda^2k^2 = 0$$

De donde:

$$r = -\lambda^2k^2$$

Luego la solución general viene dada por:

$$U(t,k) = A(k)e^{-\lambda^2k^2t} \tag{3.6}$$

Donde $A(k)$ es una constante con respecto a "k"

Aplicando la transformada de Fourier a la condición inicial $u(0,x) = f(x)$, tenemos:

$$\mathcal{F}\{u(0,x);k\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(0,x)e^{ikx}dx$$

$$\mathcal{F}\{u(0,x);k\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx = F(k)$$

Es decir:

$$U(0,k) = F(k)$$

De donde se obtiene:

$$U(0,k) = A(k) = F(k) \tag{3.7}$$

Sustituyendo la ecuación (3.7) en (3.6), obtenemos

$$U(t,k) = F(k)e^{-\lambda^2 k^2 t}$$

Aplicando la transformada Inversa de Fourier con respecto a la variable "x", tenemos:

$$\mathcal{F}^{-1}\{U(t,k);x\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{F(k)e^{-\lambda^2 k^2 t};x\right\}$$

Así tenemos la solución general de la ecuación de calor, dada por:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-\lambda^2 k^2 t}e^{-ikx}dk \tag{3.8}$$

3.2. ECUACION DE ONDA ESTANDAR:

Otra de las ecuaciones fundamentales de la física es la ecuación de Onda, dada por:

$$D_t^2 u(t,x) = \lambda^2 D_x^2 u(t,x) \tag{3.9}$$

O denota también en la forma:

$$u_{tt}(t,x) = \lambda^2 u_{xx}(t,x)$$

Bajo las condiciones iniciales:

$$u(0,x) = g(x) \quad D_t u(0,x) = f(x) \quad y \tag{3.10}$$

$$\operatorname*{Lim}_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0; \quad \operatorname*{Lim}_{x\to\pm\infty} u_x(t,x) = 0; \;\; para\, t > 0$$

Donde λ denota la velocidad de ondas y $u(t,x)$ la desviación longitudinal de la cuerda del eje x, en un tiempo determinado t. Esta ecuación corresponde a una ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo hiperbólico.

Para la solución de esta ecuación de onda se puede resolver mediante el método denominado "separación de variables", pero la solución se mostrará mediante el método de las transformadas Fourier, en efecto:

Primero aplicaremos la transformada de Fourier a las derivadas $u_{tt}(t,x)$ y $u_{xx}(t,x)$ con respecto a la variable "x", en el parámetro "k", esto es:

$$\mathcal{F}\{u_{xx}(t,x);k\} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(t,x)e^{ikx}dx$$

Mediante integrales parciales sucesivas y teniendo en cuenta las condiciones iniciales se obtiene:

$$= \operatorname*{Lim}_{x\to\infty}\int_{-x}^{x} u_{xx}(t,x)e^{ikx}dx = \operatorname*{Lim}_{x\to\infty}\left[\left[u_x(t,x)e^{ikx}\right]_{-x}^{x} - ik\int_{-x}^{x} u_x(t,x)e^{ikx}dx\right]$$

$$\mathcal{F}\{u_{xx}(t,x);k\} = -ik\operatorname*{Lim}_{x\to\infty}\left[\int_{-x}^{x} u_x(t,x)e^{ikx}dx\right]$$

$$= -ik\operatorname*{Lim}_{x\to\infty}\left[\left[u(t,x)e^{ikx}\right]_{-x}^{x} - ik\int_{-x}^{x} u(t,x)e^{ikx}dx\right]$$

$$= -k^2\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{ikx}dx = -k^2\mathcal{F}\{u(t,x);k\}$$

Es decir:

$$\mathcal{F}\{u_{xx}(t,x);k\} = -k^2\mathcal{F}\{u(t,x);k\} = -k^2U(t,k) \tag{3.11}$$

Por otra parte:

$$\mathcal{F}\{u_{tt}(t,x);k\} = \int_{-\infty}^{\infty} u_{tt}(t,x)e^{ikx}dx$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{ikx}dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}\{u(t,x);k\} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}U(t,k)$$

Es decir:

$$\mathcal{F}\{u_{tt}(t,x);k\} = U_{tt}(t,k) \tag{3.12}$$

Luego aplicando la transformada de Fourier a la ecuación de onda, con respecto a la variable "x", en el parámetro "k", se tiene:

$$\mathcal{F}\{u_{tt}(t,x);k\} = \lambda^2\mathcal{F}\{u_{xx}(t,x);k\} \tag{3.13}$$

Luego sustituyendo las transformadas (3.11) y (3.12) en (3.13), tenemos:

$$U_{tt}(t,k) = -\lambda^2k^2U(t,k)$$

$$U_{tt}(t,k)+\lambda^2k^2U(t,k)=0$$

Luego el polinomio característico asociado a la ecuación diferencial anterior está dada por:

$$r^2+\lambda^2k^2=0$$

De donde:

$$r=\pm i\lambda k$$

Luego la solución general viene dada por:

$$U(t,k)=A(k)e^{i\lambda kt}+B(k)e^{-i\lambda kt} \tag{3.14}$$

Donde $A(k)$ y $B(k)$ son constantes con respecto a "k"

Aplicando la transformada de Fourier a las condiciones iniciales $u(0,x)=g(x)$ y $D_tu(0,x)=u_t(0,x)=f(x)$, tenemos:

$$\mathcal{F}\{u(0,x);k\}=\int_{-\infty}^{\infty}u(0,x)e^{ikx}dx$$

$$\mathcal{F}\{u(0,x);k\}=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{ikx}dx=G(k)$$

Es decir:

$$U(0,k)=G(k) \tag{3.15}$$

Y por otra parte

$$\mathcal{F}\{u_t(0,x);k\}=\int_{-\infty}^{\infty}u_t(0,x)e^{ikx}dx$$

$$\mathcal{F}\{u_t(0,x);k\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ikx}dx=F(k)$$

