

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRIA EN CIENCIAS : MENCIÓN MATEMÁTICAS



**MODELOS MATEMÁTICOS DEL MOVIMIENTO DE UN
PROYECTIL MEDIANTE LA EXISTENCIA DE LAS
ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS NO
LINEAL**

PRESENTADO POR:

Br. ALVARO VELÁSQUEZ AYMA

**PARA OPTAR AL GRADO ACADEMICO
DE MAESTRO EN MATEMÁTICAS**

ASESOR:

Dr. GUIDO ÁLVAREZ JÁUREGUI

**CUSCO – PERÚ
2019**

INFORME

Al : Dr. **CLETO DE LA TORRE DUEÑAS**
DIRECTOR DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

DEL : Dr. **GUIDO ÁLVAREZ JÁUREGUI**
ASESOR DE TESIS

ASUNTO :INFORME SOBRE EL TRABAJO DE TESIS **MODELOS
MATEMATICOS DEL MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL
MEDIANTE LA EXISTENCIA DE LAS ECUACIONES
DIFERENCIALES FRACCIONARIAS NO LINEAL**

PRESENTADO POR EL BACHILLER:
VELASQUEZ AYMA ALVARO

FECHA : CUSCO FEBRERO DEL 2019

Señor director:

El suscrito en mi condición de asesor del trabajo de tesis intitulada **MODELOS MATEMATICOS DEL MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL MEDIANTE LA EXISTENCIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS NO LINEAL**. Según resolución N° 2690-2018-EPG-UNSAAC, de fecha 12 de setiembre del 2018, desarrollado por el bachiller **VELASQUEZ AYMA ALVARO**; en concordancia al proyecto aprobado, cumulo en informar lo siguiente:

La tesis intitulada **MODELOS MATEMÁTICOS DEL MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL MEDIANTE LA EXISTENCIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS NO LINEAL**, desarrollado por el aspirante al grado de Maestro, el mismo que fue desarrollado desde el inicio hasta la culminación del trabajo por el graduando, tal es así que el presente trabajo consta de cuatro capítulos:

En el capítulo I está referido al planteamiento metodológico de la investigación y el marco teórico, en el cual se determina las sucesiones fundamentales de funciones y de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias considerando en su desarrollo las propiedades y teoremas que enriquece la presente investigación.

En el capítulo II se presenta el desarrollo del cálculo fraccionario, donde se define la función gamma, función beta, integral fraccionaria, derivada fraccionaria, propiedades y derivada fraccionaria de Caputo.

En el capítulo III se demuestra la existencia de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, donde se presenta desigualdades estrictas y no estrictas, la existencia local y solución superior e inferior

En el capítulo IV abarca la aplicación de la teoría presentada donde se muestra los modelos matemáticos del proyectil e interpretación geométrico

Atentamente

Dr. Guido Álvarez Jáuregui
Asesor

PRESENTACIÓN

Señores miembros del Jurado:

En cumplimiento con las disposiciones que contiene el reglamento de Grados de la Escuela de Posgrado de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, presento a vuestra consideración la presente tesis:

“MODELOS MATEMÁTICOS DEL MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL MEDIANTE LA EXISTENCIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS NO LINEAL”

Con el propósito para optar al grado académico de Maestro en Matemáticas y teniendo en consideración de que el presente trabajo posiblemente pueda aún mejorarse, agradezco las sugerencias que tengan a bien de proponerme a los señores docentes dictaminantes los cuales me servirá para mejorar la presente tesis.

En el desarrollo del presente trabajo he visto por conveniente distribuir en cuatro capítulos de la siguiente forma:

En el capítulo I está referido al planteamiento metodológico de la investigación y el marco teórico, en el cual se determina las sucesiones fundamentales de funciones y de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias considerando en su desarrollo las propiedades y teoremas que enriquece la presente investigación.

En el capítulo II se presenta el desarrollo del cálculo fraccionario, donde se define la función gamma, función beta, integral fraccionaria, derivada fraccionaria, propiedades y derivada fraccionaria de Caputo.

En el capítulo III se demuestra la existencia de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, donde se presenta desigualdades estrictas y no estrictas, la existencia local y solución superior e inferior.

En el capítulo IV abarca la aplicación de la teoría presentada donde se muestra los modelos matemáticos del proyectil e interpretación geométrico.

Atentamente

Br. Alvaro Velásquez Ayma

DEDICATORIA

La presente tesis está dedicada a Dios todo poderoso por permitir llegar en este momento tan especial en mi vida. Por darme el valor para seguir adelante y darme la sabiduría y entendimiento para cumplir mis metas.

A mis padres Marcos y Jacinta que me dieron la vida y su apoyo desplegado para la culminación exitosa del presente trabajo.

A Yamileth amiga fiel y sincera quien me brindo su amistad, comprensión y paciencia espera para que pudiera terminar el grado son evidencias de su gran amor. ¡Gracias!

A mis queridos hermanos Janet, Soledad, Wilber, Maritza y Maricruz por su apoyo incondicional.

AGRADECIMIENTO

Es la oportunidad para agradecer a:

Dios nuestro creador, por darme la vida, por permitir que viva rodeado de personas amables y por haberme permitido estudiar matemáticas, una hermosa carrera.

A los docentes de la escuela de post grado de matemáticas quienes se esforzaron en mi enseñanza y me supere.

Al profesor Dr. Guido Álvarez Jáuregui quien me brindo su valioso tiempo, paciencia y comprensión para el desarrollo y culminación del presente trabajo.

RESUMEN

La presente tesis de investigación tiene como objetivo determinar el problema de modelamiento del movimiento de un proyectil que se formulan mediante la existencia de las ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineales.

Para la solución se presenta el estudio de las condiciones para la existencia de una ecuación diferencial fraccionaria de orden fraccionario. El operador diferencial y las condiciones iniciales son tomadas en el sentido de Caputo. El procedimiento seguido para lograr los objetivos trazados es siguiendo la idea intuitiva del teorema de Peano y existencia de la solución superior e inferior de una ecuación diferencial ordinaria. para luego extender junto con el polinomio de Taylor y formular los modelos matemáticos del movimiento de un proyectil.

En esta tesis, con el apoyo de las herramientas computacionales Wolfram Mathematica 8 se ha logrado mostrar los gráficos del movimiento de un proyectil más certeros en su recorrido.

PALABRAS CLAVES: Derivada Fraccional de Caputo, Ecuaciones Diferenciales fraccionarias de orden fraccionario.

ABSTRACT

The objective of this research thesis is to determine the mathematical models of a projectile that are formulated through the existence of nonlinear fractional differential equations for their best modeling in their path.

For the solution, the study of the conditions for the existence of a fractional differential equation is presented. The differential operator and the initial conditions are taken in the sense of Caputo. The procedure followed to achieve the objectives outlined is following the intuitive idea of Peano's theorem and existence of the upper and lower solution of an ordinary differential equation. to then extend together with the Taylor polynomial and formulate the mathematical models of the movement of a projectile.

In this thesis, with the support of Wolfram Mathematica 8 computational tools, it has been possible to show the graphics of the movement of a projectile more accurate in its journey.

Keywords: Fractional Derivative of Caputo, fractional differential equations of fractional order.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1	Problema de investigación	13
1.1.1	Descripción del problema	13
1.2	Formulación del problema	14
1.2.1	Problema general	14
1.2.2	Problemas específicos	15
1.3	Objetivos de la investigación	15
1.3.1	Objetivo general	15
1.3.2	Objetivos específicos	15
1.4	Antecedentes relacionados con la investigación	15
1.4.1	Antecedentes internacionales	16
1.4.2	Antecedentes nacionales	16
1.4.3	Antecedentes locales	16
1.5	Justificación	17
1.6	Hipótesis y variables	18
1.6.1	Hipótesis general	18
1.6.2	Hipótesis específicos	18
1.7	Importancia del problema	18
1.8	Limitaciones	19
1.9	Metodología	19
1.9.1	Tipo de investigación	19
1.9.2	Nivel de investigación	19

MARCO TEÓRICO

1.10	Conceptos básicos de sucesiones	20
1.11	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	23
1.12	Desigualdades diferenciales	25
1.12.1	Solución maximal y minimal	34

CAPÍTULO II

CÁLCULO FRACCIONARIO

2.1	Espacio de funciones	37
2.2	Funciones especiales	38
2.2.1	Función Gamma Euler	38
2.2.2	Función Beta	41
2.2.3	Función Psi	41
2.2.4	Función Miller Ross	42
2.3	Calculo Fraccionario de Riemann-Liouville	43
2.3.1	Integral Fraccionaria	43
2.3.2	Derivada Fraccionaria	51
2.3.3	Propiedades de la integral y Derivada Fraccionaria	54
2.3.4	Propiedades de la Integral Fraccionaria	54
2.3.5	Propiedades de la Derivada Fraccionaria	60
2.3.6	Relación entre Derivada e Integral Fraccional	64
2.3.7	Derivada Fraccionaria de Caputo	67

CAPÍTULO III

ECUACION DIFERENCIAL FRACCIONARIA

3.0	Planteo de una Ecuación Diferencial Fraccionaria	72
3.1	Existencia de la solución local	74
3.2	Desigualdades estrictas y no estrictas	76
3.3	Existencia de la solución superior e inferior	79

CAPÍTULO IV

APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL FRACCIONARIA AL MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

4.1	Introducción	85
4.1.1	Ecuación Diferencial clásica del proyectil	87
4.1.2	Ecuación Diferencial Fraccionaria del proyectil	89
4.1.3	Solución de las ecuaciones diferenciales	89
4.1.3.1	Solución del movimiento parabólico Horizontal mediante la Ecuación Diferencial Fraccionaria	89
4.1.3.2	Solución del movimiento parabólico vertical mediante la Ecuación Diferencial Fraccionaria	90
4.1.4	Alcance del movimiento de un proyectil	93
4.1.5	Angulo optimo del proyectil	95
4.1.6	Altura máxima del proyectil	96
4.1.7	Tiempo de vuelo del proyectil	100
4.1.8	Relación del cálculo fraccional y calculo clásico del movimiento parabólico	100
4.1.9	Modelos Matemáticos del movimiento de un proyectil	104
4.2	Matriz de Consistencia	105
	Conclusiones	106
	Sugerencias	107
	Fuentes de información	108
	Linkografia	109
	Apéndice	110

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Movimiento compuesto	85
Figura 2: Fuerza que intervienen en el proyectil	87
Figura 3: Comparación de trayectorias para diferentes valores de α	93
Figura 4: Comparación entre la trayectoria fraccionaria y la trayectoria clásica con un ángulo tiro de $\phi = \pi/6$	99
Figura 5: Comparación entre la trayectoria fraccionaria y la trayectoria clásica con un ángulo tiro de $\phi = \pi/3$	99
Figura 6: Comparación entre el alcance fraccional D_F y el alcance clásico D_C si $D_F = D_C$	102
Figura 7: Comparación entre el alcance fraccional D_F y el alcance clásico D_C si $D_F > D_C$	102
Figura 8: Comparación entre el alcance fraccional D_F y el alcance clásico D_C si $D_F < D_C$	102

INTRODUCCIÓN

La investigación de esta tesis es el estudio en determinar el modelamiento más certero del movimiento de un proyectil usando la Ecuación Diferencial Fraccionaria de orden no entero.

El informe de tesis, está organizado de manera que se desarrolla la teoría de las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias y una aplicación de la teoría presentada.

La primera parte abarca los aspectos teóricos la misma que se subdivide en cuatro capítulos.

En el capítulo I está referido al planteamiento metodológico de la investigación y el marco teórico, en el cual se determina las sucesiones fundamentales de funciones y de la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias considerando en su desarrollo las propiedades y teoremas que enriquece la presente investigación.

En el capítulo II se presenta el desarrollo del cálculo fraccionario, donde se define la función gamma, función beta, Integral Fraccionaria, Derivada Fraccionaria, propiedades y Derivada Fraccionaria de Caputo.

En el capítulo III se demuestra la existencia de las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias, donde se presenta desigualdades estrictas y no estrictas, la existencia local y solución superior e inferior.

En el capítulo IV abarca la aplicación de la teoría presentada donde se muestra los modelos matemáticos del proyectil e interpretación geométrico.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1.1 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El cálculo fraccionario fue desarrollado en 1990 su origen se remonta a mediados del siglo XX, este desarrollo fue en gran parte en respuesta a las interrogantes que se generaban en el estudio del cálculo fraccionario generalizado en la actualidad existen grandes problemas en las áreas de matemáticas físicas e ingeniería y para ello es necesario la formulación de modelos matemáticos.

Con los modelos matemáticos se han permitido encontrar soluciones más viables de ciertas formulaciones matemáticas accediendo a resolverlos de manera más rápida y eficiente.

Existen grandes problemas relacionados a la formulación de los modelos matemáticos, estos problemas se han venido desarrollando con métodos convencionales dentro los que se consideran modelos clásicos. Estos métodos no consideran las especificaciones. Por tanto, es razonable cuestionarse acerca de la necesidad o conveniencia de considerar nuevos modelos matemáticos para encontrar los valores cuestionados mediante el cálculo fraccional.

El estudio de cálculo diferencial e integral fue muy importante, teniendo a Leibniz como el mayor inventor de símbolos Matemáticos, consideremos la expresión $\frac{d^n y}{dx^n}$ que significa la n-esima derivada para $n \in \mathbb{Z}^+$, sin embargo gracias a una serie de especulaciones y paradojas entre muchos Matemáticos famosos tales como Euler, Laplace, Fourier, Abel, Riemann, Liouville, Laurent, etc. Se realizaron diferentes estudios y análisis para valores fraccionarios de n, así se inició el estudio de las integrales y derivadas fraccionarias.

El estudio de ecuaciones diferenciales fraccionarios se ha tomado de gran interés para los investigadores. Recientemente, se han publicado pocos trabajos que investigan la existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales fraccionarias basado de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias citados en los textos [2] y [5].

La utilidad del cálculo fraccionario citados en los textos [1], [3], [4] y [7]. se ha hecho más evidente, especialmente debido a que el modelamiento de muchos problemas físicos requiere de la formulación mediante ecuaciones diferenciales fraccionarias citados en los textos [4], [6] y [8] y obtener resultados precisos de modo que se puede resolver la complejidad.

En consecuencia, en esta investigación las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias cumple un rol importante para el desarrollo de la teoría básica y proporcionar modelos matemáticamente del movimiento de un proyectil citado en el texto [9].

En cuanto se refiere a las formulaciones de los modelos matemáticos de un proyectil, este está basado junto con el polinomio de Taylor el cual está estrechamente relacionado con la teoría del cálculo fraccional

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.2.1 PROBLEMA GENERAL

¿Será posible determinar la solución de la Ecuación Diferencial Fraccionaria no lineal de la forma:

$$\begin{cases} {}_0^c D_x^\alpha y = f(x, y(x)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (i)$$

y formular modelos matemáticos del movimiento de un proyectil mediante las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias?

1.2.2 PROBLEMAS ESPECÍFICOS

- a) ¿Es posible determinar la existencia de la solución local y solución superior e inferior de la ecuación (i)?
- b) ¿Para este resultado Será posible efectuar modelos matemáticos del movimiento de un proyectil?

1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Determinar las condiciones necesarias para establecer la existencia de la Ecuación Diferencial Fraccionaria no lineal y formular modelos matemáticos del movimiento de un proyectil

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a) Encontrar la solución local mediante el teorema de Peano y solución superior e inferior mediante las desigualdades estrictas y no estrictas para la existencia de la Ecuación Diferencial Fraccionaria
- b) Comparando el resultado anterior junto con el polinomio de Taylor formular los modelos matemáticos de un proyectil en un instante t de su movimiento

1.4 ANTECEDENTES RELACIONADOS CON LA INVESTIGACIÓN

El cálculo fraccionario es un campo del análisis matemático que se ocupa de las integraciones y derivadas de orden arbitrario, es tan antiguo como el cálculo diferencial de orden entero (1695). Se ha hecho más evidente, especialmente debido a que la formulación de muchos problemas físicos se obtiene mediante Ecuaciones Diferenciales Fraccionarios citado en el texto [4].

En consecuencia, las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarios han tomado una importancia relevante para el desarrollo teórico y aplicado del cálculo

fraccionario citado en el texto [8] Muchos matemáticos, científicos e ingenieros han sido atraídos por este tema, lo cual ha permitido que se profundice tanto en su aspecto teórico como en sus aplicaciones en proyectiles citado en el texto [9].

A continuación, se indica algunos trabajos referidos al tema.

1.4.1 ANTECEDENTES INTERNACIONALES

- 1 AL-BASSAM, M.A. (1965) menciona algunos teoremas de existencia en Ecuaciones Diferenciales de orden generalizado.
- 2 KOCHU Bei, A.N. (1990) trabajó con Ecuaciones Diferenciales de difusión de orden fraccional.
- 3 MILLER, K. y Ross B. (1993) publica su obra una Introducción al cálculo fraccional y Ecuaciones Diferenciales Fraccionarios, que es el primer libro dedicado completamente a este tema.
- 4 Podlubny, I. (1999) publica su libro “An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, To Methods of their Solution and some of their Applications”.