Es decir:

$$U_t(0,k) = F(k) \tag{3.16}$$

Haciendo $t = 0$, en la ecuación (3.14) y teniendo en cuenta la relación (3.15), tenemos:

$$U(0,k) = A(k) + B(k) = G(k) \tag{3.17}$$

Derivando la ecuación (3.14) con respecto a "t", tenemos:

$$U_t(t,k) = i\lambda kA(k)e^{i\lambda kt} - i\lambda kB(k)e^{-i\lambda kt}$$

Haciendo $t = 0$ y teniendo en cuenta la relación (3.16), tenemos:

$$U_t(0,k) = i\lambda kA(k) - i\lambda kB(k)$$

$$F(k) = i\lambda k[A(k) - B(k)] \tag{3.18}$$

Así de las ecuaciones (3.17) y (3.18), tenemos las ecuaciones:

$$A(k) = \frac{G(k)}{2} + \frac{F(k)}{2i\lambda k}$$

$$B(k) = \frac{G(k)}{2} - \frac{F(k)}{2i\lambda k} \tag{3.19}$$

Luego sustituyendo estos valores (3.19) en la solución general

$$U(t,k) = A(k)e^{i\lambda kt} + B(k)e^{-i\lambda kt}$$

Tenemos:

$$U(t,k) = \left[\frac{G(k)}{2} + \frac{F(k)}{2i\lambda k}\right]e^{i\lambda kt} + \left[\frac{G(k)}{2} - \frac{F(k)}{2i\lambda k}\right]e^{-i\lambda kt}$$

$$U(t,k) = G(k)\left(\frac{e^{i\lambda kt} + e^{-i\lambda kt}}{2}\right) + \frac{F(k)}{i\lambda k}\left(\frac{e^{i\lambda kt} - e^{-i\lambda kt}}{2}\right)$$

$$U(t,k) = G(k)Cos\ h[i\lambda kt] + \frac{F(k)}{i\lambda k} Sen\ h[i\lambda kt]$$

Aplicando la transformada Inversa de Fourier con respecto a la variable “x”, tenemos:

$$\mathcal{F}^{-1}\{U(t,k);x\} = \mathcal{F}^{-1}\{G(k)Cos\ h[i\lambda kt];x\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{F(k)}{i\lambda k} Sen\ h[i\lambda kt];x\right\}$$

Así tenemos la solución general de la ecuación de onda, dada por:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(k)Cos\ h[i\lambda kt]e^{-ikx}dk +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{i\lambda k} Sen\ h[i\lambda kt]e^{-ikx}dk \qquad (3.20)$$

3.3. TEOREMAS DE LA ECUACION DE CALOR Y DE ONDA DE ORDEN FRACCIONAL:

En la presente sección se demostrara el teorema de la ecuación de onda de orden fraccional con derivadas de Riemman – Liouville, que es una generalización de la ecuación de onda estándar descrita en la sección anterior.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial parcial de orden fraccional, descrita por:

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)] = \lambda^2 \, {}_{-\infty}^{L}D_x^{\beta}[u(t,x)] \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \lambda^2 \in \mathbb{R}^+ \tag{3.21} $$

Con condiciones iniciales:

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-1}[u(0,x)] = f(x),\ x \in \mathbb{R}; \quad \operatorname*{Lim}_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0,\ t > 0 \tag{3.22} $$

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-2}[u(0,x)] = g(x),\ x \in \mathbb{R} \tag{3.23} $$

Con $0 < \alpha \leq 2, \beta > 0$ y en donde ${}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)]$, denota la derivada parcial fraccionaria de Riemman – Liouville definida en (DEF. 2.1.6) y ${}_{-\infty}^{L}D_x^{\beta}[u(t,x)]$ denota la derivada parcial fraccionaria de Liouville definida en (DEF. 2.2.4).

Ahora mostraremos la solución de la ecuación diferencial parcial descrita por (3.21) bajo las condiciones (3.22) y (3.23), para lo cual presentaremos dos casos.

El primer teorema muestra la solución cuando $0 < \alpha \leq 1$ y el segundo teorema cuando $1 < \alpha \leq 2$. En efecto:

TEOREMA 3.1: Dada la función $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $u(t,x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$. La solución de la ecuación diferencial parcial de orden fraccional

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)] = \lambda^2 \, {}_{-\infty}^{\;L}D_x^{\beta}[u(t,x)], \;\; t > 0, x \in \mathbb{R}, \lambda^2 \in \mathbb{R}^+ \qquad (3.24) $$

Con condiciones iniciales:

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-1}[u(0,x)] = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0, t > 0 \qquad (3.25) $$

Esta dada por:

$$ u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda^2(-ik)^{\beta}t^{\alpha}\right]F(k)e^{-ikx}dk \qquad (3.26) $$

Donde $0 < \alpha \leq 1, \beta > 0$ y $F(k) = \mathcal{F}\{f(x); k\}$. Siempre que la integral exista.

DEMOSTRACIÓN:

Aplicando la transformada de Laplace en el parámetro "s" con respecto a la variable "t" definida en la (Sección 1.2.3.5.), a la ecuación (3.24), tenemos:

$$ \mathcal{L}\{{}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)];\ s\} = \mathcal{L}\left\{\lambda^2 \, {}_{-\infty}^{\;L}D_x^{\beta}[u(t,x)];\ s\right\} $$

$$ \int_0^{\infty} e^{-st} \, {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)]dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\lambda^2 \, {}_{-\infty}^{\;L}D_x^{\beta}[u(t,x)]dt $$

Aplicando la propiedad de la transformada de la Laplace de la derivada fraccionaria de Riemman – Liouville (Propiedad. 2.4.3) con $0 < \alpha \leq 1$, en el lado izquierdo de la ecuación anterior y teniendo en cuenta que en el lado derecho tenemos una derivada fraccionaria con respecto a "x", así se tiene:

$$ s^{\alpha}\mathcal{L}\{u(t,x); s\} - \{{}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-1}[u(0,x)]\} = \lambda^2 \, {}_{-\infty}^{\;L}D_x^{\beta}\left[\int_0^{\infty} e^{-st}u(t,x)dt\right] $$

$$s^{\alpha}\mathcal{L}\{u(t,x);s\} - \{{}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-1}[u(0,x)]\} = \lambda^2 {}_{-\infty}^{\;\,L}D_x^{\beta}[\mathcal{L}\{u(t,x);s\}]$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales (3.25) del problema, tenemos:

$$s^{\alpha}\mathcal{L}\{u(t,x);s\} - f(x) = \lambda^2 {}_{-\infty}^{\;\,L}D_x^{\beta}[\mathcal{L}\{u(t,x);s\}]$$

Aplicando la trasformada de Fourier con respecto a la variable “x” en el parámetro “k”, definida en la (Sección 1.2.3.6.), así tenemos:

$$\mathcal{F}\{s^{\alpha}\mathcal{L}\{u(t,x);s\};k\} - \mathcal{F}\{f(x);k\} = \mathcal{F}\left\{\lambda^2 {}_{-\infty}^{\;\,L}D_x^{\beta}[\mathcal{L}\{u(t,x);s\}];k\right\}$$

$$s^{\alpha}\mathcal{F}\{\mathcal{L}\{u(t,x);s\};k\} - F(k) = \lambda^2\mathcal{F}\left\{{}_{-\infty}^{\;\,L}D_x^{\beta}[\mathcal{L}\{u(t,x);s\}];k\right\}$$

Ahora aplicando la propiedad de la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de Liouville (Propiedad 2.4.6), tenemos:

$$s^{\alpha}\mathcal{F}\{\mathcal{L}\{u(t,x);s\};k\} - F(k) = \lambda^2(-ik)^{\beta}\mathcal{F}\{\mathcal{L}\{u(t,x);s\};k\}$$

De donde:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{L}\{u(t,x);s\};k\} = \frac{F(k)}{s^{\alpha} - \lambda^2(-ik)^{\beta}}$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier definida en la (Sección 1.2.3.6), obtenemos:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathcal{L}\{u(t,x);s\};k\};x\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{F(k)}{s^{\alpha} - \lambda^2(-ik)^{\beta}};x\right\}$$

$$\mathcal{L}\{u(t,x);s\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\,\frac{F(k)}{s^{\alpha} - \lambda^2(-ik)^{\beta}}\,dk$$

Ahora aplicando la transformada inversa de Laplace definida en la (Sección 1.2.3.5), obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{u(t,x);s\};t\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\,\frac{F(k)}{s^{\alpha}-\lambda^{2}(-ik)^{\beta}}\,dk;t\right\}$$

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha}-\lambda^{2}(-ik)^{\beta}};t\right\}F(k)e^{-ikx}dk$$

Y finalmente teniendo en cuenta la transformada de Laplace de la función Mitagg – Leffler en dos parámetros, descrita en la sección (2.6), tenemos:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda^{2}(-ik)^{\beta}t^{\alpha}\right]F(k)e^{-ikx}dk$$

TEOREMA 3.2: Dadas las funciones $f,g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ y $u(t,x) \in \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathcal{S}}$. La solución de la ecuación diferencial parcial de orden fraccional

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)] = \lambda^{2}\,{}_{-\infty}^{\;\;L}D_x^{\beta}[u(t,x)] \quad t>0, x\in\mathbb{R}, \lambda^{2}\in\mathbb{R}^{+} \qquad (3.27)$$

Con condiciones iniciales:

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-1}[u(0,x)] = f(x), \qquad x\in\mathbb{R}; \quad \lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0, t>0 \qquad (3.28)$$

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-2}[u(0,x)] = g(x), \qquad x\in\mathbb{R}$$

Esta dada por:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left[\lambda^{2}(-ik)^{\beta}t^{\alpha}\right]G(k)e^{-ikx}dk +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda^{2}(-ik)^{\beta}t^{\alpha}\right]F(k)e^{-ikx}dk \qquad (3.29)$$

Donde $1<\alpha\leq 2, \beta>0$ y $F(k)=\mathcal{F}\{f(x);k\}$, $G(k)=\mathcal{F}\{g(x);k\}$. Siempre que las integrales existan.

DEMOSTRACION:

Aplicando la transformada de Laplace en el parámetro “s” con respecto a la variable “t” definida en la (Sección 1.2.3.5.), a la ecuación (3.27), tenemos:

$$\mathcal{L}\{{}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)];\ s\} = \mathcal{L}\left\{\lambda^2\,{}_{-\infty}^{\ L}D_x^{\beta}[u(t,x)];\ s\right\}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,{}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)]dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\lambda^2\,{}_{-\infty}^{\ L}D_x^{\beta}[u(t,x)]dt$$

Aplicando la propiedad de la transformada de la Laplace de la derivada fraccionaria de Riemman – Liouville (Propiedad 2.4.3) con $1 < \alpha \leq 2$, en el lado izquierdo de la ecuación anterior y teniendo en cuenta que en el lado derecho tenemos una derivada fraccionaria con respecto a ”x”, así se tiene:

$$s^{\alpha}\mathcal{L}\{u(t,x);s\} - \{{}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-1}[u(0,x)] + s^1\,{}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-2}[u(0,x)]\} = \lambda^2\,{}_{-\infty}^{\ L}D_x^{\beta}\left[\int_0^{\infty} e^{-st}u(t,x)dt\right]$$

$$s^{\alpha}\mathcal{L}\{u(t,x);s\} - \{{}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-1}[u(0,x)] + s^1\,{}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-2}[u(0,x)]\} = \lambda^2\,{}_{-\infty}^{\ L}D_x^{\beta}[\mathcal{L}\{u(t,x);s\}]$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales del problema (3.28), tenemos:

$$s^{\alpha}\mathcal{L}\{u(t,x);s\} - [f(x) + s\,g(x)] = \lambda^2\,{}_{-\infty}^{\ L}D_x^{\beta}[\mathcal{L}\{u(t,x);s\}]$$

Aplicando la trasformada de Fourier con respecto a la variable “x” en el parámetro “k”, definida en la (Sección 1.2.3.6.), así tenemos:

$$\mathcal{F}\{s^{\alpha}\mathcal{L}\{u(t,x);s\};k\} - \mathcal{F}\{f(x);k\} - \mathcal{F}\{s\,g(x);k\} = \mathcal{F}\left\{\lambda^2\,{}_{-\infty}^{\ L}D_x^{\beta}[\mathcal{L}\{u(t,x);s\}];k\right\}$$

$$s^{\alpha}\mathcal{F}\{\mathcal{L}\{u(t,x);s\};k\} - F(k) - sG(k) = \lambda^2\mathcal{F}\left\{{}_{-\infty}^{\ L}D_x^{\beta}[\mathcal{L}\{u(t,x);s\}];k\right\}$$

Ahora aplicando la propiedad de la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de Liouville (Propiedad 2.4.6), tenemos:

$$s^{\alpha}\mathcal{F}\{\mathcal{L}\{u(t,x);s\};k\}-F(k)-sG(k)=\lambda^{2}(-ik)^{\beta}\mathcal{F}\{\mathcal{L}\{u(t,x);s\};k\}$$

De donde:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{L}\{u(t,x);s\};k\}=\frac{F(k)}{s^{\alpha}-\lambda^{2}(-ik)^{\beta}}+\frac{sG(k)}{s^{\alpha}-\lambda^{2}(-ik)^{\beta}}$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier definida en la (Sección 1.2.3.6), obtenemos:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{\mathcal{L}\{u(t,x);s\};k\};x\}=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{F(k)}{s^{\alpha}-\lambda^{2}(-ik)^{\beta}};x\right\}+\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{sG(k)}{s^{\alpha}-\lambda^{2}(-ik)^{\beta}};x\right\}$$

$$\mathcal{L}\{u(t,x);s\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ikx}\frac{F(k)}{s^{\alpha}-\lambda^{2}(-ik)^{\beta}}dk+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ikx}\frac{sG(k)}{s^{\alpha}-\lambda^{2}(-ik)^{\beta}}dk$$