1.4.2 ANTECEDENTES NACIONALES

Torres, C. (2009) desarrollo un Informe de Prácticas Pre-Profesional de la universidad nacional de Trujillo sobre la “Existencia y Unicidad de la solución de las Ecuaciones diferenciales ordinarios de orden fraccionario”.

1.4.3 ANTECEDENTES LOCALES

- 1 López, M. (2008) presenta su trabajo de investigación “Transformadas Integrales para Ecuaciones Diferenciales de orden Fraccional”, de objetivo encontrar la solución de las ecuaciones diferenciales lineales de orden fraccional con condiciones iniciales, utilizando transformaciones integrales,

con un método deductivo y dando un resultado mediante los métodos de la transformada de Mellin y series de potencias se da la solución de la ecuación diferencial lineal de orden fraccional con coeficientes continuos.

- 2 Choque, M. (2011) presenta su trabajo de investigación “solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario mediante transformada del Laplace”, como objetivo resolver por el método de la transformada de Laplace, ecuaciones diferenciales ordinarias fraccionarias con coeficientes constantes, el presente trabajo de investigación está basado en el método descriptivo analítico, deductivo y de resultado la ecuación diferencial ordinaria de orden fraccional pueden ser resueltos con el método de la transformada de Laplace.

En la actualidad el estudio del cálculo fraccional está considerado como una teoría moderna dentro de la Matemática actual.

1.5. JUSTIFICACIÓN

En la actualidad las ciencias aplicadas han tomado mayor importancia en el desarrollo de un país. Las ciencias puras en particular la matemática aplicada es una disciplina que puede aplicarse para el análisis y solución de problemas pertenecientes a las áreas de ingeniería, física, mecánica de fluidos, circuitos eléctricos.

El uso correcto de las matemáticas permite encontrar soluciones más viables. Con el desarrollo y aplicación de las Ecuaciones diferenciales se ha podido encontrar estimaciones más precisas en las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarios. Además, de su aplicaciones y formulaciones de modelos matemáticos.

Debido a este sistema en el proceso mencionado, se tiene la necesidad de implementar modelos matemáticos mediante las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarios para determinar la mejor estimación para futuros trabajos de investigación

1.6 HIPÓTESIS Y VARIABLES

1.6.1 HIPÓTESIS GENERAL

Con la Ecuación Diferencial Fraccionaria no lineal es factible formular los modelos matemáticos del movimiento de un proyectil

1.6.2 HIPÓTESIS ESPECÍFICOS

- a) La solución local junto con el teorema de Peano y solución superior e inferior junto con las desigualdades estrictas y no estrictas da lugar a la existencia de una Ecuación Diferencial Fraccionaria expresado en términos de derivada fraccionario de Caputo.
- b) Los nuevos modelos matemáticos de orden fraccional del movimiento de un proyectil junto con el polinomio de Taylor están expresados en términos de la función Gamma.

1.7 IMPORTANCIA DEL PROBLEMA

Se sabe que las matemáticas son de gran importancia para el desarrollo de las diferentes áreas del saber humano.

El presente trabajo es de suma importancia debido a que las Ecuaciones diferenciales permiten construir modelos matemáticos y a la vez describir el fenómeno de un sistema aplicado a distintas disciplinas a través de la teoría del cálculo fraccional y se muestra formulaciones de modelos matemáticos para el movimiento de un proyectil y se presenta un método de la búsqueda de soluciones mediante las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarios.

En el trabajo se presenta el método analítico y se utiliza el software Wolfram Mathematica 8 donde se busca los valores más cercanos a través de la solución de las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias del proyectil.

1.8 LIMITACIONES

El ser humano siempre está en busca de una explicación razonable de los fenómenos que se encuentran a su alrededor sin embargo existen obstáculos que eventualmente pueden presentarse durante el desarrollo del estudio, está referido a una investigación que busque en disciplinas diferentes aspectos necesarios requeridos en un tema enmarcado en otra área del conocimiento.

Dentro de las formulaciones matemáticas propuestos expresa una marcada limitación existente al no considerar la totalidad de las restricciones en el problema practico se considera una solución parcial de la misma, dada la limitada información bibliográfica de las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarios.

1.9 METODOLOGÍA

1.9.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

La presente investigación es de tipo básico se caracteriza por qué parte de un marco teórico y permanece en él, se ha iniciado con las Ecuaciones Diferenciales fraccionarias y la búsqueda de incrementar los conocimientos científicos aplicados a la teoría del movimiento de proyectil en el cálculo fraccional.

1.9.2 NIVEL DE INVESTIGACIÓN

El nivel de investigación está relacionado al alcance de la misma, en las ciencias básicas generalmente las investigaciones son exploratorias, sin embargo, en la investigación planteada tiene un alcance de carácter descriptivo ya que se describe el problema del movimiento de un proyectil mediante la existencia de las ecuaciones diferenciales fraccionarias de orden fraccionario en todas sus componentes principales asociadas a una realidad.

MARCO TEÓRICO

En esta unidad, se establecen definiciones, teoremas resultados básicos de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarios, que permitirán comprender el capítulo III y capítulo IV

1.10 CONCEPTOS BÁSICOS DE SUCESIONES

A menudo es necesario calcular el límite de una sucesión infinita de números reales, mas no siempre existe el límite de cualquier sucesión de números reales por lo que es útil trabajar con el mayor y menor límite de todas las subsucesiones.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión infinita de números reales, si $+\infty$ y $-\infty$ son considerados también como límites, entonces se pueden afirmar que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ posee al menos una subsucesion convergente. Si B es el conjunto de todos los límites de la subsucesiones de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces B es un subconjunto no vacío de la recta real. Luego B posee un supremo y un ínfimo.

DEFINICIÓN 1.0 Sea $f: \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre Ω , se define que f es continua en $a \in \Omega$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Siempre que $|x - a| < \delta$, $x \in \Omega$.

DEFINICIÓN 1.1 Se define el límite superior de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como el supremo de B y se denota por $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$

DEFINICIÓN 1.2 Se define el límite inferior de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como el ínfimo de B y se denota por $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$

TEOREMA 1.1 Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales Entonces se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

DEFINICIÓN 1.3 Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de funciones definida en $\Omega \subset \mathbb{R}$. se define que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada en Ω , si existe un $M > 0$ tal que, para todo $x \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene $|f_n(x)| \leq M$.

DEFINICIÓN 1.4 Sea $\{f_n\}_{n \in B}$ una familia de funciones definida en $\Omega \subset \mathbb{R}$. Se define que $\{f_n\}_{n \in B}$ es equicontinua en Ω , si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon$ siempre que $|x_1 - x_2| < \delta$ para todo $x_1, x_2 \in \Omega$

DEFINICIÓN 1.5 Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de funciones definida sobre $\Omega \subset \mathbb{R}$. Se define que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en Ω a una función $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que, si $n > n_0$, $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para cualquier $x \in \Omega$.

TEOREMA 1.2 (teorema del valor medio) Sea $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en (a, b) , existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

TEOREMA 1.3 (Ascoli-Arzelà) Sea $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una familia de funciones definida en un conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{R}$, la cual es uniformemente acotada y equicontinua entonces existe

una subsucesion $\{f_{m_n}\}_{m_n \in \mathbb{N}}$ la cual es uniformemente convergente.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ es uniformemente acotada y equicontinua en Ω hemos de probar que f es un subconjunto relativamente compacto de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$ y para ello basta demostrar que toda una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset f$, podemos extraer de ella una sucesión convergente en $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$.

Se construye una subsucesion que converge en $Q \cap \Omega$ el conjunto de todos los puntos racionales de Ω usando para ello el principio de selección diagonal de antor como $Q \cap \Omega$ es numerable, podemos suponer elegida una enumeración del mismo $Q \cap \Omega = \{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Por ser f uniformemente acotada en \mathbb{R} , en particular la sucesión $\{\varphi_n(r_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada en \mathbb{R} , con la que por el teorema de Bolzano-Weierstrass podemos asegurar que existe una subsucesión $\{\varphi_{n_1}\}_{n_1 \in \mathbb{N}} \subset \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{\varphi_{n_1}(r_1)\}_{n_1 \in \mathbb{N}}$ es convergente en Ω .

Observemos que los términos de la subsucesión conservan el orden relativo que tenían en la sucesión de partida, es decir, $1_1 < 2_1 < 3_1 < \dots$ por la misma razón que precedentemente, la sucesión $\{\varphi_{n_1}(r_1)\}_{n_1 \in \mathbb{N}}$ está acotada en \mathbb{R} , con lo que existe una subsucesión

$$\{\varphi_{n_2}\}_{n_2 \in \mathbb{N}} \subset \{\varphi_{n_1}\}_{n_1 \in \mathbb{N}} \text{ tal que } \{\varphi_{n_2}(r_2)\}_{n_2 \in \mathbb{N}} \text{ es convergente en } \mathbb{R}$$

obsérvese que evidentemente $\{\varphi_{n_1}(r_1)\}_{n_1 \in \mathbb{N}}$ es también convergente en \mathbb{R} por ser una subsucesión de una sucesión convergente de manera recurrente, se obtiene que para todo entero \mathbb{N} existe una subsucesión

$$\{\varphi_{n_{k+1}}\}_{n_{k+1} \in \mathbb{N}} \subset \{\varphi_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}} \text{ tal que } \{\varphi_{n_{k+1}}(r_j)\}_{n_{k+1} \in \mathbb{N}} \text{ es convergente en } \mathbb{R}$$

para todo $j = 1, \dots, k, k + 1$ consideremos entonces la denominada sucesión diagonal, $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, es claro que por mantenerse el orden en cada subsucesión, $n_n \geq n$, por tanto $\{\varphi_{n_n}\}_{n_n \in \mathbb{N}}$ es una verdadera subsucesión de $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, y además, como por construir, para cada \mathbb{N} se satisface que $\{\varphi_{n_n}\}_{n_n \in \mathbb{N}} \subset \{\varphi_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}}$, se obtiene que $\{\varphi_{n_n}(r_k)\}_{n_n \in \mathbb{N}}$ para todo entero \mathbb{N} , es decir, existe

$\lim_{n_n \rightarrow \infty} \varphi_{n_n}(r)$ es convergente en \mathbb{R} , para todo $r \in Q \cap \Omega$ de la demostración se prueba que la subsucesión $\{f_{m_n}\}_{m_n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente convergente en \mathbb{R} .

1.11 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

En esta sección, se mostrará un resultado importante, al definir desigualdades diferenciales, demostrar el teorema de Peano y solución superior e inferior de una Ecuación Diferencial Fraccionaria citado en el texto [5] el cual posteriormente, servirá para desarrollar las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarios.

DEFINICIÓN 1.6 Sean I_1, I_2 intervalos abiertos en \mathbb{R} , $\Omega = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto. La clase de aplicaciones continuas de Ω hacia \mathbb{R} es denotado por $C(\Omega, \mathbb{R})$ si f es un miembro de esta clase, se escribirá $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ y se define

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$ e $y' = dy/dx$.

DEFINICIÓN 1.7 Una función diferenciable $\Phi: I_1 \rightarrow I_2$ en I_1 se define una solución de la ecuación $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$ sobre I_1 si:

1. El gráfico de Φ en I_1 , esto es, $\{(x, \Phi(x)) \in \Omega / x \in I_1\}$ está contenido en Ω .
2. $\Phi'(x) = f(x, \Phi(x))$ para todo $x \in I_1$ y $\Phi(x_0) = y_0$ (1.2)

Encontrar al menos una solución de la ecuación (1.1) no siempre es posible, encontrar la solución con la forma de la ecuación para facilitar el desarrollo del trabajo consideremos la equivalencia de la ecuación (1.1).

El teorema fundamental del cálculo nos brinda una fórmula de cómo puede ser una solución de la ecuación (1.1).

dada una ecuación de la forma

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (1.3)$$

Para todo $x \in I_1$. Se entiende que una solución en I_1 para esta ecuación, es una función continua Φ de variable real definida en I_1 , tal que $(x, \Phi(x)) \in \Omega, \forall x \in I_1$ y además,

$$\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi(t)) dt, \forall x \in I_1$$

TEOREMA 1.4 Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, $(x_0, y_0) \in \Omega$. Entonces se afirma que la función $\Phi(x)$ es solución de la ecuación $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$ si y solo si $\Phi(x)$ es solución de la ecuación $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$.

DEMOSTRACIÓN

(\rightarrow) Si $\Phi(t)$ es solución de (1.1) entonces

$$\begin{cases} \Phi'(x) = f(x, \Phi(x)) \\ \Phi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

integrando y usando el teorema fundamental del cálculo se obtiene

$$\Phi(x) - y_0 = \Phi(x) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^x \Phi'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, \Phi(t)) dt$$

por lo tanto,

$$\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi(t)) dt$$

(\leftarrow) Si

$$\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi(t)) dt$$

entonces

$$\Phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi(t)) dt = y_0$$

además, del teorema fundamental del cálculo se sigue que

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \Phi(t)) dt \right)$$

$$\Phi'(x) = f(x, \Phi(x))$$

1.12 DESIGUALDADES DIFERENCIALES

En esta sección se definen derivadas, sub-función, sobre-función y algunos resultados fundamentales de las desigualdades diferenciales citado en el texto [5] que juegan un papel importante para el estudio de solución de la ecuación (1.1).

Sean las derivadas de Dini denotadas como:

$$D^+y(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right)$$

$$D_+y(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \inf \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right)$$

$$D^-y(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \sup \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right)$$

$$D_-y(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \inf \left(\frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right)$$

donde $y \in C([x_0, x_0 + a), \mathbb{R})$, $a > 0$. Ahora cuando $D^+y(x) = D_+y(x)$, se dirá que existe la derivada por la derecha y será denotada por $y'_+(x)$ y cuando $D^-y(x) = D_-y(x)$, se dirá que existe la derivada por la izquierda y será denotada por $y'_-(x)$.

DEFINICIÓN 1.8 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 , $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ y la ecuación $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$ sea además, $v \in C([x_0, x_0 + a), \mathbb{R})$, tal que $v'_+(x)$ existe para todo $x \in [x_0, x_0 + a)$ y $(x, v(x)) \in \Omega$. Luego, si $v(x)$ satisface la desigualdad diferencial $v'_+(x) < f(x, v(x))$, $\forall x \in [x_0, x_0 + a)$

se define $v(x)$ sub-función y

$$v'_+(x) > f(x, v(x)), \forall x \in [x_0, x_0 + a)$$

Se define $v(x)$ sobre-función

Algunos resultados fundamentales sobre desigualdades diferenciales son:

TEOREMA 1.5 Sea Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 , $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ y $v, w \in C([x_0, x_0 + a], \mathbb{R})$ tal que $(x, v(x)); (x, w(x)) \in \Omega$, para todo $x \in [x_0, x_0 + a)$

$$\text{Suponer, además } v(x_0) < w(x_0) \quad (1.4)$$

y para todo $x \in [x_0, x_0 + a)$, se cumple las desigualdades:

$$D_-v(x) \leq f(x, v(x)) \quad (1.5)$$

$$D_-w(x) > f(x, w(x)) \quad (1.6)$$

$$\text{entonces, } v(x) < w(x), \forall x \in [x_0, x_0 + a) \quad (1.7)$$

DEMOSTRACIÓN

Por el absurdo supóngase que la afirmación (1.7) es falsa. Entonces, sea Z el conjunto de todos los puntos x tal que $w(x) \leq v(x)$, es decir $Z = \{x \in [x_0, x_0 + a) / w(x) \leq v(x)\}$

definimos $x_1 = \inf Z$, se tiene de (1.4) que $x_0 < x_1$. Además

$$v(x_1) = w(x_1) \quad (1.8)$$

$$v(x) < w(x), \forall x \in [x_0, x_1) \quad (1.9)$$

para $h < 0$ y de las desigualdades (1.8) y (1.9), se sigue

$$\begin{aligned} v(x_1 + h) &< w(x_1 + h) \\ \Rightarrow v(x_1 + h) - v(x_1) &< w(x_1 + h) - w(x_1) \\ \Rightarrow \frac{v(x_1 + h) - v(x_1)}{h} &> \frac{w(x_1 + h) - w(x_1)}{h} \\ \Rightarrow D_-v(x_1) &\geq D_-w(x_1) \end{aligned} \quad (1.10)$$

de las desigualdades (1.4), (1.5), (1.6) y (1.10), se sigue

$$f(x_1, v(x_1)) > f(x_1, w(x_1))$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $Z = \emptyset$, luego

$$v(x) < w(x), \forall x \in [x_0, x_0 + a)$$

OBSERVACIÓN 1.1

1. En la demostración del teorema 1.5, las desigualdades (1.5) y (1.6) se reemplaza por:

$$D_-v(x) < f(x, v(x)) \tag{1.11}$$

$$D_-w(x) \geq f(x, w(x)) \tag{1.12}$$

2. La demostración del teorema 1.5 no demanda la validez de las desigualdades (1.5) y (1.6), $\forall t \in \langle x_0, x_0 + a \rangle$

el siguiente teorema, es consecuencia de la observación 1.1-2

TEOREMA 1.6 Sean Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 , $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ y $v, w \in C(\langle x_0, x_0 + a \rangle, \mathbb{R})$ tal que $(x, v(x)); (x, w(x)) \in \Omega$, para todo $x \in [x_0, x_0 + a)$

Supóngase además que:

$$v(x_0) < w(x_0) \tag{1.13}$$

para todo $x \in Z_1 = \{x \in [x_0, x_0 + a) / w(x) = v(x)\}$, se cumple las desigualdades:

$$D_-v(x) \leq f(x, v(x)) \tag{1.14}$$

$$D_-w(x) > f(x, w(x)) \tag{1.15}$$

$$\text{entonces } v(x) < w(x), \forall x \in [x_0, x_0 + a) \tag{1.16}$$

la demostración se encuentra en el texto [5]

luego se muestra que cualquier solución de la ecuación (1.1) se encuentra limitado por la sub-función y sobre-función respectivamente

TEOREMA 1.7 Sean $v(x)$ y $w(x)$ una sub-función y sobre-función con respecto a la ecuación $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$ sobre $[x_0, x_0 + a)$. Si $u(x)$ es una solución de $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$ sobre $[x_0, x_0 + a)$, tal que

$$v(x_0) = u(x_0) = w(x_0) \quad (1.17)$$

entonces

$$v(x) < u(x) < w(x), \forall x \in [x_0, x_0 + a) \quad (1.18)$$

DEMOSTRACIÓN

La demostración se dividirá en dos partes.