Ahora aplicando la transformada inversa de Laplace definida en la (Sección 1.2.3.5), obtenemos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{u(t,x);s\};t\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ikx}\frac{F(k)}{s^{\alpha}-\lambda^{2}(-ik)^{\beta}}dk;t\right\}+$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ikx}\frac{sG(k)}{s^{\alpha}-\lambda^{2}(-ik)^{\beta}}dk;t\right\}$$

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha}-\lambda^{2}(-ik)^{\beta}};t\right\}F(k)e^{-ikx}dk+$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^{\alpha}-\lambda^{2}(-ik)^{\beta}};t\right\}G(k)e^{-ikx}dk$$

Y finalmente teniendo en cuenta la transformada de Laplace de la función Mitagg – Leffler en dos parámetros, descrita en la sección (2.6), tenemos:

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda^2(-ik)^\beta t^\alpha\right]F(k)e^{-ikx}dk+$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left[\lambda^2(-ik)^\beta t^\alpha\right]G(k)e^{-ikx}dk$$

Una consecuencia de estos teoremas es que dichas soluciones pueden escribirse de forma más explícita, como muestra el siguiente corolario.

COROLARIO 3.1. Dada la función $f\in\bar{S}$ y $u(t,x)\in\bar{\mathcal{L}}\bar{S}$. La solución de la ecuación diferencial parcial de orden fraccional

$${}_{0}^{RL}D_t^\alpha[u(t,x)]=\lambda^2\,{}_{-\infty}^{L}D_x^\beta[u(t,x)]\quad t>0,x\in\mathbb{R},\lambda^2\in\mathbb{R}^+ \tag{3.30}$$

Con condiciones iniciales:

$${}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-1}[u(0,x)]=f(x),\qquad x\in\mathbb{R};\quad \lim_{x\to\pm\infty}u(t,x)=0,t>0 \tag{3.31}$$

Esta dada por:

$$u(t,x)=t^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}\left({}_{-\infty}^{L}D_x^{\beta j}\right)f(x) \tag{3.32}$$

Donde $0<\alpha\leq 1,\beta>0$. Siempre que la serie en la ecuación anterior converja para todo $x\in\mathbb{R}$ y $t>0$.

DEMOSTRACION:

Dada la expresión por el teorema 3.1., tenemos:

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda^2(-ik)^\beta t^\alpha\right]F(k)e^{-ikx}dk$$

Expresando la función Mittag – Leffler en su forma desarrollada (Sección 2.5.2), tenemos:

$$u(t,x)=\frac{t^{\alpha-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left[\lambda^2(-ik)^{\beta}t^{\alpha}\right]^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}F(k)e^{-ikx}dk$$

Intercambiando el orden de las integrales y de las series, tenemos:

$$u(t,x)=\frac{t^{\alpha-1}}{2\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2t^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty}(-ik)^{\beta j}F(k)e^{-ikx}dk$$

$$u(t,x)=t^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2t^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ikx}(-ik)^{\beta j}F(k)dk$$

Utilizando la transformada inversa de Fourier, definida en la (Sección 1.2.3.6), tenemos:

$$u(t,x)=t^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2t^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}\mathcal{F}^{-1}\left\{(-ik)^{\beta j}F(k);x\right\}$$

Finalmente utilizando la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de Liouville (Propiedad 2.4.6), tenemos:

$$u(t,x)=t^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2t^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}\left({}_{-\infty}^{\;\;L}D_x^{\beta j}\right)f(x)$$

COROLARIO 3.2. Dada la función $f,g\in\bar{S}$ y $u(t,x)\in\bar{\mathcal{L}}\bar{S}$. La solución de la ecuación diferencial parcial de orden fraccional

$${}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)]=\lambda^2\,{}_{-\infty}^{\;\;L}D_x^{\beta}[u(t,x)]\quad t>0,x\in\mathbb{R},\lambda^2\in\mathbb{R}^+\qquad(3.33)$$

Con condiciones iniciales:

$$ {}_{0}^{RL}D_{t}^{\alpha-1}[u(0,x)] = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0, t > 0 \tag{3.34} $$

$$ {}_{0}^{RL}D_{t}^{\alpha-2}[u(0,x)] = g(x), \qquad x \in \mathbb{R} $$

Esta dada por:

$$ u(t,x) = t^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2 t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}\left({}_{-\infty}^{\;L}D_x^{\beta j}\right)f(x) + $$

$$ +t^{\alpha-2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2 t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha-1)}\left({}_{-\infty}^{\;L}D_x^{\beta j}\right)g(x) \tag{3.35} $$

Donde $1 < \alpha \leq 2, \beta > 0$. Siempre que las series en la ecuación anterior converja para todo $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

DEMOSTRACION:

Dada la expresión por el teorema 3.2., tenemos:

$$ u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda^2(-ik)^\beta t^\alpha\right]F(k)e^{-ikx}dk + $$

$$ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left[\lambda^2(-ik)^\beta t^\alpha\right]G(k)e^{-ikx}dk $$

Expresando la función Mittag – Leffler en su forma desarrollada (Sección 2.5.2), tenemos:

$$ u(t,x) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left[\lambda^2(-ik)^\beta t^\alpha\right]^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}F(k)e^{-ikx}dk $$

$$ +\frac{t^{\alpha-2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left[\lambda^2(-ik)^\beta t^\alpha\right]^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha-1)}G(k)e^{-ikx}dk $$

Intercambiando el orden de las integrales y de las series, tenemos:

$$u(t,x)=\frac{t^{\alpha-1}}{2\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty}(-ik)^{\beta j}F(k)e^{-ikx}dk$$

$$+\frac{t^{\alpha-2}}{2\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha-1)}\int_{-\infty}^{+\infty}(-ik)^{\beta j}G(k)e^{-ikx}dk$$

$$u(t,x)=t^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ikx}(-ik)^{\beta j}F(k)dk\,1$$

$$+t^{\alpha-2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha-1)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ikx}(-ik)^{\beta j}G(k)dk$$

Utilizando la transformada inversa de Fourier, definida en la (Sección 1.2.3.6), tenemos:

$$u(t,x)=t^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}\mathcal{F}^{-1}\{(-ik)^{\beta j}F(k);x\}$$

$$+t^{\alpha-2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha-1)}\mathcal{F}^{-1}\{(-ik)^{\beta j}G(k);x\}$$

Finalmente utilizando la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de Liouville (Propiedad 2.4.6), tenemos:

$$u(t,x)=t^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha)}\left({}_{-\infty}^{\;\;L}D_x^{\beta j}\right)f(x)+t^{\alpha-2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda^2t^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j+\alpha-1)}\left({}_{-\infty}^{\;\;L}D_x^{\beta j}\right)g(x)$$

3.4. CASOS PARTICULARES DE LOS TEOREMAS DE LA ECUACION DE CALOR Y DE ONDA DE ORDEN FRACCIONAL.

Ahora presentaremos casos particulares, para mostrar que estos teoremas son una generalización de las ecuaciones de difusión y onda estándar. Esto es:

PRIMERO:

Teniendo en cuenta el teorema 3.1. La solución de la ecuación diferencial parcial de orden fraccional, válida para $0 < \alpha \leq 1,\ \beta > 0$

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)] = \lambda^2 \, {}_{-\infty}^{\ \ L}D_x^{\beta}[u(t,x)] \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \lambda^2 \in \mathbb{R}_+ $$

Con condiciones iniciales:

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha-1}[u(0,x)] = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}; \quad \operatorname*{Lim}_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0, \qquad t > 0 $$

Esta dada por:

$$ u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda^2(-ik)^{\beta}t^{\alpha}\right]F(k)e^{-ikx}dk $$

Haciendo que $\alpha = 1,\ \beta = 2$, tanto en la ecuación diferencial como en su solución, tenemos:

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{1}[u(t,x)] = \lambda^2 \, {}_{-\infty}^{\ \ L}D_x^{2}[u(t,x)] $$

$$ D_t^{1}[u(t,x)] = \lambda^2 D_x^{2}[u(t,x)] $$

Con condiciones iniciales:

$$ u(0,x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}; \quad \operatorname*{Lim}_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0, \qquad t > 0 $$

Esta última ecuación representa la ecuación de calor estándar, cuya solución viene dada por:

$$ u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{1-1}E_{1,1}[\lambda^2(-ik)^{2}t^{1}]F(k)e^{-ikx}dk $$

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{1,1}[-\lambda^2 k^2 t] F(k) e^{-ikx} dk$$

Teniendo en cuenta la (Sección 2.5), referida a la función Mittag y Leffler, tenemos:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{-\lambda^2 k^2 t} e^{-ikx} dk$$

De donde se observa que esta solución es la misma que se obtuvo en la solución de la Ecuación de Calor Estándar (3.8), por medio de transformadas de Fourier, descrita en la (Sección 3.1).

SEGUNDO:

Teniendo en cuenta el teorema 3.2. La solución de la ecuación diferencial parcial de orden fraccional, válida para: $1 < \alpha \leq 2,\ \ \beta > 0$

$${}_0^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)] = \lambda^2 {}_{-\infty}^{\ \ L}D_x^{\beta}[u(t,x)] \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, \lambda^2 \in \mathbb{R}_+$$

Con condiciones iniciales:

$${}_0^{RL}D_t^{\alpha-1}[u(0,x)] = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x \to \pm\infty} u(t,x) = 0, \qquad t > 0$$

$${}_0^{RL}D_t^{\alpha-2}[u(0,x)] = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Esta dada por:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}\left[\lambda^2 (-ik)^{\beta} t^{\alpha}\right] G(k) e^{-ikx} dk$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda^2 (-ik)^{\beta} t^{\alpha}\right] F(k) e^{-ikx} dk$$

Haciendo que $\alpha = 2,\ \beta = 2$, tanto en la ecuación diferencial como en su solución, tenemos:

$${}_0^{RL}D_t^{2}[u(t,x)] = \lambda^2 {}_{-\infty}^{\ \ L}D_x^{2}[u(t,x)]$$

$$D_t^2[u(t,x)] = \lambda^2 D_x^2[u(t,x)]$$

Con condiciones iniciales:

$$D_t^1[u(0,x)] = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}; \quad \lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0, \qquad t > 0$$

$$u(0,x) = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Esta última ecuación representa la ecuación de onda estándar, cuya solución viene dada por:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2-2}E_{2,2-1}[\lambda^2(-ik)^2t^2]G(k)e^{-ikx}dk$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2-1}E_{2,2}[\lambda^2(-ik)^2t^2]F(k)e^{-ikx}dk$$

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{2,1}[i\lambda kt]^2G(k)e^{-ikx}dk + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t\,E_{2,2}[i\lambda kt]^2F(k)e^{-ikx}dk$$

Teniendo en cuenta la (Sección 2.5), referida a la función Mittag y Leffler, tenemos:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Cos\,h[i\lambda kt]G(k)e^{-ikx}dk + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\frac{Sen\,h[i\lambda kt]}{i\lambda kt}F(k)e^{-ikx}dk$$

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(k)Cos\,h[i\lambda kt]e^{-ikx}dk + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{i\lambda k}Sen\,h[i\lambda kt]e^{-ikx}dk$$

De donde se observa que esta solución es la misma que se obtuvo en la solución de la Ecuación de Onda Estándar (3.20), por medio de transformadas de Fourier, descrita en la (Sección 3.2).

CONCLUSIONES

1) Se determinó la solución de la ecuación de Calor y Onda de orden fraccional con derivadas de Riemann-Liouville, usando las Transformadas de Laplace y de Fourier, en términos de la función Mitagg-Leffler.

2) Existe relación entre las ecuaciones de Calor y Onda estándar, con la ecuación de Calor y Onda de orden fraccional, mediante los teoremas 3.1 y 3.2.

3) Se demostró que la solución de la ecuación de Calor y Onda estándar, es un caso particular de la solución de la ecuación de Calor y Onda de orden fraccional.