PARTE 1: Si $u(x) < w(x)$

en efecto, definimos $m(x) = w(x) - u(x)$, luego (1.17) se sigue

$$m'_+(x_0) > 0 \quad (1.19)$$

de esto se sigue que $m(x)$ es creciente en un pequeño intervalo $[x_0, x_0 + \varepsilon]$, lo cual implica

$$u(x) < w(x), \forall x \in [x_0, x_0 + \varepsilon] \quad (1.20)$$

$$\text{en particular, } u(x_0 + \varepsilon) < w(x_0 + \varepsilon) \quad (1.21)$$

además $\forall x \in [x_0 + \varepsilon, x_0 + a)$

$$u'(x) \leq g(x, u(x)) \quad (1.22)$$

$$w'_+(x) > g(x, w(x)) \quad (1.23)$$

luego de las desigualdades (1.21), (1.23) y el teorema 1.5 se sigue

$$u(x) < w(x), \forall x \in [x_0 + \varepsilon, x_0 + a) \quad (1.24)$$

por tanto, de las desigualdades (1.20) y (1.24)

$$u(x) < w(x), \forall x \in [x_0, x_0 + a)$$

PARTE 2: Si $u(x) > v(x)$

Similarmente se define $m(x) = v(x) - u(x)$, luego de (1.17) se sigue

$$m'_-(x_0) < 0 \quad (1.25)$$

de (1.25) se sigue que $m(x)$ es decreciente en un pequeño intervalo $[x_0, x_0 + \varepsilon]$, lo cual implica

$$v(x) < u(x), \forall x \in [x_0, x_0 + \varepsilon] \quad (1.26)$$

$$\text{en particular, } v(x_0 + \varepsilon) < u(x_0 + \varepsilon) \quad (1.27)$$

además $\forall t \in [x_0 + \varepsilon, x_0 + a)$

$$u'(x) \leq g(x, u(x)) \quad (1.28)$$

$$v'_+(x) > g(x, v(x)) \quad (1.29)$$

luego de las desigualdades (1.27) y (1.29) y el teorema 1.5 se sigue

$$v(x) < u(x), \forall x \in [x_0 + \varepsilon, x_0 + a) \quad (1.30)$$

por tanto, de las desigualdades (1.26) y (1.30)

$$v(x) < u(x), \forall x \in [x_0, x_0 + a)$$

Un resultado que se sigue del teorema 1.7 es el siguiente

COROLARIO 1.1 Sean Ω un conjunto abierto en \mathbb{R}^2 , $f_1, f_2 \in C(\Omega, \mathbb{R})$ y $f_1(x, y) < f_2(x, y), (x, y) \in \Omega$.

sean además, $y_1(x), y_2(x)$ las soluciones de

$$y'_1 = f_1(x, y), \quad y'_2 = f_2(x, y)$$

respectivamente sobre $[x_0, x_0 + a)$ tal que $y_1(x_0) < y_2(x_0)$ entonces $y_1(x) < y_2(x), \forall x \in [x_0, x_0 + a)$

la demostración está citada en el texto [5]

TEOREMA 1.8 (teorema de Peano) Sea el rectángulo $\mathbb{R}_0 = \{(x, y): [x_0, x_0 + a], |y - y_0| \leq b\} \subset \Omega$, $f \in C(\mathbb{R}_0, \mathbb{R})$, $|f(x, y)| \leq M$ en \mathbb{R}_0 y $\sigma = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, entonces la ecuación $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$ tiene al menos una solución definida en $[x_0, x_0 + \sigma]$.

Este teorema impone algunas condiciones sobre la función f para garantizar la existencia de al menos una solución d la ecuación (1.1)

DEMOSTRACIÓN

Sea una función continua $\varphi_0: [x_0 - \delta, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$, $\delta > 0$ que satisface $\varphi_0(x_0) = y_0$, $|\varphi_0(x) - y_0| \leq b$, $|f(x, y)| \leq M$ y $0 < \varepsilon \leq \delta$, a partir de $\varphi_0(x)$ se construirá una nueva función $\varphi_\varepsilon(x)$ continua en el intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Entonces se define

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in [x_0 - \delta, x_0] \\ y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_\varepsilon(t - \varepsilon)) dt, & x \in [x_0, x_0 + \rho_1] \end{cases} \quad (1.31)$$

Con $\rho_1 = \min\{\rho, \varepsilon\}$.

La función $\varphi_\varepsilon(x)$ está bien definida pues si $x_0 \leq t \leq x_0 + \rho_1$ entonces

$x_0 - \delta \leq x_0 - \varepsilon \leq t - \varepsilon \leq x_0 + \rho_1 - \varepsilon \leq x_0$, luego $\varphi_\varepsilon(t - \varepsilon) = \varphi_0(t - \varepsilon)$ y $(t, \varphi_\varepsilon(t - \varepsilon)) = (t, \varphi_0(t - \varepsilon)) \in \mathbb{R}_0$, por lo tanto, la función f puede ser definida en este punto.

Por otro lado, $\varphi_\varepsilon(x)$ es diferenciable por la forma como se ha definido y además

$$\varphi_\varepsilon(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_\varepsilon(t - \varepsilon)) dt$$

$$|\varphi_\varepsilon(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi_\varepsilon(t - \varepsilon)) dt \right|$$

$$|\varphi_\varepsilon(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, \varphi_\varepsilon(t - \varepsilon))| dt \leq M|x - x_0| \leq M\rho_1 \leq M\rho \leq b$$

Sobre $[x_0 - \delta, x_0 + \rho_1]$.

Ahora, defínase $\varphi_\varepsilon(x)$ para $[x_0 - \delta, x_0 + \rho_2]$, usando la ecuación (1.31), donde $\rho_2 = \min\{\rho, 2\varepsilon\}$. Siguiendo de esta manera se puede definir $\varphi_\varepsilon(x)$ sobre el intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \rho]$, como:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in [x_0 - \delta, x_0] \\ y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_\varepsilon(t - \varepsilon)) dt, & x \in [x_0, x_0 + \rho] \end{cases} \quad (1.32)$$

OBSERVACION I Si $x, \mu \in [x_0 - \delta, x_0 + \rho]$ entonces $|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(\mu)| \leq M|x - \mu|$

DEMOSTRACIÓN

CASO 1 Si $x_0 - \delta \leq x \leq \mu \leq x_0$ y $\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(\mu) = \varphi_0(x) - \varphi_0(\mu)$ entonces $|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(\mu)| = |\varphi_0(x) - \varphi_0(\mu)|$

$$\overline{\quad\quad\quad} \begin{array}{ccc} x_0 - \delta & x_0 & x_0 + \delta \end{array}$$

luego por el teorema 1.2, existe $u \in [x, \mu]$ y $\varphi'(u) = \frac{\varphi_0(x) - \varphi_0(\mu)}{x - \mu}$

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(\mu)| = |\varphi'(u)||x - \mu| \leq M|x - \mu|$$

CASO 2 Si $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 \leq \mu \leq x_0 + \rho$, entonces

$$\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(\mu) = \varphi_0(x) - \varphi_0(\mu)$$

$$\overline{\quad\quad\quad} \begin{array}{ccc} x_0 - \delta & x_0 & x_0 + \rho \end{array}$$

$$\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(\mu) = \varphi_0(x) - \left(y_0 + \int_{x_0}^{\mu} f(t, \varphi_\varepsilon(t - \varepsilon)) dt \right)$$

$$\begin{aligned}
|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(\mu)| &= \left| \varphi_0(x) - \left(y_0 + \int_{x_0}^{\mu} f(t, \varphi_\varepsilon(t - \varepsilon)) dt \right) \right| \\
&\leq |\varphi_0(x) - y_0| + \left| \int_{x_0}^{\mu} f(t, \varphi_\varepsilon(t - \varepsilon)) dt \right|
\end{aligned}$$

Luego, por el teorema 1.2 y la acotación de f se tiene;

$$|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(\mu)| \leq M|x_0 - x| + M|\mu - x_0| = M(x_0 - x) + M(\mu - x_0) = M|\mu - x|$$

CASO 3 Si $x_0 \leq x$, $\mu \leq x_0 + \rho$, en este caso se tiene

$$\begin{array}{c}
\text{-----} \\
x_0 - \delta \qquad \qquad \qquad x_0 \qquad \qquad \qquad x_0 + \rho
\end{array}$$

$$|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(\mu)| = \left| \int_x^{\mu} f(t, \varphi_\varepsilon(t - \varepsilon)) dt \right| \leq M|\mu - x|$$

Y con este caso termina la demostración de la observación.

Esta afirmación demuestra que la familia de funciones $\{\varphi_\varepsilon(x)\}$ es equicontinua.

La siguiente observación prueba que esta familia es uniformemente convergente y acotada.

OBSERVACION II Si $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \rho]$ entonces $|\varphi_\varepsilon(x) - y_0| \leq b$

DEMOSTRACIÓN

Si $x \in [x_0 - \delta, x_0]$,

$$|\varphi_\varepsilon(x) - y_0| = |\varphi_0(x) - y_0| \leq b$$

Si $x \in [x_0, x_0 + \rho]$,

$$|\varphi_\varepsilon(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{\mu} f(t, \varphi_\varepsilon(t - \varepsilon)) dt \right| \leq M|x - x_0| \leq M\rho \leq M \frac{b}{M} = b$$

Por el teorema 1.3 existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ tal que

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{cases} \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots > \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

la sucesión $\{\varphi_{\varepsilon_n}(x)\}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente sobre $[x_0 - \delta, x_0 + \rho]$.

Sea esta sucesión $\{\varphi_{\varepsilon_n}(x)\}$ que converge uniformemente a una función $\varphi(x)$ entonces, para $[x_0, x_0 + \rho]$ se sigue que;

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\varepsilon_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{\varepsilon_n}(t)) dt \right) \\ &= y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, \varphi_{\varepsilon_n}(t)) dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, \varphi_{\varepsilon_n}(t)) dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \end{aligned}$$

De donde se sigue que la función $\varphi(x)$ es solución de la ecuación (1.3) y por el teorema 1.4, $\varphi(x)$ es solución de la ecuación (1.1)

1.12.1 SOLUCIÓN MAXIMAL Y MINIMAL

En esta sección, se mostrará la existencia de las soluciones máxima y mínima de la ecuación (1.1)

DEFINICIÓN 1.9 Se define $\mu(x)$ una solución maximal de la ecuación $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$, si para toda $y(x)$ solución de la ecuación $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$ y cumple con la desigualdad:

$$y(x) \leq \mu(x), \forall x \in [x_0, x_0 + a] \quad (1.33)$$

DEFINICIÓN 1.10 Se define $\mu(x)$ una solución minimal de la ecuación $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$, si para toda $y(x)$ solución de la ecuación $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$ y cumple con la desigualdad:

$$y(x) \geq \mu(x), \forall x \in [x_0, x_0 + a] \quad (1.34)$$

Véase ahora, la existencia de las soluciones maximal y minimal de la ecuación (1.1), bajo las hipótesis del teorema 1.8.

TEOREMA 1.9 Sea el rectángulo $\mathbb{R}_0 = \{(x, y): x \in [x_0, x_0 + a], |y - y_0| \leq b\} \subset \Omega$, $f \in C(\mathbb{R}_0, \mathbb{R})$ y $|f(x, y)| \leq M$ sobre \mathbb{R}_0 . Entonces existe la solución máxima y un mínima de la ecuación $y'(x) = f(x, y(x))$ e $y(x_0) = y_0$ sobre $[x_0, x_0 + \rho]$, donde $\rho = \min \left\{ a, \frac{b}{2M+b} \right\}$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $0 < \varepsilon \leq \frac{b}{2}$. Considerando la ecuación

$$\begin{cases} y'(x, \varepsilon) = f(x, y(x)) + \varepsilon \\ y(x_0, \varepsilon) = y_0 + \varepsilon \end{cases} \quad (1.35)$$

definiendo $f_\varepsilon(x, y) = f(x, y) + \varepsilon$

Se observa que $f_\varepsilon(x, y)$ está bien definida y continua sobre $\mathbb{R}_\varepsilon = \left\{ (x, y) : x \in [x_0, x_0 + a], |y - (y_0 + \varepsilon)| \leq \frac{b}{2} \right\}$, $\mathbb{R}_\varepsilon \subset \mathbb{R}_0$ y sobre \mathbb{R}_ε , $|f_\varepsilon(x, y)| \leq M + \frac{b}{2}$

del teorema 1.8, se sigue que existe una solución $y_\varepsilon(x, \varepsilon)$ de la ecuación (1.35) sobre el intervalo $[x_0, x_0 + \rho]$, donde $\rho = \min \left\{ a, \frac{b}{2M+b} \right\}$

ahora para $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ y $\forall x \in [x_0, x_0 + \rho]$ se cumple

$$y(x_0, \varepsilon_2) < y(x_0, \varepsilon_1)$$

$$y'(x, \varepsilon_2) \leq f(x, y(x, \varepsilon_2)) + \varepsilon_2$$

$$y'(x, \varepsilon_1) > f(x, y(x, \varepsilon_1)) + \varepsilon_2$$

luego, del teorema 1.5 se sigue $y(x, \varepsilon_2) < y(x, \varepsilon_1), \forall x \in [x_0, x_0 + \rho]$

defínase la familia de funciones

$$y(x, \varepsilon) = y(x_0, \varepsilon) + \int_{x_0}^x f_\varepsilon(t, y) dt$$

la cual es equicontinua y uniformemente acotada sobre $[x_0, x_0 + \rho]$, se sigue por el teorema 1.3 que existe un sucesión decreciente $\{\varepsilon_n\}$, tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array} \right. \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots > \varepsilon_n \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$ y el limite $\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(x, \varepsilon_n)$

existe y converge uniformemente sobre $[x_0, x_0 + \rho]$. Además, se observa que $\mu(x_0) = y_0$. La continuidad uniforme de f implica que $f(x, y(x, \varepsilon_n))$ tiende uniformemente a $f(x, \mu(x))$ cuando $n \rightarrow \infty$, y por tanto,

$$y(x, \varepsilon_n) = y_0 + \varepsilon_n + \int_{x_0}^x f(t, y(t, \varepsilon_n)) dt$$

muestra que el límite de $\mu(x)$ es una solución de la ecuación (1.1) sobre $[x_0, x_0 + \rho]$.

Ahora se muestra que $\mu(x)$ es la solución maximal deseada de la ecuación (1.1) sobre $[x_0, x_0 + \rho]$ satisface (1.33)

Sea $y(x)$ cualquier solución de la ecuación (1.1) existente sobre $[x_0, x_0 + \rho]$. Entonces,

$$y(x_0) = y_0 < y_0 + \varepsilon = y(x_0, \varepsilon)$$

$$y'(x) < f(x, y(x)) + \varepsilon$$

$$y'(x, \varepsilon) \geq f(x, y(x, \varepsilon)) + \varepsilon$$

para todo $[x_0, x_0 + \rho]$ y $\varepsilon \leq \frac{b}{2}$.

De la observación 1.1-1 y el teorema 1.3 se sigue $y(x) < y(x, \varepsilon), x \in [x_0, x_0 + \rho]$

La unicidad de la solución maximal muestra que $y(x, \varepsilon)$ tiene uniformemente a $\mu(x)$

Sobre $[x_0, x_0 + \rho]$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

La demostración de la existencia de la solución minimal se hace de similar forma hecha para la solución maximal. Por tanto, la demostración del teorema 1.9 es completa.