RECOMENDACIONES

Una vez concluida la tesis, se considera interesante investigar sobre otros aspectos relacionados con el cálculo fraccionario y más aún con las ecuaciones diferenciales de orden fraccional, las cuales tienen múltiples temas por desarrollar, en tal sentido se propone:

- Extender la solución de la Ecuación Diferencial de Orden Fraccional:

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)] = \lambda^2 \, {}_{-\infty}^{\;\;L}D_x^{\beta}[u(t,x)]; \quad t, \lambda^2 \in \mathbb{R}^+; x \in \mathbb{R} $$

  Cuando: $0 < \alpha \leq 2$ y $\beta > 0$; con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

  Para: $\alpha > 2$ y $\beta > 0$; con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Analizar la solución de la Ecuación Diferencial de Orden Fraccional:

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)] = \lambda^2 \, {}_{-\infty}^{\;\;L}D_x^{\beta}[u(t,x)]; \quad t, \lambda^2 \in \mathbb{R}^+; x \in \mathbb{R} $$

  Cuando: $0 < \alpha \leq 2$ y $\beta > 0$; con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

  Con otros operadores tales como las derivadas fraccionarias de Caputo o de Grünwald-Létnikov.

- Analizar la posible solución si existe, de la Ecuación Diferencial

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}[u(t,x)] = \lambda^2 \, {}_{-\infty}^{\;\;L}D_x^{\beta}[u(t,x)]; \quad t, \lambda^2 \in \mathbb{R}^+; x \in \mathbb{R} $$

  De orden complejo, es decir cuando $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

- Analizar la solución de la ecuación de calor y onda mediante una ecuación diferencial de orden fraccional, para ecuaciones diferenciales de calor y onda con coeficientes variables, si es posible.

BIBLIOGRAFIA

[1] Gutiérrez G. (2012) *Solución Fundamental de la Derivada de Orden Fraccional*. Perú.

[2] Hwei P. Hsu (1973) *Analisis de Fourier*. Edit. Fondo Educativo Interamericano S.A. Colombia.

[3] Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J. (2006) *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Edit. Elsevier.

[4] Kisela T. (2008) *Fractional Differential Equations and their Applications.*

[5] Krzysztof M. (1995) *Analysis (Parte I Elements)*. Edit. Springer.

[6] Miller K. , Ross B. (1993) *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* INC. USA.

[7] Murray S. (1991) *Transformadas de Laplace.* Edit. McGRAW-HILL. Mexico.

[8] O'Neil, P. (2004) *Análisis de Fourier, Ecuaciones Diferenciales Parciales y Análisis Complejo*. Edit. International Thomson Editores. S.A. México.

[9] Pierantozzi T. (2006) *Estudio de Generalizaciones Fraccionarias de las Ecuaciones Estándar de Difusion y de Ondas*. Madrid.

[10] Podlubny, Igor. (1999) *Fractional Differential Equations.* Technical University of Kosice, Slovak Republic. Academic Prees.

[11] Quispe V. (2016) *Modelamiento de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias Aplicado a la Dinámica.* Perú.

[12] Uchasara A. (2001) *Cálculo Fraccional y sus Aplicaciones*. Perú.

[13] Vargas L. (2011) *Cálculo Fraccionario Aplicado al Problema Inverso del Calor*. Santiago de Cali.

LINKOGRAFIA

1) https://personal.us.es/arias/TM/Tema5.pdf. Visitado el 21/06/2018.

2) http://www.ugr.es/~rpaya/documentos/Fisymat/Curso%202009-10/FyM201003.pdf. Visitado el 15/08/2018.

3) https://www.researchgate.net/publication/45870179_Mittag-Leffler_Functions_and_Their_Applications. Visitado el 11/04/2018.

4) https://www.researchgate.net/publication/315096127_A_New_Extension_of_Mittag-Leffler_function. Visitado el 2/09/2018.

5) http://www.mat.ucm.es/~dazagrar/docencia/cap5.pdf. Visitado el 26/07/2018.

6) https://ocw.unican.es/pluginfile.php/608/course/section/577/MCP6-Fubini-w.pdf. Visitado el 19/05/2018.

ANEXOS

MATRIZ DE CONSISTENCIA

ECUACIÓN DE CALOR Y DE ONDA MEDIANTE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE ORDEN FRACCIONAL

<table>
<tr>
<td>
PROBLEMA GENERAL
Dada la Ecuación Diferencial de Orden Fraccional:
$${}^{RL}_{0}D_t^{\alpha}[u(t,x)] = \lambda^2 \, {}^{L}_{-\infty}D_x^{\beta}[u(t,x)];$$
$$t,\lambda^2 \in \mathbb{R}^+; x \in \mathbb{R}$$
Con condiciones iniciales definidas por:
$${}^{RL}_{0}D_t^{\alpha-1}[u(0,x)] = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} u(t,x) = 0, \qquad t > 0$$
$${}^{RL}_{0}D_t^{\alpha-2}[u(0,x)] = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$
Cuando: $0 < \alpha \leq 2$ y $\beta > 0$.
Donde:

${}^{RL}_{0}D_t^{\alpha}[u(t,x)]$: representa la derivada parcial de Riemann-Liouville de $u(t,x)$, con respecto a la variable “t” de orden “α”, con $0 < \alpha \leq 2$.
${}^{L}_{-\infty}D_x^{\beta}[u(t,x)]$: representa la derivada parcial de Liouville de $u(t,x)$, con respecto a la variable “x” de orden “β”, con $\beta > 0$.

A la cual se denominará Ecuación de Calor y Onda de Orden Fraccional.
¿Será posible encontrar una solución de la ecuación de Calor y Onda de Orden Fraccional?.

PROBLEMAS ESPECÍFICOS

¿Es posible expresar las ecuaciones de Calor y de Onda mediante una Ecuación Diferencial Parcial de Orden Fraccional?
¿Qué relación existirá entre las soluciones de la Ecuación de Calor y de Onda Estándar, con la solución de la Ecuación de Calor y de Onda de Orden Fraccional?

</td>
<td>
OBJETIVO GENERAL
Encontrar la solución de la Ecuación de Calor y de Onda de Orden Fraccional.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

a) Establecer la relación existente entre las Ecuaciones de Calor y de Onda Estándar con la Ecuación de Calor y de Onda de Orden Fraccional.

b) Demostrar que las soluciones de la Ecuación de Calor y de Onda Estándar, es un caso particular de la Ecuación de Calor y de Onda de Orden Fraccional.
</td>
<td>
METODOLOGIA

TIPO DE INVESGACION
Es de tipo exploratorio, pues trata de analizar e investigar aspectos concretos que aún no han sido estudiados a profundidad. Básicamente se trata de un primer acercamiento.

NIVEL DE INVESTIGACIÓN:
La investigación es de nivel pura o básica, pues se trata de investigar y relacionar hasta cierto punto nuevos conceptos, relacionándolos e infiriendo otros resultados. Este nivel de investigación no se ocupa de las aplicaciones prácticas.

DISEÑO DE INVESGACION:
El diseño es no experimental, en razón que manipula conceptos en condiciones abiertas o no contraladas, usando el diseño del método transversal pues describe y analiza la interrelación entre dos modelos, en nuestra investigación estudia la dependencia de la Solución de la Ecuación de Calor y Onda estándar, por medio de las Ecuaciones Diferenciales Parciales de Orden Fraccional.
</td>
</tr>
</table>

GRAFICOS DE LA ECUACION DE CALOR ESTANDAR

El Software que se utilizó para los gráficos es el Wolfram Mathematica 11.2.

Este primer grupo de gráficos corresponde a la solución de la Ecuación de Calor Estándar, dada en la Pg. 48. Esto es:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-\lambda^2 k^2 t} e^{-ikx} dk$$

GRAFICO N° 1

Cuando: $F(k) = 1$; $k \in [-10000,10000]$; $x \in [0,3]$ y $t \in [0, 1.5]$.

Plot3D[(1/(2Pi))Integrate[Exp[$-k^{2}t$]Exp[$-ikx$], {k, −10 000,10 000}], {x, 0,3}, {t, 0,1.5}]

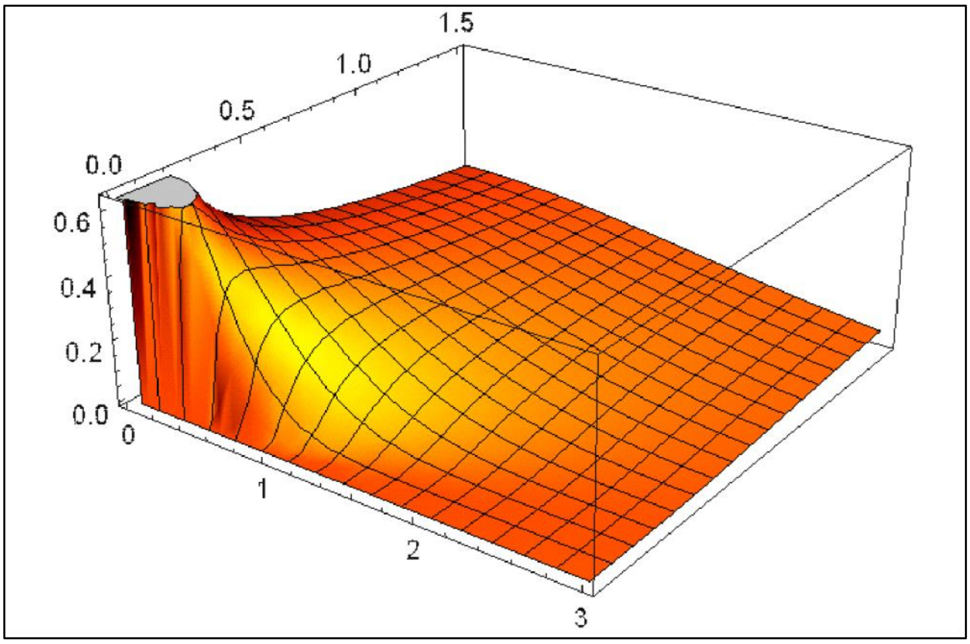

GRAFICO N° 2

Cuando: $F(k) = \mathcal{F}\{sen(\pi x); k\}$; $k \in [-10000,10000]$; $x \in [0,3]$ y $t \in [0, 1.5]$.

$$\text{Plot3D}[(1/(2\text{Pi}))\text{Integrate}[\text{FourierTransform}[\text{Sin}[\text{Pi}x], x, k]\text{Exp}[-k\text{^}2t]\text{Exp}[-ikx],$$

$$\{k, -10000,10000\}], \{x, 0,3\}, \{t, 0,1.5\}]$$

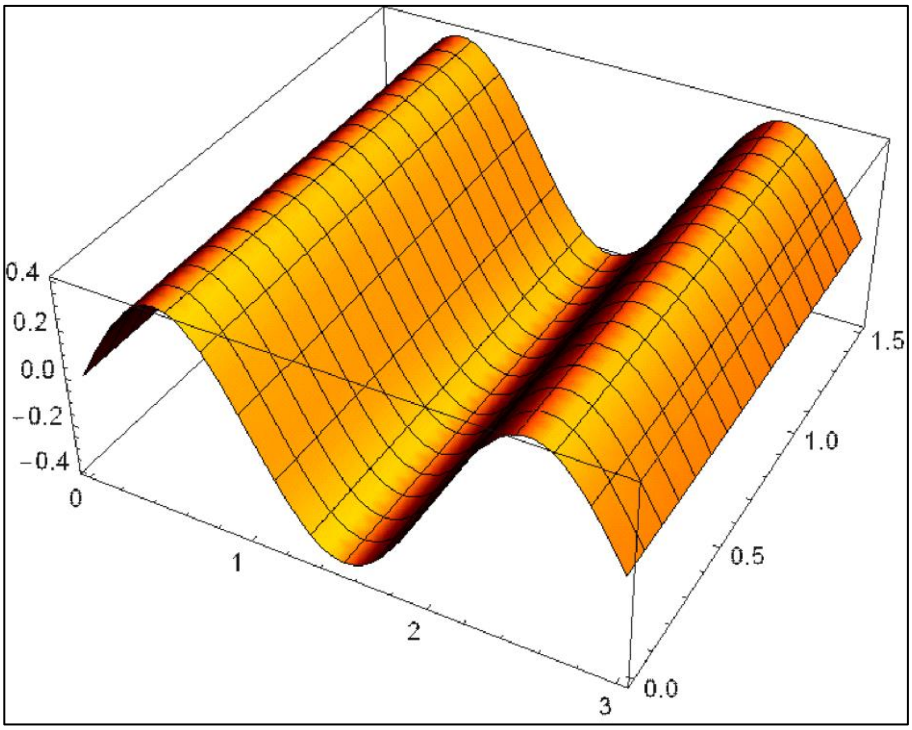

GRAFICO N° 3

Cuando: $F(k) = 1$; $k \in [-1,1]$; $x \in [0,100]$ y $t \in [0, \pi]$.

$$\text{Manipulate}[\text{Plot}[(1/(2\text{Pi}))\text{Integrate}[\text{Exp}[-k\hat{}2t]\text{Exp}[-ikx], \{k, -1,1\}], \{x, 0,100\}], \{t, 0, \text{Pi}\}]$$