CAPÍTULO II

CÁLCULO FRACCIONARIO

En este capítulo, se establecen algunas definiciones básicas acerca de ciertos espacios de funciones, funciones especiales y el desarrollo del cálculo fraccionario citados en los textos [1], [3], [4] y [7] las cuales servirán para entender los conceptos fundamentales del presente trabajo.

2.1 ESPACIOS DE FUNCIONES

Es necesario definir ciertos espacios de funciones en los cuales se va desarrollar el presente trabajo. Para ello, se considera: $\Omega = [a, b]$ un dominio en \mathbb{R} , K un subconjunto compacto de Ω , $p \geq 1$ y $k \in \mathbb{Z}_0^+$. Con estas consideraciones, se define:

$$C(\Omega) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}/f \text{ es continua} \}$$

$$C^k(\Omega) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}/f \text{ es } k \text{ veces continuamente diferenciable}\}$$

$$C^\infty(\Omega) = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}/f \text{ es infinitamente diferenciable}\}$$

$$C_0[a, b] = C[a, b]$$

$$L_p(\Omega) = \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}/f \text{ es medible y } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

$$AC[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ es absolutamente continua} \}$$

$$\mathfrak{R}(g)[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ es Riemann_tieltjes integrable a } g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lo cual es monótona creciente}\}$$

2.2 FUNCIONES ESPECIALES

En esta sección se estudia algunas funciones especiales como la función gamma, función beta, función psi, función de Miller-Ross y la función gamma incompleta, que juegan un papel importante en el estudio del cálculo fraccionario

2.2.1 FUNCIÓN GAMMA DE EULER

Una de las funciones que se utiliza para llegar a obtener la integral fraccionaria de Riemann-Liouville es la función Gamma de Euler, que generaliza la función factorial de un número

DEFINICIÓN 2.1 La función gamma está definido en $\Gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

PROPIEDADES

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \end{aligned}$$

Haciendo cambio de variable $t = z^2$, se tiene:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} z^{-1} e^{-z^2} 2z dz \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz \end{aligned}$$

Usando este resultado, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= \left(2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz\right) \left(2 \int_0^{\infty} e^{-w^2} dw\right) \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-z^2} e^{-w^2} dz dw \\ &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(z^2+w^2)} dz dw \end{aligned}$$

Transformada a coordenadas polares, se tiene:

$$\begin{aligned} r^2 &= z^2 + w^2 \\ \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} (-2r) dr d\theta \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-r^2} (-2r) dr d\theta \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{a \rightarrow \infty} e^{-r^2} \Big|_0^a d\theta \\ &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} -1 d\theta \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \end{aligned}$$

Y por lo tanto $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$3. \text{ Si } z > 0, \text{ entonces } \Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (2.2)$$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^z e^{-t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[(-t^z e^{-t} \Big|_0^b) + \int_0^b z t^{z-1} e^{-t} dt \right] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-b^z e^{-b} - 0] + \lim_{b \rightarrow \infty} z \int_0^b t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

$$4. \Gamma(z + 1) = z!, \forall z \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

2.2.2 FUNCIÓN BETA

La función beta es una función que está íntimamente relacionada con la función gamma y es utilizada muchas veces para evitar ciertas combinaciones de valores de la función gamma.

DEFINICIÓN 2.2 La función beta se define en $\beta: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^{y-1} ds, \quad \text{donde } x > 0, y > 0$$

Para establecer la relación entre la función gamma y la función beta se consideran las siguientes propiedades.

PROPIEDADES:

1. Si $x > 0, y > 0$ entonces

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (2.4)$$

2. Si $x > 0, y > 0$ entonces

$$\beta(x, y) = \beta(y, x) \quad (2.5)$$

3. Si $m < x < m + 1$, con $x = \alpha + m$ y $0 < \alpha < 1$, entonces

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi x)} \quad (2.6)$$

4. Si $2x \notin \mathbb{Z}_0^-$, entonces

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\Gamma(2x)\sqrt{\pi} \quad (2.7)$$

2.2.3 FUNCIÓN PSI

DEFINICIÓN 2.3 La función psi o función poligamma es una función $\psi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(t) = \frac{1}{\Gamma(t)} \frac{d}{dt} \Gamma(t), \quad t > 0$$

PROPIEDADES

1. $\psi(t+1) = \Gamma(t) + \frac{1}{t}$, $t > 0$
2. Si $t = 1$, entonces se tiene la constante de Euler-Mascheroni,
 $-\psi(1) = \gamma \approx 0.577215664901532860606512090 \dots$
3. Si $\alpha > -1$ y $\beta > -1$, entonces:

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - x^\beta}{1-x} dx = \psi(\beta+1) - \psi(\alpha+1)$$

2.2.4 FUNCIÓN DE MILLER ROSS

La función de Miller-Ross generaliza a la función exponencial

DEFINICIÓN 2.4 Sea $t \in \mathbb{R}$, $v > -1$ y $a \in \mathbb{R}$. La función de Miller-Ross denotado por $E_t(v, a)$, se define de la siguiente manera:

$$E_t(v, a) = t^v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(v+k+1)}$$

OBSERVACIÓN 2.1 Si se denota

$$E_{1,v+1}(at) =: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(v+k+1)} \text{ entonces } E_t(v, a) = t^v E_{1,v+1}(at)$$

2.2.5 FUNCIÓN GAMMA INCOMPLETA

Existen dos tipos de función gamma incompleta, una para el caso en el que varía el límite inferior de integración, y otro cuando varía el límite superior

DEFINICIÓN 2.5 La función gamma incompleta $\Gamma: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ para el caso en el que varía el límite inferior de integración, es definida por:

$$\Gamma(z, x) = \int_x^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \text{ donde } x > 0 \text{ y } z > 0$$

DEFINICIÓN 2.6 La función gamma incompleta $\Gamma: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ para el caso en el que varía el límite superior de integración, es definida por:

$$\gamma^*(z, x) = \int_0^x t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{donde } x > 0 \text{ y } z > 0$$

2.3 CÁLCULO FRACCIONARIO RIEMANN-LIOUVILLE

Aquí se presentan los fundamentos del cálculo fraccionario, el cual como se menciona es una generalización del cálculo tradicional que extiende los operadores de derivación e integración a un orden arbitrario.

Se comienza con la integral fraccional que se obtiene de manera bastante intuitiva a partir de la integral entera iterada de Cauchy y se desarrollan algunos ejemplos para las señales más comunes utilizadas en el área ecuaciones diferenciales fraccionarias.

Luego a partir de la integral se pueden definir varias formas para la derivada de orden fraccional: la definición de Riemann-Liouville para la cual también se desarrollan ejemplos como en el caso de la integral y derivada fraccional, luego se muestran otras definiciones alternativas como la de Caputo.

Para los fines de este trabajo, se estudia la integral y derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, así como sus principales propiedades, para luego finalmente estudiar las ecuaciones diferenciales fraccionarias y formular modelos matemáticos para un movimiento de un proyectil lo cual es el objetivo central del presente trabajo.

2.3.1 INTEGRAL FRACCIONARIA

Existen muchos métodos a través de los cuales se llega a obtener la integral fraccionaria de una función tales como el de función de Green, la formula integral de Cauchy, integración por partes, transformada de Laplace, etc de una función. Por facilidad y didáctica, en este trabajo se obtendrá dicha integral mediante el proceso de integrales iteradas.

se denota por: ${}_a I_x f(x) = \int_a^x f(t) dt$

se tiene igual forma que: ${}_a I_x g(x) = \int_a^x g(x_1) dx_1$

Ahora, si se considera $g(x_1)$ como ${}_a I_{x_1} g(x)$, entonces

$$\begin{aligned} {}_a I_x g(x) &= \int_a^x g(x_1) dx_1 \\ &= \int_a^x \int_a^{x_1} f(t) dt dx_1 \end{aligned}$$

La que usando la notación dada inicialmente sería:

$${}_a I_x g(x) = {}_a I_x ({}_a I_{x_1} f(x)) = {}_a I_x^2 f(x)$$

Luego, considerando $a = 0$, se tiene:

$${}_0 I_x^2 f(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} f(t) dt dx_1$$

Realizando un cambio de variable en el dominio de integración, como se indica

$$D_1 = \{(t, x_1) / 0 \leq t \leq x_1 \wedge 0 \leq x_1 \leq x\}$$

$$D_2 = \{(x_1, t) / t \leq x_1 \leq x \wedge 0 \leq t \leq x\}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} {}_0 I_x^2 f(x) &= \int_0^x \int_t^x f(t) dx_1 dt \\ &= \int_0^x f(t) \int_t^x dx_1 dt \\ &= \int_0^x f(t)(x - t) dt \end{aligned}$$

Ahora integramos para una integración iterada de tercer orden se tiene:

$${}_0I_x^3 f(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} f(t) dt dx_2 dx_1$$

Y procediendo de manera análoga al caso anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} {}_0I_x^3 f(x) &= \int_0^x \int_0^{x_1} \int_t^{x_1} f(t) dx_2 dt dx_1 \\ &= \int_0^x \int_0^{x_1} f(t)(x_1 - t) dt dx_1 \\ &= \int_0^x \int_t^x f(t)(x_1 - t) dx_1 dt \\ &= \int_0^x f(t) \frac{(x_1 - t)^2}{2} \Big|_t^x dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x f(t) (x - t)^2 dt \end{aligned}$$

Luego para n-integral iterada, se tendría:

$${}_0I_x^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt \quad (2.8)$$

En efecto: usando el principio de inducción matemática.

Supongamos que para n=k se cumple que:

$${}_0I_x^k f(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{k-1} dt$$

Luego para $n=k+1$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 {}_0I_x^{k+1} f(x) &= {}_0I_x \left({}_0I_x^k f(x) \right) \\
 &= \int_0^x \frac{1}{(k-1)!} \int_0^{x_1} f(t)(x_1-t)^{k-1} dt dx_1 \\
 &= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x \int_0^{x_1} f(t)(x_1-t)^{k-1} dt dx_1 \\
 &= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x \int_t^x f(t)(x_1-t)^{k-1} dx_1 dt \\
 &= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x f(t) \frac{(x_1-t)^k}{k} \Big|_t^x dt \\
 &= \frac{1}{k!} \int_0^x f(t)(x-t)^k dt
 \end{aligned}$$

Por tanto

$${}_0I_x^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt, \forall n \in \mathbb{N}$$

Esta fórmula es válida para todo n natural y es conocida como la fórmula de Cauchy. De manera natural, este resultado puede generalizarse para una integral de orden arbitrario $\alpha > 0$, haciendo uso de la función gamma, la cual generaliza el factorial de un número, de manera que la integral queda expresado como:

$${}_0I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt$$

La expresión anterior es denominada integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

DEFINICIÓN 2.7 La integración fraccionaria de tipo Riemann-Liouville de orden α de la función $f \in L^1[a, b]$ denotado por ${}_0I_x^\alpha f(x)$, se define por:

$${}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \text{ donde } \alpha > 0, x \in [a, b] \quad (2.9)$$

OBSERVACIÓN 2.2

1. Si $0 < \alpha < 1$, la integral fraccionaria ${}_aI_x^\alpha f(x)$, es impropia, pero convergente.
2. Si $\alpha < 0$, la integral fraccionaria ${}_aI_x^\alpha f(x)$ diverge
3. Si $\alpha > 0$, la integral fraccionaria ${}_aI_x^\alpha f(x)$ deja de ser impropia

EJEMPLO 2.1 Hallar la integral fraccionaria de orden $\alpha > 0$, de la función $f(x) = (x - a)^u, u > -1$

SOLUCIÓN

$${}_aI_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt$$

$${}_aI_x^\alpha (x-a)^u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^u dt$$

Mediante cambio de variable

$$s = \frac{t-a}{x-a} \rightarrow \begin{cases} t = s(x-a) + a \\ dt = (x-a)ds \end{cases}$$

Se tiene:

$${}_aI_x^\alpha (x-a)^u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x - [s(x-a) + a])^{\alpha-1} [s(x-a)]^u (x-a) ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x - sx + sa - a)^{\alpha-1} s^u (x-a)^{u+1} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [x(1-s) + a(s-1)]^{\alpha-1} s^u (x-a)^{u+1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [x-a]^{\alpha-1} [1-s]^{\alpha-1} s^u (x-a)^{u+1} ds \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+u}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [1-s]^{\alpha-1} s^u ds \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+u}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{(u+1)-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+u}}{\Gamma(\alpha)} \beta(u+1, \alpha) \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+u}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{\Gamma(u+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(u+\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u+\alpha+1)} (x-a)^{\alpha+u}, u > -1, \alpha > 0 \tag{2.10}
\end{aligned}$$

TEOREMA 2.1 Si $f \in C^1[a, b]$, entonces $\lim_{\alpha \rightarrow 0} {}_a I_x^\alpha f(x) = f(x)$

En efecto,

$$\begin{aligned}
{}_a I_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) (x-t)^{\alpha-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[-f(t) \frac{(x-t)^\alpha}{\alpha} \Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^\alpha}{\alpha} f'(t) dt \right] \\
&= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \left[0 - f(a) \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \int_a^x f'(t) (x-t)^\alpha dt \right] \\
&= \frac{-1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[-f(a) (x-a)^\alpha - \int_a^x f'(t) (x-t)^\alpha dt \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} {}_a I_x^\alpha f(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[-f(a)(x - a)^\alpha - \int_a^x f'(t)(x - t)^\alpha dt \right] \\
&= \frac{-1}{\Gamma(1)} [-f(a) - (f(x) - f(a))] \\
&= -1[-f(a) - (f(x) - f(a))] = f(x)
\end{aligned}$$

TEOREMA 2.2 Si f es solamente continua, entonces $\lim_{\alpha \rightarrow 0} {}_a I_x^\alpha f(x) = f(x)$

En efecto:

$$\begin{aligned}
{}_a I_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x - t)^{\alpha-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^x (f(t) - f(x) + f(x))(x - t)^{\alpha-1} dt \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^x (f(t) - f(x))(x - t)^{\alpha-1} dt + \int_a^x f(x)(x - t)^{\alpha-1} dt \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (f(t) - f(x))(x - t)^{\alpha-1} dt + \frac{f(x)(x - t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}
\end{aligned}$$

A hora como f es continua, entonces, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si

$$|t - x| < \delta \text{ entonces } |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

Reescribiendo la integral anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
{}_a I_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (f(t) - f(x))(x - t)^{\alpha-1} dt + \int_{x-\delta}^x (f(t) - f(x))(x - t)^{\alpha-1} dt \\
&\quad + \frac{f(x)(x - t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}
\end{aligned}$$

Sean:

$$A = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (f(t) - f(x))(x-t)^{\alpha-1} dt$$

$$B = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x (f(t) - f(x))(x-t)^{\alpha-1} dt$$

Entonces ${}_a I_x^\alpha f(x) = A + B + \frac{f(x)(x-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$

De la expresion B se tiene,

$$\begin{aligned} |B| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x (f(t) - f(x))(x-t)^{\alpha-1} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x |f(t) - f(x)| |x-t|^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x |f(t) - f(x)| (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &< \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \left(-\frac{(x-t)^\alpha}{\alpha} \Big|_{x-\delta}^x \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \left(0 - \frac{(x-x-\delta)^\alpha}{\alpha} \right) = \frac{\varepsilon \delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

Como $\delta \rightarrow 0$, implica que $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces fijando δ , se tiene que si $\alpha \rightarrow 0$, $|B| < \varepsilon$.

Por otro lado, se considera que δ fijo y se tiene que:

$$|A| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (f(t) - f(x))(x-t)^{\alpha-1} dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} |f(t) - f(x)| (x-t)^{\alpha-1} dt \\
&\leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (x-t)^{\alpha-1} dt, M = \max_{a < x < b} |f(x)| \\
&\leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha)} \left(-\frac{(x-t)^\alpha}{\alpha} \Big|_a^{x-\delta} \right) \\
&= \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} ((x-t)^\alpha - \delta^\alpha)
\end{aligned}$$

A demás como

$$\begin{aligned}
|{}_a I_x^\alpha f(x) - f(x)| &= \left| A + B + \frac{f(x)(x-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - f(x) \right| \\
&= \left| A + B + f(x) \left(\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right) \right| \\
&\leq |A| + |B| + |f(x)| \left| \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right|
\end{aligned}$$

Entonces: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |{}_a I_x^\alpha f(x) - f(x)| < \varepsilon,$ (2.11)

2.3.2 DERIVADA FRACCIONARIA

DEFINICIÓN 2.8 Sean $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $[\alpha] := n$ el menor entero mayor que α . La derivada fraccionaria del tipo Riemann-Liouville de orden α de una función f , es definida mediante

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0, \tag{2.12}$$

donde ${}_a I_x^{n-\alpha} f \in C^n[a, b]$

la ecuación (2.12), también se puede escribir de la siguiente forma

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[{}_a I_x^{(n-\alpha)} f(x) \right], \alpha > 0 \tag{2.13}$$

OBSERVACIÓN 2.3 La derivada fraccionaria para casos enteros, coincide con la derivada usual. En efecto, $\alpha = n$, luego $[n] = n + 1$, se tiene

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n+1-n)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \int_a^x (x-t)^{n+1-n-1} f(t) dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \int_a^x f(t) dt, \\ &= \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \int_a^x f(t) dt, \\ &= \frac{d^n}{dx^n} f(x), \quad (\text{por el teorema (1.1)}). \end{aligned}$$

En consecuencia, se puede decir que la gran diferencia entre la derivada entera y la derivada fraccionaria es el núcleo de la integral $\frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}$. Así mismo, se puede indicar que para calcular la derivada fraccionaria de una función f en un punto x , es necesario conocer los valores de la función f desde a hasta x , cuya información acumulada a través del núcleo de la integral; para finalmente determinar la razón de cambio de dicha información.

EJEMPLO 2.2 Calcular la derivada fraccionaria de orden α , de la función

$$f(x) = x^\mu, \quad \mu > -1 \text{ y } \alpha > 0.$$

SOLUCIÓN

Entonces, puesto que por (2.10) se tiene que la integral fraccionaria con límite inferior de integración cero de $f(x) = x^\mu$ es

$${}_0 I_x^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} x^{\alpha+\mu},$$

luego

$$\begin{aligned} {}_0D_x^\alpha x^\mu &= D^n {}_0I_x^{n-\alpha} x^\mu, \quad \text{donde } n = [\alpha] \\ &= \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(n - \alpha + \mu + 1)} D^n x^{n-\alpha+\mu}, \\ &= \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(n - \alpha + 1)} x^{\mu-\alpha}, \end{aligned}$$

por lo tanto ${}_0D_x^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(u - \alpha + 1)} x^{\mu-\alpha}$ (2.14)

EJEMPLO 2.3 Calcular la derivada fraccionaria de la función identidad $f(x) = x^\mu$, $\mu = 1$ y $\alpha = 1/2$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} {}_0D_x^\alpha x^\mu &= \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(u - \alpha + 1)} x^{\mu-\alpha} \\ {}_0D_x^{1/2} x &= \frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{1/2} \end{aligned}$$

por lo tanto: ${}_0D_x^{1/2} x = \sqrt{\frac{4x}{\pi}}$

EJEMPLO 2.4 Calcular la derivada fraccionaria de la función cuadrática $f(x) = x^\mu$, $\mu = 2$ y $\alpha = 1/2$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} {}_0D_x^{1/2} x^2 &= \frac{\Gamma(2 + 1)}{\Gamma\left(2 - \frac{1}{2} + 1\right)} x^{2-\frac{1}{2}} \\ {}_0D_x^{1/2} x^2 &= \frac{2}{\Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right)} x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

por lo tanto: ${}_0D_x^{1/2} x^2 = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$

2.3.3 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL Y DERIVADA FRACCIONARIA

En el cálculo clásico existen ciertas propiedades que en el cálculo fraccionario se cumplen en forma análoga, con algunas consideraciones adicionales; con lo cual, el presente capítulo se muestra que muchas propiedades del cálculo clásico se cumplen en el cálculo fraccionario.

En adelante, la integral fraccionaria y derivada fraccionaria se referirá a la integral de Riemann-Liouville.

2.3.4 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL FRACCIONARIA

En esta sección se enuncia una serie de propiedades de la integral fraccionaria, con el fin de resaltar las principales diferencias y analogías entre el comportamiento de ésta y la integral de orden entero clásico.

TEOREMA 2.3 Sea $f \in L_1[a, b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Entonces la integral fraccionaria ${}_a I_x^\alpha f$ existe para casi todo $x \in [a, b]$. Además la función ${}_a I_x^\alpha f$ es un elemento de $L_1[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN

La integral fraccionaria, definida en (2.9) se puede escribir del siguiente modo

$$\int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-s) \psi(s) ds,$$

donde

$$\phi(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1}, & \text{si } 0 < x \leq b-a \\ 0, & x \in (-\infty, 0] \cup (b-a, \infty) \end{cases}, \quad \psi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & x \in (-\infty, a) \cup (b, \infty) \end{cases}$$

para construir: $\phi, \psi \in L_1(\mathbb{R})$ utilizamos la definición de la convolucion que es continua por tramos, entonces se afirma $\phi * \psi \in L_1(\mathbb{R})$

$$\phi(x) * \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-s) \psi(s) ds, \text{ para } x \geq 0$$

por lo tanto

$${}_a I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

existe y está bien definida, asimismo ${}_a I_x^\alpha f \in L_1(\mathbb{R})$

Considerando las condiciones de existencia de la integral fraccionaria, se puede seguir trabajando sin preocuparse si está definida o no.

TEOREMA 2.4 Si $f \in C[a, b]$ se tiene $\lim_{\alpha \rightarrow 0} {}_a I_x^\alpha f(x) = f(x)$,

Entonces ${}_a I_x^0 f(x) = f(x)$

DEMOSTRACIÓN

Dado que $f \in C[a, b]$, en tal caso se escribirá (2.9) en la forma

$$\begin{aligned} {}_a I_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} [f(s) - f(x)] ds + \frac{f(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} [f(s) - f(x)] ds + \frac{f(x)(x-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

puesto que f es continua, entonces $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$|f(s) - f(x)| < \epsilon, \quad \text{con } |s - x| < \delta, \tag{2.15}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 {}_a I_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (x-s)^{\alpha-1} [f(s) - f(x)] ds \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x (x-s)^{\alpha-1} [f(s) - f(x)] ds + \frac{f(x)(x-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}
 \end{aligned}$$

sean

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (x-s)^{\alpha-1} [f(s) - f(x)] ds \\
 B &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x (x-s)^{\alpha-1} [f(s) - f(x)] ds
 \end{aligned}$$

ahora considere B de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 |B| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x (x-s)^{\alpha-1} [f(s) - f(x)] ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x |x-s|^{\alpha-1} |f(s) - f(x)| ds, \quad \text{por (2.15)} \\
 &< \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\delta}^x |x-s|^{\alpha-1} ds \\
 |B| &< \frac{\epsilon \delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)};
 \end{aligned}$$

al escoger un δ fijo y $\alpha \rightarrow 0$, se tiene $|B| < \epsilon$. Con este δ fijo, se estimará A.

$$\begin{aligned}
 |A| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (x-s)^{\alpha-1} [f(s) - f(x)] ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{x-\delta} (x-s)^{\alpha-1} |f(s) - f(x)| ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[-\frac{1}{\alpha} (x-s)^\alpha \right]_a^{x-\delta} \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (\delta^\alpha - (x-a)^\alpha), \end{aligned}$$

donde $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, x-\delta]} |f(x)|$.

luego $\lim_{\alpha \rightarrow 0} |A| = 0$

por lo tanto

$$\begin{aligned} |{}_a I_x^\alpha f(x) - f(x)| &= \left| A + B + \frac{f(x)(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - f(x) \right| \\ &= \left| A + B + f(x) \left(\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right) \right| \end{aligned}$$

$$|{}_a I_x^\alpha f(x) - f(x)| \leq |A| + |B| + |f(x)| \left| \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - 1 \right| \quad (2.16)$$

luego, de acuerdo a las estimaciones hechas anteriormente se tiene

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} |{}_a I_x^\alpha f(x) - f(x)| \leq \epsilon, \quad (2.17)$$

y como $\epsilon > 0$ es arbitrario, puede tomarse bastante pequeño como se quiera, por lo tanto

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} |{}_a I_x^\alpha f(x) - f(x)| = 0,$$

en consecuencia ${}_a I_x^0 f(x) = f(x)$.

con lo cual se termina la demostración.

Una propiedad importante de los operadores integrales de orden entero que es preservado al generalizar, es dada en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.5 (Ley de los exponentes). Sea $\alpha, \mu \in \mathbb{R}^+$ y $f \in L_1[a, b]$ entonces,

$${}_a I_x^\alpha {}_a I_x^\mu f(x) = {}_a I_x^\mu {}_a I_x^\alpha f(x) = {}_a I_x^{\alpha+\mu} f(x), \quad (2.18)$$

para todo $x \in [a, b]$.

DEMOSTRACIÓN Por definición se tiene

$$\begin{aligned} {}_a I_x^\alpha {}_a I_x^\mu f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t (t-\mu)^{\mu-1} f(\mu) dt d\mu \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-\mu)^{\mu-1} f(\mu) d\mu dt \end{aligned}$$

por el cambio de variable se puede intercambiar el orden de integración, es decir

$${}_a I_x^\alpha {}_a I_x^\mu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_a^x \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\mu)^{\mu-1} f(\mu) dt d\mu$$

cambio de variable $s = \frac{t-u}{x-u}$,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\mu-1} d\mu \int_a^x (1-s)^{\alpha-1} s^{\mu-1} ds \\ &= \frac{B(\alpha, \mu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_a^x (x-u)^{\alpha+\mu-1} f(u) d\mu \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \mu)} \int_a^x (x-u)^{\alpha+\mu-1} f(u) d\mu \\ &= {}_a I_x^{\alpha+\mu} f(x). \end{aligned}$$

Para ilustrar este teorema se verá que ${}_a I_x^{\frac{1}{2}} \left({}_a I_x^{\frac{1}{2}} 1 \right) = x$, lo cual justamente coincide

con la integral de orden entero ${}_a I_x 1$, donde $\alpha = 1$

EJEMPLO 2.5

i) Si $f(t) = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ y $a = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} {}_0 I_x^{1/2} (1) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x 1(x-t)^{\frac{1}{2}-1} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

Haciendo cambio de variable $u = x - t$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^0 u^{-\frac{1}{2}} du \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x u^{-\frac{1}{2}} du \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2u^{\frac{1}{2}} \Big|_0^x \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2u^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

ii) Luego ${}_a I_x^{1/2} ({}_a I_x^{1/2} 1) = {}_a I_x^{1/2} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \right)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} (x-t)^{\frac{1}{2}-1} dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x-t}} dt
 \end{aligned}$$

Haciendo cambio de variable $u = \frac{t}{x}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{(xu)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x(1-u)}} x du \\
 &= \frac{2x}{\pi} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du \\
 &= \frac{2x}{\pi} \int_0^1 u^{1-\frac{1}{2}} (1-u)^{1-\frac{3}{2}} du \\
 &= \frac{2x}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} \\
 &= \frac{2x \sqrt{\pi} \sqrt{\pi}}{\pi \cdot 2} \\
 &= x
 \end{aligned}$$

Por lo tanto ${}_0 I_x^{1/2} ({}_0 I_x^{1/2} 1) = {}_a I_x 1 = x$, lo cual era de esperarse

TEOREMA 2.6 Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Supóngase que $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ es una sucesión de funciones continuas uniformemente convergente en $[a, b]$ entonces

$${}_a I_x^\alpha \left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k \right) (x) = \lim_{k \rightarrow \infty} ({}_a I_x^\alpha f_k)(x) \quad (2.19)$$

en particular, la sucesión de funciones $\{{}_a I_x^\alpha f_k\}_{k=1}^\infty$ es uniformemente convergente

DEMOSTRACIÓN

Sea f , tal que $f_k \rightarrow f$. Puesto que esta convergencia es uniforme, entonces f es continua. Luego

$$\begin{aligned} |{}_a I_x^\alpha f_k(x) - {}_a I_x^\alpha f(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f_k(t) - f(t)| dt \\ &\leq \frac{\|f_k - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{\|f_k - f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha \end{aligned}$$

pero, como $\|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$ para todo $x \in [a, b]$;

2.3.5 PROPIEDADES DE LA DERIVADA FRACCIONARIA

En esta sección se discutirá las propiedades de la derivada fraccionaria, así como algunos importantes resultados que se cumplen en el cálculo clásico.

Considérese la derivada fraccionaria de orden α , de una función f , definida en (2.12), si $\alpha = k \geq 1$ donde $k \in \mathbb{Z}^+$ y $x > a$

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha f(x) &= D^{k+1} ({}_a I_x^{k+1-k} f(x)) \\ &= D^k f(x) \end{aligned}$$

lo que quiere decir, que para $x > a$, la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (2.12) de orden $\alpha = k$ coincide con la derivada convencional de orden k .

LEMA 2.1 Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \alpha$ entonces
 ${}_a D_x^\alpha f(x) = D^n {}_a I_x^{n-\alpha} f(x)$ (2.20)

DEMOSTRACIÓN

La hipótesis en n implica que $n \geq [\alpha]$. Así

$$\begin{aligned} D^n {}_a I_x^{n-\alpha} f(x) &= D^n D^{n-n} {}_a I_x^{n-n} {}_a I_x^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^{[\alpha]} D^{n-[\alpha]} {}_a I_x^{n-[\alpha]} {}_a I_x^{[\alpha]-\alpha} f(x) \\ &= D^{[\alpha]} {}_a I_x^{[\alpha]-\alpha} f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x), \end{aligned}$$

esto es debido a (2.18)

El siguiente resultado, establece una condición suficiente para la existencia de ${}_a D_x^\alpha f$.

LEMA 2.2 Sea $f \in AC[a, b]$ y $0 < \alpha < 1$ entonces ${}_a D_x^\alpha f$ existe casi en todo $x \in [a, b]$ además ${}_a D_x^\alpha f \in L_p[a, b]$ para $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ y

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(f(a)(x-a)^{-\alpha} + \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t) dt \right) \quad (2.21)$$

DEMOSTRACIÓN

Puesto que $f \in AC[a, b]$, entonces f es diferenciable casi en todas partes en (a, b) con $f' \in L_1[a, b]$ y tiene la representación

$$f(x) = \int_a^x f'(u) du + f(a) = {}_a I_x^1 f'(x) + f(a). \quad (2.22)$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
 {}_aD_x^\alpha f(x) &= \frac{d}{dx} {}_aI_x^{1-\alpha} f(x) \\
 &= \frac{d}{dx} {}_aI_x^{1-\alpha} ({}_aI_x^1 f'(x) + f(a)) \\
 &= \frac{d}{dx} \left({}_aI_x^{1-\alpha} {}_aI_x^1 f'(x) + \frac{f(a)(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right)
 \end{aligned}$$

por (2.18) se tiene

$${}_aI_x^{1-\alpha} {}_aI_x^1 f'(x) = {}_aI_x^1 {}_aI_x^{1-\alpha} f'(x).$$

$$\text{luego } {}_aD_x^\alpha f(x) = {}_aI_x^{1-\alpha} f'(x) + \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} \quad (2.23)$$

de (2.23) y la desigualdad de Hölder se deduce que ${}_aD_x^\alpha f \in L_p[a, b]$ para $1 \leq p < 1/\alpha$.

En el Teorema 2.5 se mostró que la integral fraccionaria cumple con la propiedad conmutativa. El siguiente teorema muestra un resultado análogo para la derivada fraccionaria.

TEOREMA 2.7 Sean $\alpha, \mu \geq 0$ Además, sean $\phi \in L_1[a, b]$ y $f = {}_aI_x^{\alpha+\mu} \phi$ entonces ${}_aD_x^\alpha {}_aD_x^\mu f = {}_aD_x^{\alpha+\mu} f$. (2.24)

DEMOSTRACIÓN

Sean $m = [\alpha]$ y $n = [\mu]$, entonces

$$\begin{aligned}
 {}_aD_x^\alpha {}_aD_x^\mu f &= {}_aD_x^\alpha {}_aD_x^\mu {}_aI_x^{\alpha+\mu} \phi \\
 &= D^m {}_aI_x^{m-\alpha} D^n {}_aI_x^{n-\mu} {}_aI_x^{\alpha+\mu} \phi
 \end{aligned}$$

luego, por (2.18) se tiene

$$\begin{aligned}
 {}_aD_x^\alpha {}_aD_x^\mu f &= D^m {}_aI_x^{m-\alpha} {}_aI_x^\alpha \phi \\
 &= D^m {}_aI_x^m \phi = \phi
 \end{aligned}$$

en forma similar se tiene que: ${}_aD_x^{\alpha+\mu} f = \phi$.

EJEMPLO 2.6 Sean $f(x) = x^{-1/2}$ y $\alpha = \mu = 1/2$ en vista del ejemplo (2.2) se tiene que

$${}_0D_x^\alpha x^{-1/2} = {}_0D_x^\mu x^{-1/2} = 0,$$

luego ${}_0D_x^{1/2} {}_0D_x^\mu x^{-1/2} = 0$

pero ${}_0D_x^{\alpha+\mu} x^{-1/2} = D x^{-1/2} = (2x^{3/2})^{-1}$

con lo cual ${}_0D_x^\alpha {}_0D_x^\mu x^{-1/2} \neq {}_0D_x^{\alpha+\mu}$

EJEMPLO 2.7 Sean $f(x) = x^{1/2}$, $\alpha = 1/2$ y $\mu = 3/2$. Usando el ejemplo (2.2) se tiene

$${}_0D_x^\alpha x^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ y } {}_0D_x^{3/2} x^{1/2} = 0,$$

luego ${}_0D_x^\alpha {}_0D_x^\mu x^{1/2} = 0.$

pero ${}_0D_x^\mu {}_0D_x^\alpha x^{1/2} = {}_0D_x^{\alpha+\mu} x^{1/2} = D^2 x^{1/2} = -\frac{x^{-3/2}}{4}$

NOTA 1 el ejemplo (2.5) muestra que

$${}_aD_x^\alpha {}_aD_x^\mu f(x) = {}_aD_x^\mu {}_aD_x^\alpha f(x) \neq {}_aD_x^{\alpha+\mu} f(x),$$

Mientras que el ejemplo 2.6 muestra que

$${}_aD_x^\alpha {}_aD_x^\mu f(x) \neq {}_aD_x^\mu {}_aD_x^\alpha f(x) = {}_aD_x^{\alpha+\mu} f(x),$$

un resultado semejante al Teorema 2.6, se enuncia a continuación.