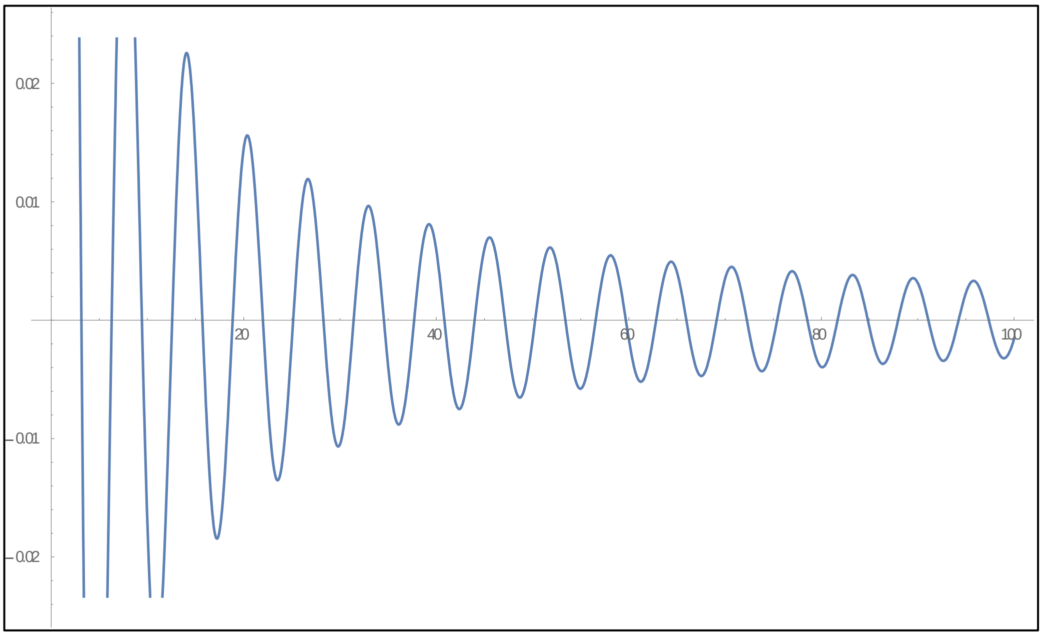

GRAFICO N° 4

Cuando: $F(k) = \mathcal{F}\{sen(\pi x); k\}$; $k \in [-10,10]$; $x \in [0,10]$ y $t \in [0, \pi]$.

$$\text{Manipulate}[\text{Plot}[(1/(2\text{Pi}))\text{Integrate}[\text{FourierTransform}[\text{Sin}[\text{Pi}x], x, k]\text{Exp}[-k\hat{}2t]\text{Exp}[-ikx],$$

$$\{k, -10,10\}], \{x, 0,10\}], \{t, 0, \text{Pi}\}]$$

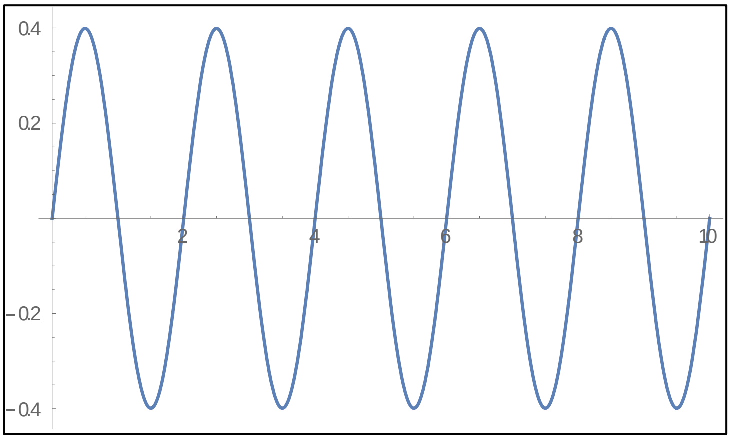

GRAFICO N° 5

Cuando: $F(k) = \mathcal{F}\{sen(\pi x); k\}$; $k \in [-100,100]$; $x \in [0,2]$ y $t \in [0, 200\pi]$.

$$\text{Manipulate[Plot[(1/(2Pi))Integrate[FourierTransform[Sin[Pi}x], x, k]\text{Exp}[-k\text{^}2t]\text{Exp}[-ikx],$$

$$\{k, -100,100\}], \{x, 0,2\}], \{t, 0,200\text{Pi}\}]$$

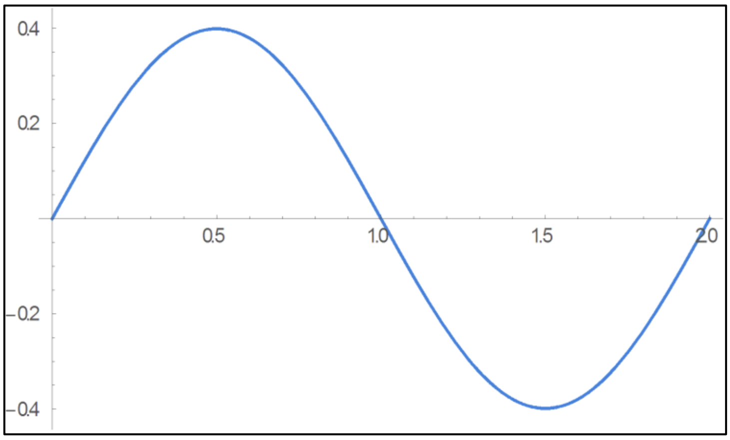

GRAFICO DE LA ECUACION DE ONDA ESTANDAR

Este gráfico corresponde a la solución de la Ecuación de Onda Estándar, dada en la Pg. 52. Esto es:

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(k)Cos\, h[i\lambda kt]e^{-ikx}dk +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{i\lambda k} Sen\, h[i\lambda kt]e^{-ikx}dk$$

GRAFICO N° 6

Cuando: $G(k) = \mathcal{F}\{cos(\pi x); k\}$, $F(k) = \mathcal{F}\{sen(\pi x); k\}$; $k \in [-10000,10000]$;

$x \in [0,3]$ y $t \in [0, 1.5]$.

$\text{Plot3D}[(1/(2\text{Pi}))\text{Integrate}[\text{FourierTransform}[\text{Cos}[\text{Pi}x], x, k]\text{Cosh}[ikt]\text{Exp}[-ikt]\text{Exp}[-ikx],$

$\{k, -10000,10000\}]$

$+ (1/(2\text{Pi}))\text{Integrate}[(1/i\,k)\text{FourierTransform}[\text{Sin}[\text{Pi}x], x, k]\text{Sinh}[ikt]$

$\text{Exp}[-ikt]\text{Exp}[-ikx], \{k, -10000,10000\}], \{x, 0,3\}, \{t, 0,1.5\}]$