TEOREMA 2.8 Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $m = [\alpha]$. Supóngase que $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ es una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas en $[a, b]$, y que ${}_aD_x^\alpha f_k$ existe para todo k . Además, supóngase que $\{{}_aD_x^\alpha f_k\}_{k=1}^\infty$ es uniformemente convergente en $[a + \epsilon, b]$ para todo $\epsilon > 0$. Entonces, para todo $x \in (a, b]$ se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} {}_aD_x^\alpha f_k(x) = {}_aD_x^\alpha \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x). \quad (2.25)$$

DEMOSTRACIÓN

$${}_a D_x^\alpha f(x) = D^m {}_a I_x^{m-\alpha} f(x).$$

Por el Teorema 2.6, la sucesión $\{{}_a I_x^{m-\alpha} f_k\}_k$ es uniformemente convergente, y se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} {}_a I_x^{m-\alpha} f_k(x) = {}_a I_x^{m-\alpha} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x). \quad (2.26)$$

además, por hipótesis $D^m {}_a I_x^{m-\alpha} f_k$ es uniformemente convergente en todo sub-intervalo compacto de $(a, b]$,

$$\begin{aligned} \text{luego} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} {}_a D_x^\alpha f_k(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} D^m {}_a I_x^{m-\alpha} f_k(x) \\ &= D^m \lim_{k \rightarrow \infty} {}_a I_x^{m-\alpha} f_k(x) \\ &= D^m {}_a I_x^{m-\alpha} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \\ &= {}_a D_x^\alpha \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x). \end{aligned}$$

Caso particular: $D_0^m I_0^\alpha f = I_0^{\alpha-m} f$

2.3.6 RELACIÓN ENTRE LA DERIVADA Y LA INTEGRAL FRACCIONARIA

Después de haber mostrado por separado las propiedades de la integral y derivada fraccionaria; a continuación, se verá cómo ellos están relacionados. Si se denota por D^n con $n \in \mathbb{N}$, la derivada de orden n , notar que,

$$D^n {}_a I_x^n = I, \quad (2.27)$$

${}_a I_x^n D^n \neq I$, donde $n \in \mathbb{N}$ y I denota el operador identidad. Es decir D^n es inversa por la izquierda (y no inversa por la derecha) del correspondiente operador integral ${}_a I_x^n$. Fácilmente se tiene que

$${}_a I_x^n D^n f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad x > a. \quad (2.28)$$

Estas propiedades serán generalizadas para el cálculo fraccionario.

TEOREMA 2.9 Sea $\alpha > 0$ y $x > a$, entonces

$${}_a D_x^\alpha {}_a I_x^\alpha f(x) = f(x) \quad (2.29)$$

DEMOSTRACIÓN

Para probar este resultado, considérese dos casos.

1. Sea $\alpha = k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$.

utilizando la diferenciación bajo el signo de la integral y por (2.12) se tiene

$$\begin{aligned} D^k {}_a I_x^k f(x) &= \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^x (x-t)^{k-1} f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{k-1} f(t) dt \right). \\ &= \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left((k-1) \int_a^x (x-t)^{k-2} f(t) dt \right). \end{aligned}$$

haciendo este procedimiento (k-2)-veces se obtiene

$$D^k {}_a I_x^k f(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

2. Sea $n - 1 < \alpha \leq n$ ($n \in \mathbb{Z}$), y por la propiedad (2.18), se tiene

$${}_a I_x^n f(x) = {}_a I_x^{n-\alpha} ({}_a I_x^\alpha f(x)). \quad (2.30)$$

luego

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha ({}_a I_x^\alpha f(x)) &= \frac{d^n}{dx^n} \{ {}_a I_x^{n-\alpha} ({}_a I_x^\alpha f(x)) \} \\ &= \frac{d^n}{dx^n} {}_a I_x^n f(x) = f(x). \end{aligned}$$

NOTA 2. En general ${}_a D_x^\alpha {}_a I_x^\mu f(x) = {}_a D_x^{\alpha-\mu} f(x).$ (2.31)

EN EFECTO

CASO 1. Si $\mu \geq \alpha \geq 0$, entonces por (2.18) y (2.29) se tiene

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha {}_a I_x^\mu f(x) &= {}_a D_x^\alpha {}_a I_x^\alpha {}_a I_x^{\mu-\alpha} f(x) \\ &= {}_a I_x^{\mu-\alpha} f(x) \\ &= {}_a D_x^{\alpha-\mu} f(x) \end{aligned}$$

CASO 2. Si $\alpha \geq \mu \geq 0$,. Sean $m = [\alpha]$ y $n = [\alpha - \mu]$, obviamente $m \geq n$.

Entonces, por (2.12) y (2.18) se tiene

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha {}_a I_x^\mu f(x) &= D^m {}_a I_x^{m-\alpha} {}_a I_x^\mu f(x) \\ &= D^m {}_a I_x^{m-(\alpha-\mu)} f(x) \\ &= D^m {}_a I_x^{n-(\alpha-\mu)} f(x) \\ &= {}_a D_x^{\alpha-\mu} f(x) \end{aligned}$$

se ha demostrado que ${}_a D_x^\alpha$ es el inverso por la izquierda de ${}_a I_x^\alpha$. Claro está, que no se puede exigir que este sea el inverso por la derecha, salvo al considerar ciertas condiciones, como se indica en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.10 Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Si existe una función $\phi \in L_1[a, b]$ tal que $f = {}_a I_x^\alpha \phi$, entonces

$${}_a I_x^\alpha {}_a D_x^\alpha f = f, \quad \text{casi en todas partes} \quad (2.32)$$

DEMOSTRACIÓN

Esto es una consecuencia inmediata de la Nota 1. En efecto, por la definición de f y (2.29), se tiene que

$${}_a I_x^\alpha {}_a D_x^\alpha f = {}_a I_x^\alpha [{}_a D_x^\alpha {}_a I_x^\alpha \phi] = {}_a I_x^\alpha \phi = f$$

si f no es descrita como en el Teorema (2.10), entonces se obtiene una representación diferente para ${}_a I_x^\alpha {}_a D_x^\alpha f$.

2.3.7 DERIVADA FRACCIONARIO DE CAPUTO

El estudio de la derivada fraccionaria de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ según Riemann-Liouville, presenta dos grandes dificultades, la primera, como se observó en la sección anterior, es que la derivada de una constante es no nula, por lo cual este resultado no puede ser interpretado como una tasa de variación; la segunda es que la transformada de Laplace de esta, depende de condiciones iniciales que no poseen una adecuada interpretación física con el objeto de evitar estos problemas, Caputo en 1967 publicó un trabajo donde una nueva definición de derivada fraccionaria es dada, la cual hoy en día es llamada derivada fraccionaria de Caputo citado en el texto [4].

DEFINICIÓN 2.9 Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ $n = [\alpha]$. El operador ${}_a^c D_x^\alpha f(x)$ definido mediante la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

$${}_a^c D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \quad (2.33)$$

Para $a \leq x \leq b$, es llamado el operador diferencial fraccionaria de caputo de la función f de orden α .

En particular, cuando $0 < \alpha < 1$, la ecuación (2.33) adopta la siguiente forma

$${}_a^c D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha [f(x) - f(a)] \quad (2.34)$$

Si $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ y $f(x)$ es una función para la cual la derivada fraccionaria de caputo ${}_a^c D_x^\alpha f(x)$ y la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville ${}_a D_x^\alpha f(x)$ de orden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ existe, entonces, ellas se conectan entre si, mediante la siguiente relación:

$${}_a^c D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} \quad (2.35)$$

En particular, cuando $0 < \alpha < 1$ de las ecuaciones (2.34) y (2.35) se sigue

$${}_a^c D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} \quad (2.36)$$

$\alpha \in \mathbb{N}_0$ entonces la derivada fraccionaria de Caputo (2.33) coincide con la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

$${}^c D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x) \quad (2.37)$$

Si $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$, con $n = [\alpha]$.

En particular, cuando $0 < \alpha < 1$

$${}^c D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha f(x), \quad \text{si } f(a) = 0 \quad (2.38)$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ y la derivada $f^{(n)}(x)$ de orden n existe, entonces ${}^c D_x^\alpha f(x)$ coincide con $f^{(n)}(x)$, i.e.,

$${}^c D_x^\alpha f(x) = f^{(n)}(x) \quad (2.39)$$

La derivada fraccionaria de Caputo ${}^c D_x^\alpha f(x)$ es definida para funciones $f(x)$ para los cuales la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville (2.12) existe. En particular, ella es definida para $f \in AC^n[a, b]$.

TEOREMA 2.11 Sean $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = [\alpha]$. Si $f \in AC^n[a, b]$, entonces la derivada fraccionaria de Caputo existe ${}^c D_x^\alpha f(x)$ sobre $[a, b]$ y

a) $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, ${}^c D_x^\alpha f(x)$ es representado por

$${}^c D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(t) dt = {}_a I_x^{n - \alpha} D^n f(x) \quad (2.40)$$

en particular, cuando $0 < \alpha < 1$ y $f(x) \in AC[a, b]$,

$${}^c D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{-\alpha} f'(t) dt = {}_a I_x^{1 - \alpha} Df(x) \quad (2.41)$$

b) Si $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, entonces ${}^c D_x^\alpha f(x)$ es representada por (2.50). en particular,

$${}^c D_x^0 f(x) = f(x) \quad (2.42)$$

La derivada fraccionaria de Caputo ${}^c D_x^\alpha f(x)$ tiene propiedades similares a las propiedades de la derivada fraccional de Riemann-Liouville ${}_a D_x^\alpha f(x)$.

EJEMPLO 2.8 Sean $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = [\alpha]$ y $\beta \in \mathbb{R}^+$, entonces

$${}_0^c D_x^\alpha(x^\beta) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} x^{\beta - \alpha}, \beta > n. \quad (2.43)$$

y

$${}_0^c D_x^\alpha(x^k) = 0, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (2.44)$$

$$\text{en particular, } {}_0^c D_x^\alpha(1) = 0. \quad (2.45)$$

en efecto por la ecuación (2.40), se sigue que

$${}_0^c D_x^\alpha(x^\beta) = {}_0 I_x^{n-\alpha} (D^n(x^\beta)), \quad \beta > n \quad (2.46)$$

$$\text{pero } D^n(x^\beta) = \beta(\beta - 1)(\beta - 2) \dots (\beta - n + 1)x^{\beta - n}, \beta > n$$

$$= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)} x^{\beta - n} \quad (2.47)$$

Luego, de las ecuaciones (2.46), (2.14) y (2.47) se sigue

$$\begin{aligned} {}_0^c D_x^\alpha(x^\beta) &= {}_0 I_x^{n-\alpha} \left(\frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)} x^{\beta - n} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)} {}_0 I_x^{n-\alpha}(x^{\beta - n}) \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - n + 1)} \frac{\Gamma(\beta - n + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} x^{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} x^{\beta - \alpha} \end{aligned} \quad (2.48)$$

si $\beta = k$, con $k = 0, 1, \dots, n - 1$, de (2.46) se sigue

$$\begin{aligned} {}_0^c D_x^\alpha(x^\beta) &= {}_0 I_x^{n-\alpha} (D^n(x^k)) \\ &= {}_0 I_x^{n-\alpha}(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Al igual que el operador diferencial fraccionario de Riemann-Liouville ${}_a D_x^\alpha$, el operador diferencial fraccionario de Caputo ${}_a^c D_x^\alpha$, es el operador inverso por lo derecha del operador integral fraccionario, mas no sucede lo contrario.

TEOREMA 2.12 Sean $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $f(x) \in L_\infty(a, b)$ o $C[a, b]$ entonces
 ${}_a^c D_x^\alpha ({}_a I_x^\alpha y) = f(x), (x > 0)$ (2.50)

La demostración se encuentra en el texto [4]

TEOREMA 2.13 Sea $f \in L_1(a, b), \alpha \in \mathbb{R}^+$ y $\Re(\alpha) > 0$ entonces si
 $f(x) \in AC^n[a, b]$ o $C^n[a, b]$

$$({}_a I_x^\alpha {}_a^c D_x^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (2.51)$$

donde $n = [\Re(\alpha)] + 1$ para $\alpha \notin \mathbb{N}$ y $n = [\alpha]$ para $\alpha \in \mathbb{N}$

en particular,

si $0 < \alpha \leq 1$ y $n = [\alpha]$. si $f(x) \in AC^n[a, b]$ o $f(x) \in C^n[a, b]$ Entonces
 ${}_a I_x^\alpha ({}_a^c D_x^\alpha f(x)) = f(x) - f(a)$ (2.52)

COROLARIO 2.1 En las condiciones del teorema 2.13, se verifica que

$$({}_a I_x^\alpha {}_a^c D_x^\alpha f)(x) = f(x) + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_{n-1} x^{n-1} \quad (2.53)$$

Con $c_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, 2, 3, \dots, n-1$

Las derivadas de Caputo puede considerarse por tanto como una regularización de la derivada de Riemann-Liouville efectuada mediante la sustracción de un polinomio de Taylor, a través de la cual se obtienen ciertas ventajas importantes, como las citadas condiciones iniciales enteras, unos requisitos menos restrictivos para el cumplimiento de la propiedad ${}_a^c D_x^\alpha {}_a^c D_x^\beta f = {}_a^c D_x^{\alpha+\beta} f$, y la no menos significativa característica que enunciamos a continuación

CAPÍTULO III

ECUACIÓN DIFERENCIAL FRACCIONARIA

De la misma forma que en el cálculo ordinario, las ideas de derivación e integración fraccionarias conducen al concepto más avanzado de Ecuación diferencial. Una relación involucrando uno más operadores fraccionarios aplicados a una función desconocida f se conoce como Ecuación Diferencial Fraccionaria, gran parte de la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarios tiene una correspondencia fraccionaria más o menos natural. Por ejemplo, es conocida que una Ecuación Diferencial Fraccionario de orden α necesita $[\mathcal{R}(\alpha) + 1]$ condiciones iniciales para ser resuelta de manera única. Sin embargo, surgen también notables diferencias, la primera de las cuales es el hecho de que una misma Ecuación Diferencial Fraccionario tendrá diferentes significados según las operaciones fraccionarias implicados sea los de Riemann-Liouville, Caputo u otros.

El estudio de las Ecuaciones Diferenciales ordinarias, Ecuaciones Diferenciales Parciales y Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias es de gran interés para los investigadores. Recientemente, se han publicado pocos trabajos que investiguen la existencia y unicidad de las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias citado en los textos [4], [6] y [8].

Una característica típica de las Ecuaciones Diferenciales (clásica o fraccionaria) es la necesidad de especificar condiciones adicionales para asegurar la existencia de solución. En muchas situaciones, estas condiciones adicionales describen ciertas propiedades de la solución al inicio del proceso, es decir en el punto $x = 0$. Por lo que se le llama el problema de valor inicial.

Según la teoría de las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarios, el número de condiciones iniciales que uno necesita especificar, para obtener una solución de una Ecuación Diferencial Fraccionaria de orden α es $n = [\alpha]$. En particular si $0 < \alpha \leq 1$ que es el caso en muchas aplicaciones solo se necesita especificar una condición. Sin embargo, la forma precisa de esta condición no es arbitraria, pues, cuando estamos interesados en el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarios surge una conexión íntima entre el tipo de condición inicial y el tipo

de la derivada fraccionaria de Caputo y no la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, que comúnmente se usa en el análisis matemático. Para el caso de Riemann-Liouville, se tendría que especificar el valor de ciertas derivadas e integrales fraccionarias de la función desconocida en el punto inicial $x = 0$.

Sin embargo, cuando se tiene una aplicación física en concreto, las condiciones iniciales de la función desconocida, tiene un significado físico por ejemplo la velocidad, aceleración aun cuando no está claro cuál es el significado físico de una derivada fraccionaria de f , y también como tal cantidad puede ser medido. En otras palabras, los datos requeridos simplemente no estarán disponibles en la práctica.

Sin embargo, cuando se trabaja con la derivada de Caputo, la situación es diferente, pues se puede especificar los valores iniciales $f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$, es decir el valor de la función y sus derivadas de orden entero. Estos datos tienen un significado físico y pueden medirse.

Según Caputo, la derivada fraccionaria de una constante es nula. Estas son las principales justificaciones para la utilización de la formulación de Caputo en este trabajo.

Una técnica interesante y fructífera para proporcionar resultados de existencia para problemas no lineales en forma similar que, en el caso entero, es el método de soluciones superiores e inferiores. Esta técnica permite establecer la existencia de resultados en un conjunto cerrado, es decir en un intervalo, generado por soluciones superiores e inferiores. Es así que en este capítulo estamos preocupados por la existencia de soluciones de la Ecuación Diferencial Fraccionaria.

$$\begin{cases} {}_0^c D_x^\alpha y = f(x, y(x)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Donde, $\Omega = \{(x, y): x \in [0, T], |y - y_0| \leq b\}$, $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ y $0 < \alpha < 1$

mediante la ecuación (2.52) y la definición 2.7 la ecuación (3.1) es equivalente a la ecuación integral fraccionaria

$$y(x) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq T \quad (3.2)$$

Es decir que toda solución de la ecuación (3.2) es también solución de la ecuación (3.1) y viceversa.

Análogamente a la teoría clásica de las Ecuaciones diferenciales, las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarios se dividen en ecuaciones lineales, homogéneas, no homogéneas, con coeficientes constantes o variables. Empezamos dando la definición más general para luego ir concretando.

DEFINICIÓN 3.1 Una Ecuación Diferencial Fraccionario de orden α se define como sigue

$${}^c D_x^\alpha y = f[x, y(x), {}^c D_x^{\alpha_1} y(x), {}^c D_x^{\alpha_2} y(x), \dots, {}^c D_x^{\alpha_{n-1}} y(x)]$$

Donde $y(x)$ es una función desconocida de dominio real, $f[x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}]$ es una función conocida y ${}^c D_x^{\alpha_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) son operadores diferenciales fraccionarios verificando $0 < R(\alpha_1) < R(\alpha_2) < \dots < R(\alpha_{n-1}) < R(\alpha)$ y $n \geq 2$

DEFINICIÓN 3.2 Se define $y(x)$ solución de la ecuación ${}^c D_x^\alpha y = f(x, y(x))$ e $y(0) = y_0$ a cualquier función de variable real donde ${}^c D_x^\alpha y = f[x, y(x), {}^c D_x^{\alpha_1} y(x), {}^c D_x^{\alpha_2} y(x), \dots, {}^c D_x^{\alpha_{n-1}} y(x)]$

DEFINICIÓN 3.3 Una ecuación diferencial fraccionaria lineal de orden α se define de la siguiente forma

$${}^c D_x^\alpha y(x) = a_0(x)y(x) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x) {}^c D_x^{\alpha_k} y(x) + b(x)$$

Desde $y(x)$ es una función desconocida de dominio real $a_k(x)$, ($k = 1, 2, \dots, n-1$) y $b(x)$ son funciones reales conocidas y ${}^c D_x^{\alpha_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) son operadores diferenciales fraccionarios verificando

$0 < R(\alpha_1) < R(\alpha_2) < \dots < R(\alpha_{n-1}) < R(\alpha)$ y $n \geq 2$.

Cuando $y(x)$ es una función real desconocida de dominio real $a_k(x)$, ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) y $b(x)$ son constantes se dice que la Ecuación Diferencial Fraccionaria lineal es de coeficientes constantes, y si se da que $b(x) = 0$ se denomina Ecuación Diferencial Fraccionario lineal homogéneo.

Problemas análogos a los de Cauchy y Dirichlet para Ecuaciones Diferenciales surgen también en el cálculo fraccionario. Aquí hemos de diferenciar explícitamente en función del tipo de operador fraccionario, ya que hay diferencias importantes en la formulación de las condiciones iniciales. Veremos los problemas de Cauchy para derivadas de Riemann-Liouville y Caputo.

3.1. EXISTENCIA DE LA SOLUCIÓN LOCAL

Paralelamente del teorema 1.8 se desarrolla la existencia de la solución local para la ecuación (3.1).

TEOREMA 3.1 Sea $\mathbb{R}_0 = \{(x, y) : x \in [0, a] \wedge |y - y_0| \leq b\}$, $f \in C(\mathbb{R}_0, \mathbb{R})$ y $|f(x, y)| \leq M$ sobre el rectángulo \mathbb{R}_0 . Entonces la ecuación ${}_0^C D_x^\alpha y = f(x, y(x))$ e $y(0) = y_0$ tiene al menos una solución $y(x)$ sobre $0 \leq x \leq \sigma$, con $\sigma = \min\left(a, \left[\frac{b}{M} \Gamma(\alpha + 1)\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right)$

NOTA 3.1 Sea $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a > b > 0$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ entonces

$$|a^\lambda - b^\lambda| \leq |a - b|^\lambda \quad (3.3)$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $y_0(x)$ una función continua sobre $[-\delta, 0]$, $\delta > 0$, tal que $y_0(0) = y_0$, $|y_0(x) - y_0| \leq b$.

para $0 < \varepsilon \leq \delta$, sea la función

$$y_\varepsilon(x) = y_0(x) \text{ si } x \in [-\delta, 0] \text{ y } y_\varepsilon(x) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y_\varepsilon(t-\varepsilon)) dt$$

$$\text{Si } x \in [0, \sigma_1] \quad (3.4)$$

Donde $\sigma_1 = \min(\sigma, \varepsilon)$. Luego, se observa que:

$$\begin{aligned}
|y_\varepsilon(x) - y_0| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t, y_\varepsilon(t-\varepsilon))| dt \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\
&= \frac{Mx^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq b : \sigma_1 = \left[\frac{b}{M} \Gamma(\alpha+1) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

De (3.5) Si $\sigma_1 < \sigma$, podemos extender y_ε como una función continua sobre $[-\delta, \sigma_2]$, con $\sigma_2 = \min(\sigma, 2\varepsilon)$ tal que $|y_\varepsilon(x) - y_0| \leq b$.

Continuando este proceso, podemos definir y_ε sobre $[-\delta, \sigma]$ tal que $|y_\varepsilon(x) - y_0| \leq b$ es satisfecha sobre $[-\delta, \sigma]$. Además,

para $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \sigma$ veamos que:

$$\begin{aligned}
|y_\varepsilon(x_1) - y_\varepsilon(x_2)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} (x_1-t)^{\alpha-1} f(t, y_\varepsilon(t-\varepsilon)) dt \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{x_2} (x_2-t)^{\alpha-1} f(t, y_\varepsilon(t-\varepsilon)) dt \right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} [(x_1-t)^{\alpha-1} - (x_2-t)^{\alpha-1}] f(t, y_\varepsilon(t-\varepsilon)) dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{x_1}^{x_2} (x_2-t)^{\alpha-1} f(t, y_\varepsilon(t-\varepsilon)) dt \right| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^{x_1} [(x_1-t)^{\alpha-1} - (x_2-t)^{\alpha-1}] dt - \int_{x_1}^{x_2} (x_2-t)^{\alpha-1} dt \right| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} |(x_2-x_1)^\alpha + x_1^\alpha - x_2^\alpha - (x_2-x_1)^\alpha| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} |x_2 - x_1|^\alpha < \varepsilon \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Siempre que $|x_2 - x_1| < \delta = \left[\frac{\varepsilon \Gamma(\alpha+1)}{M} \right]^{\frac{1}{\alpha}}$. Entonces de las desigualdades (3.5) y (3.6) tenemos que la familia $\{y_\varepsilon(x)\}$ forma una sucesión de funciones equicontinuas y funciones uniformemente acotadas. Como una aplicación del teorema 1.3 tenemos que existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ tal que

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{cases} \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots > \varepsilon_n \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$ y $y_{\varepsilon_n}(x) \rightarrow y(x)$ uniformemente sobre $[-\delta, \sigma]$.

Puesto que f es uniformemente continua, obtenemos que $f(x, y_{\varepsilon_n}(x - \varepsilon_n))$ tiene uniformemente a $f(x, y(x))$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto de la ecuación (3.4) con $\varepsilon = \varepsilon_n$, $\sigma_1 = \sigma$ tenemos que:

$$y(x) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt$$

Este prueba que $y(x)$ es una solución de la ecuación (3.1), por lo tanto, existe al menos una solución.

3.2. DESIGUALDADES ESTRUCTAS Y NO ESTRUCTAS

En esta sección se describe algunos resultados sobre desigualdades integrales fraccionarias que serán útiles para los objetivos de este trabajo

TEOREMA 3.2 Supóngase que $u, w \in C([0, T], \mathbb{R})$, $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y que las siguientes desigualdades se cumplen con una de ellas en sentido estricto:

$$v(x) \leq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, v(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq T \quad (3.7)$$

$$w(x) \geq w(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, w(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq T \quad (3.8)$$

Además que $f(x, y)$ es no decreciente en y para cada x

$$v(0) < w(0) \quad (3.9)$$

Entonces, se cumple que:

$$v(x) < w(x), \quad 0 \leq x \leq T \quad (3.10)$$

DEMOSTRACIÓN

Supóngase que la conclusión (3.10) es falsa luego, por la continuidad de las funciones v, w y (3.9), tenemos que existe un x_1 tal que $0 \leq x_1 \leq T$ y además

$$v(x_1) = w(x_1), \quad y \quad v(x) < w(x), \quad 0 < x \leq x_1 \quad (3.11)$$

Supóngase que la desigualdad (3.8) es estricta. Entonces usando el hecho de que f es no decreciente y de la relación (3.11) conseguimos

$$\begin{aligned} w(x_1) &> w(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{\alpha-1} f(t, w(t)) dt \\ &\geq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x_1} (x_1 - t)^{\alpha-1} f(t, v(t)) dt \geq v(x_1) \end{aligned}$$

Llegando así a una contradicción con (3.11). de este modo tenemos que la desigualdad (3.10) es verdadero.

TEOREMA 3.3 Supóngase que $u, w \in C([0, T], \mathbb{R})$, $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y que las desigualdades se cumplen:

$$v(x) \leq v(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, v(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq T \quad (3.12)$$

$$w(x) \geq w(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, w(t)) dt, \quad 0 \leq x \leq T \quad (3.13)$$

Supóngase además que

$$f(x, y) - f(x, z) \leq \frac{L}{1+x^\alpha} (y-z) \quad (3.14)$$

Siempre que $y \geq z$, $L > 0$. Entonces, $v(0) \leq w(0)$ y $L < \Gamma(\alpha + 1)$ implican

$$v(x) \leq w(x), \quad 0 \leq x \leq T \quad (3.15)$$

DEMOSTRACIÓN

Sean $w_\varepsilon(x) = w(x) + \varepsilon(1+x^\alpha)$, para $\varepsilon > 0$. Luego, se tiene;

$$w_\varepsilon(0) = w(0) + \varepsilon > w(0) \text{ y } w_\varepsilon(x) > w(x), 0 \leq x \leq T \quad (3.16)$$

$$w_\varepsilon(0) \geq w(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, w(t)) dt + \varepsilon(1+x^\alpha)$$

usando (3.16) y la condición (3.14) se tiene:

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(x) &\geq w_\varepsilon(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t, w_\varepsilon(t)) - \varepsilon] dt + \varepsilon x^\alpha \\ &= w_\varepsilon(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, w_\varepsilon(t)) dt - \frac{\varepsilon L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt + \varepsilon x^\alpha \end{aligned} \quad (3.17)$$

Puesto que

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha$$

y en vista de la condición $L < \Gamma(\alpha + 1)$, se tiene

$$w_\varepsilon(x) > w_\varepsilon(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, w_\varepsilon(t)) dt \quad (3.18)$$

Aplicando el teorema 3.2 a las desigualdades (3.3), (3.17) y (3.18) vemos que

$$v(x) < w_\varepsilon(x), \quad 0 \leq x \leq T \quad (3.19)$$

Como ε es arbitrario se puede concluir de la desigualdad (3.19), que la desigualdad $v(x) \leq w(x)$, $0 \leq x \leq T$ se cumple.

3.3 EXISTENCIA DE LA SOLUCIÓN SUPERIOR E INFERIOR

Paralelamente del teorema 1.9 se desarrolla la existencia de la solución superior e inferior para la ecuación (3.1).

TEOREMA 3.4 Sea $\mathbb{R}_0 = \{(x, y) : x \in [0, a] \wedge |y - y_0| \leq b\}$, $f \in C(\mathbb{R}_0, \mathbb{R})$ y $|f(x, y)| \leq M$ sobre el rectángulo \mathbb{R}_0 . Entonces existe solución superior e inferior para la ecuación ${}_0^C D_x^\alpha y = f(x, y(x))$ e $y(0) = y_0$ sobre el intervalo $[0, \sigma_0]$, con $\sigma_0 = \min\left(a, \left[\frac{b\Gamma(\alpha+1)}{2M+b}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right)$; siempre que $f(x, y)$ sea no decreciente en y para cada x .

DEMOSTRACIÓN

Se probará solamente la existencia de solución maximal ya que la prueba de la solución minimal es muy similar. Sea $0 < \varepsilon \leq \frac{b}{2}$ y consideremos la Ecuación Diferencial Fraccionaria con condiciones iniciales.

$$\begin{cases} {}_0^C D_x^\alpha y = f(x, y) + \varepsilon \\ y(0) = y_0 + \varepsilon \end{cases} \quad (3.20)$$

obsérvese que $f_\varepsilon(x, y) = f(x, y) + \varepsilon$

es definido y continuo sobre

$$\mathbb{R}_\varepsilon = \left\{ (x, y) / 0 \leq x \leq a \wedge |y - (y_0 + \varepsilon)| \leq \frac{b}{2} \right\}$$

donde $\mathbb{R}_\varepsilon \subset \mathbb{R}_0$ y $|f_\varepsilon(x, y)| \leq M + \frac{b}{2}$ (3.21)

del teorema 3.1 deducimos que el PVI (3.20) tiene una solución $y(x, \varepsilon)$ sobre el intervalo $0 \leq x \leq \sigma_0$. A hora para $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$, tenemos

$$y(0, \varepsilon_2) < y(0, \varepsilon_1) \tag{3.22}$$

$$y(x, \varepsilon_2) \leq y(0, \varepsilon_2) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f_{\varepsilon_2}(t, y(t, \varepsilon_2)) dt \tag{3.23}$$

$$y(x, \varepsilon_1) > y(0, \varepsilon_1) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t, y(t, \varepsilon_1)) + \varepsilon_2] dt \tag{3.24}$$

aplicando el teorema 3.2, a (3.23) y (3.24), se tiene $y(x, \varepsilon_2) < y(x, \varepsilon_1)$, $0 \leq x \leq \alpha_0$

Considerando la familia de funciones $y(x, \varepsilon)$ sobre $0 \leq x \leq \sigma_0$ de la desigualdad (3.21) se sigue que

$$\begin{aligned} |y(x, \varepsilon) - y(0, \varepsilon)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |f_\varepsilon(t, y(t, \varepsilon))| dt \\ &\leq \frac{2M + b}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{2M + b}{2} \frac{\sigma_0^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ &\leq \frac{b}{2} < b \end{aligned} \tag{3.25}$$

La desigualdad (3.25), muestra que la familia de funciones es uniformemente acotada.

ahora, si $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \alpha_0$

$$|y(x_1, \varepsilon) - y(x_2, \varepsilon)| \leq \frac{2M + b}{\Gamma(\alpha + 1)} |x_2 - x_1|^\alpha \quad (3.26)$$

la desigualdad (3.26), prueba que la familia $\{y(x, \varepsilon)\}$ es equicontinua. Por lo tanto, el teorema 1.3 garantiza la existencia de una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ tal que

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{cases} \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots > \varepsilon_n \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$ e $y(x, \varepsilon_n) \rightarrow \eta(x)$ sobre $[0, \sigma_0]$. Además $\eta(0) = y_0$. De la continuidad de f se sigue que $\eta(x)$ es una solución del PVI(3.1).

sea $y(x)$ cualquier solución de (3.1) sobre $[0, \sigma_0]$. entonces, se tiene

$$y_0 < y_0 + \varepsilon = y(0, \varepsilon) \quad (3.27)$$

$$y(x) < y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t, y(t)) + \varepsilon] dt \quad (3.28)$$

$$y(x, \varepsilon) \geq y_0 + \varepsilon + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t, y(t, \varepsilon)) + \varepsilon] dt \quad (3.29)$$

mediante la aplicación del teorema 3.2 a las desigualdad (3.28) y (3.29), se tiene $y(x) < y(x, \varepsilon)$ sobre $[0, \sigma_0]$ para todo $\varepsilon > 0$. La unidad de la solución maximal muestra que $y(x, \varepsilon)$ tiene uniformemente a $\eta(x)$ sobre $[0, \sigma_0]$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, por lo tanto la prueba está completa.

EJEMPLO 3.1 se considera la ecuación diferencial fraccionaria

$$\begin{cases} {}_0^c D_x^\alpha y = f(x, y(x)) = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

donde $\Omega = \{(x, y): x \in [0, T], |y - y_0| \leq b\}$, $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$, $1 > \alpha > 0$, $y(0) = 0$

se observa que, f es continua, acotada por $3b^{\frac{2}{3}}$ en Ω y además es no decreciente en y para cada x . Luego por el teorema 3.4, existen solución superior e inferior en $[0, \sigma]$, con

$$\sigma = \min \left\{ T, \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{6b^{-\frac{1}{3}} + 1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}$$

Demostrado la existencia y unicidad de la Ecuación diferencial fraccionaria (3.1) de orden $0 < \alpha < 1$, ahora extendemos la Ecuación Diferencial Fraccionaria para orden α ($1.5 < \alpha \leq 2$) linealizado junto con el polinomio de Taylor con condiciones $y(0) = b_0$ e $y'(0) = b_1$ donde b_0, b_1 son números reales.

Resolveremos explícitamente algún problema de Cauchy cuya solución va ser utilizado después en el estudio fraccionario del proyectil. Se trata de sencillas Ecuaciones Diferenciales Fraccionarios de orden α ($1.5 < \alpha \leq 2$). Optamos de aquí en adelante por la derivada fraccionaria de Caputo, en conjunción con la integral fraccionaria de Riemann-Liouville. Como método para resolver las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarios mostraremos un camino basado en (2.53) y las propiedades elementales de los operadores fraccionarios en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.2 se considera el siguiente ejemplo de la Ecuación Diferencial Fraccionario de la forma

$$\begin{cases} {}_0^c D_x^\alpha y = f(x, y(x)) \\ y(0) = b_0 \end{cases} \quad (3.30)$$

donde $\Omega = \{(x, y): x \in [0, T], |y - y_0| \leq b\}$, $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ y $2 \geq \alpha > 1.5$

como $1.5 < \alpha \leq 2$ se tiene que $n = [\alpha] + 1 = 2$, por lo que se obtiene dos condiciones iniciales en el límite inferior de integración 0:

$$y(0) = b_0 \quad (3.31)$$

$$y'(0) = b_1 \quad (3.32)$$

aplicamos el operador integral ${}_0 I_x^\alpha$ sobre ambos miembros de la ecuación (3.30) obtenemos

$${}_0 I_x^\alpha {}_0^c D_x^\alpha y = {}_0 I_x^\alpha f(x, y(x)) \quad (3.33)$$

lo que, en virtud del corolario 2.1, resulta en que la solución general de la Ecuación diferencial fraccionaria es

$$y(x) = c_0 + c_1 x + {}_0 I_x^\alpha f(x, y(x)) \quad (3.34)$$

Siendo c_0, c_1 constantes reales dependientes de las condiciones iniciales.

Si reemplazamos (3.31) en (3.34) y dado que ${}_0 I_0^\alpha f(0, y(0)) = 0$

$$y(0) = c_0 + c_1 0 + {}_0 I_0^\alpha f(0, y(0))$$

$$c_0 = b_0$$

Por otro lado (3.32) reemplazamos en la derivada de (3.34) se obtiene

$$y'(x) = c_1 + D_0^1 {}_0 I_x^{\alpha-1} f(x, y(x))$$

Por el caso particular del teorema 2.8 y ${}_0 I_0^{\alpha-1} f(0, y(0)) = 0$

$$y'(x) = c_1 + {}_0 I_x^{\alpha-1} f(x, y(x))$$

$$y'(0) = c_1 + {}_0 I_0^{\alpha-1} f(0, y(0))$$

$$c_1 = b_1$$

Por tanto, la solución del problema (3.30), (3.31), (3.32) en (3.34) y por la definición 2.7 se tiene:

$$y(x) = b_0 + b_1x + {}_0I_x^\alpha f(x, y(x)) \quad (3.35)$$

$$y(x) = b_0 + b_1x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \quad (3.36)$$

Cuando $\alpha = 2$ coincide con la conocida solución

$$y(x) = b_0 + b_1x + \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^x (x-t)^{2-1} f(t, y(t)) dt$$

$$y(x) = b_0 + b_1x + \int_0^x (x-t) f(t, y(t)) dt$$

de la Ecuación Diferencial Ordinaria $y''(x) = f(x, y(x))$ con las mismas condiciones iniciales (3.31) y (3.32)

CAPÍTULO IV

APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL FRACCIONARIO AL MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

4.1 INTRODUCCIÓN

En las aplicaciones importantes de los movimientos con aceleración constante, es el movimiento parabólico o movimiento de un proyectil.

Para analizar este movimiento lo realizaremos en dos dimensiones, primero en el eje X y luego en el eje Y, que corresponde a la combinación de los movimientos en el plano OXY.

El primero es un movimiento en el cual no existe fuerza neta, es decir corresponde a un movimiento uniforme y el segundo movimiento corresponde a un movimiento vertical con aceleración constante de tamaño $g = 9.8 m/s^2$ donde la fuerza neta, existe y corresponde al peso del cuerpo en la figura 1 se muestra la posición del cuerpo en los ejes OX y OY.

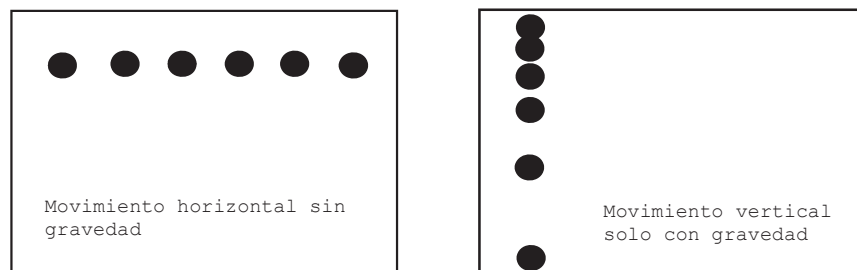


Figura 1 Movimiento compuesto

Para estudiar ese movimiento compuesto debemos:

- 1 Reconocer cada uno de los movimientos por eje
- 2 Aplicar a cada uno de los movimientos sus propias ecuaciones
- 3 El tiempo empleado corresponde a cualquiera de los dos movimientos, el uniforme en el eje OX, y el variado con aceleración constante en el eje OY.

Las ecuaciones que nos permiten analizar el movimiento parabólico son las siguientes:

Ecuaciones itinerario, donde x da la posición en el tiempo t_0

$$x = x_0 + v(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

la ecuación de rapidez es

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

y la ecuación de aceleración es

$$a = ctte, \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Uno de los usos más interesantes de estas ecuaciones es su aplicación al movimiento de un proyectil. Escogeremos el plano OXY coincidente con el plano del movimiento del proyectil, el eje OX es horizontal y el eje OY es verticalmente, el origen del sistema de referencia concuerda con el origen del sistema de coordenada, ver figura 1.

Se trata de un sistema en el que una partícula es proyectada formando un determinado ángulo con la superficie de la tierra. El proyectil, bajo el efecto de la fuerza de la gravedad, describe una curva de tipo parabólico. Esta trayectoria está perfectamente determinada matemáticamente incluso para el caso, un poco más complicado, en el que consideremos otras fuerzas intervinientes en el sistema además de la gravedad, como son las de rozamiento. Áreas como la balística han estudiado en profundidad este tema. Aquí, siguiendo trabajos en los textos [6] y [9] el movimiento de un proyectil desde el enfoque fraccionario. Para ello, utilizaremos como hipótesis inicial una formula generalizada de la segunda ley de Newton.

Se parte de las hipótesis que simplifican el problema, de forma que la única fuerza actuante sea la gravedad:

- 1 El medio no ofrece oposición al avance del proyectil ni por resistencia del aire ni por ninguna otra fricción.
- 2 No hay curvatura de la superficie terrestre, que es plana y ni rugosidades.

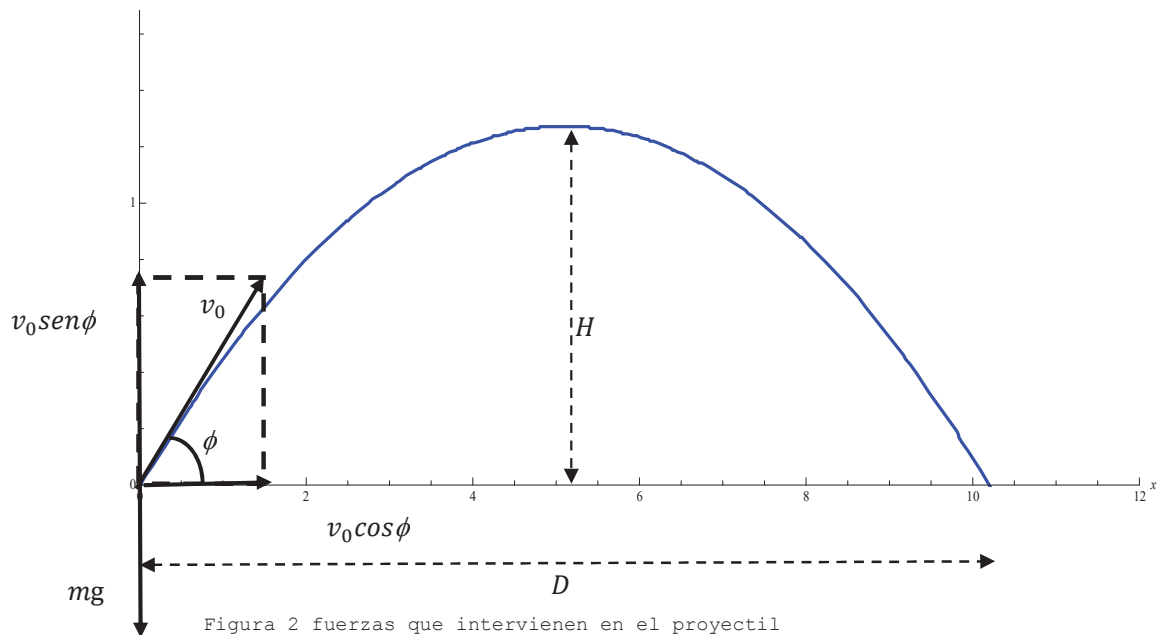
- 3 El movimiento se traza dentro de un plano vertical fijo OXY.
- 4 La fuerza de la gravedad es uniforme, y no disminuye con la altura del proyectil.
- 5 No se tiene en cuenta la fuerza de Coriolis, debido al movimiento de rotación de la tierra.

4.1.1 ECUACIÓN DIFERENCIAL CLÁSICA DEL PROYECTIL

Para la gráfica se parametriza las soluciones en función de t de la forma siguiente:

$$\vec{r}(t) = \left(v_0 t \cos(\phi), v_0 t \sin(\phi) - \frac{g}{2} t^2 \right)$$

luego codificar en la aplicación wolfram mathematica 8 que se muestra en el apéndice y similarmente se realiza para las demás gráficas posteriores.



Supongamos que se lanza el proyectil, de masa m , con una velocidad inicial de modulo v_0 y formando un ángulo ϕ con la horizontal. Escogemos el plano OXY coincidiendo con el plano de la trayectoria, de forma que el origen O se

corresponda con la posición inicial de la partícula. Podemos descomponer el movimiento en sus componentes horizontales y vertical, que serán independiente vertical, la trayectoria será composición de un movimiento rectilíneo uniformemente horizontal con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado vertical. Es decir, si $x(t)$ e $y(t)$ son las respectivas componentes horizontal y vertical del movimiento lo anterior junto con la segunda Ley de Newton $F = ma$

FUERZAS QUE INTERVIENEN EN EL PROYECTIL	
$W_{1x} = 0$ $\Sigma F_x = ma_x$	$W_{1y} = -mg$ $\Sigma F_y = ma_y$

nos lleva a la ecuación diferencial clásica del proyectil:

$$m \frac{d^2x}{dt^2}(t) = 0 \quad (4.12)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2}(t) = -mg \quad (4.13)$$

Que, con las condiciones iniciales anteriores

$$x(0) = 0 \quad x'(0) = v_0 \cos(\phi) \quad (4.14)$$

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = v_0 \sin(\phi) \quad (4.15)$$

Conducen a las conocidas soluciones del movimiento parabólico:

$$x(t) = v_0 t \cos(\phi) \quad (4.16)$$

$$y(t) = v_0 t \sin(\phi) - \frac{g}{2} t^2 \quad (4.17)$$

4.1.2 ECUACIÓN DIFERENCIAL FRACCIONARIA DEL PROYECTIL

Para aproximarnos al problema desde el punto de vista fraccionario sustituimos, en la formula clásica de Newton ($F = ma$) citado en el texto [9].

$$\text{Por la generalización } F(t) = m({}_0^C D_t^\alpha x)(t) \quad (4.18)$$

Con $1.5 < \alpha \leq 2$. aplicando el nuevo enfoque (4.18) a (4.12) y (4.13), y simplificando el factor m , obtenemos las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias del proyectil fraccionario:

$$({}_0^C D_t^\alpha x)(t) = 0 = f(t, x(t)) \quad (4.19)$$

$$({}_0^C D_t^\alpha y)(t) = -g = f(t, y(t)) \quad (4.20)$$

4.1.3 SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

las ecuaciones (4.19) y (4.20) son sencillas Ecuaciones Diferenciales Fraccionarios lineales del tipo de las estudiadas. Si fijamos las condiciones iniciales de (4.14) y (4.15) y aplicamos la formula obtenida para este tipo de ecuacion (4.18) llegamos a las soluciones

4.1.3.1 SOLUCIÓN DEL MOVIMIENTO PARABÓLICO HORIZONTAL MEDIANTE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL FRACCIONARIA

De la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0^C D_t^\alpha x = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

donde $\Omega = \{(t, x): t \in [0, T], |x - x_0| \leq b\}$, $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ y $1.5 < \alpha \leq 2$

por lo que se obtiene dos condiciones iniciales en el límite inferior de integración 0. $x(0) = 0$ y $x'(0) = v_0 \cos(\phi)$.

Consideremos la ecuación (3.34), (4.14) y ${}_0I_0^\alpha f(0, x(0)) = 0$ se obtiene la primera constante

$$x(t) = c_0 + c_1 t + {}_0I_t^\alpha f(t, x(t))$$

$$x(0) = c_0 + c_1 0 + {}_0I_0^\alpha f(0, x(0))$$

$$c_0 = 0$$

derivando la ecuación (3.34), considerando (4.14) y ${}_0I_0^{\alpha-1} f(0, x(0)) = 0$

$$x'(0) = c_1 + {}_0I_0^{\alpha-1} f(0, x(0))$$

$$c_1 = v_0 \cos(\phi)$$

por otro lado, la ecuación (3.33) en (3.34) y (4.19) se obtiene

$$x(t) = c_0 + c_1 t + {}_0I_t^\alpha {}_0^c D_t^\alpha x$$

$$x(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds$$

$$x(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} {}_0^c D_t^\alpha x ds$$

$$x(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} 0 ds$$

$$x(t) = v_0 t \cos(\phi) \tag{4.21}$$

4.1.3.2 SOLUCIÓN DEL MOVIMIENTO PARABÓLICO VERTICAL MEDIANTE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL FRACCIONARIA

De la forma:

$$\begin{cases} {}_0^c D_t^\alpha y = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

donde $\Omega = \{(t, y) : t \in [0, T], |y - y_0| \leq b\}$, $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ y $1.5 < \alpha \leq 2$

por lo que se obtiene dos condiciones iniciales en el límite inferior de integración $y(0) = 0$ y $y'(0) = v_0 \text{sen}(\phi)$.

Consideremos la ecuación (3.34), (4.15) y ${}_0I_0^\alpha f(0, y(0)) = 0$ se obtiene la primera constante

$$y(0) = c_0 + c_1 \cdot 0 + {}_0I_0^\alpha f(0, y(0))$$

$$c_0 = 0$$

Derivando la ecuación (3.34), considerando (4.15) y ${}_0I_0^{\alpha-1} f(0, y(0)) = 0$

$$y'(0) = c_1 + {}_0I_0^{\alpha-1} f(0, y(0)) = 0$$

$$c_1 = v_0 \text{sen}(\phi)$$

Por otro lado, la ecuación (3.33) en (3.34) y (4.20) se obtiene

$$y(t) = c_0 + c_1 t + {}_0I_t^\alpha {}_0^c D_t^\alpha y$$

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds$$

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} {}_0^c D_t^\alpha s ds$$

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (-g) ds$$

$$y(t) = v_0 t \text{sen}(\phi) - \frac{gt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \quad (4.22)$$

Donde se ha utilizado:

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds = \frac{t^\alpha}{\alpha} \text{ y que } \alpha \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)$$

Estas son las ecuaciones paramétricas que rigen el movimiento del proyectil en el plano OXY partiendo de la ecuación (4.18) como principio físico. Como es natural, al fijar $\alpha = 2$ se convierten en las soluciones tradicionales (4.16) y (4.17).

Eliminando la variable tiempo y unificado las dos ecuaciones paramétricas se llega a las ecuaciones algebraica que relaciona x e y , que, al contrario que en el caso $\alpha = 2$, donde se trata de una parábola, es un polinomio fraccionario de grado α luego despejando "t" de la ecuación (4.21) y reemplazando en la ecuación (4.22) se obtiene

$$y = v_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos(\phi)} \right) \text{sen}(\phi) - \frac{g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\phi)} \right)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

$$y = \frac{-gx^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)(v_0 \cos(\phi))^\alpha} + x \tan(\phi) \quad (4.23)$$

A continuación, se estudian, para los casos fraccionario y clásico, las cuatro magnitudes más relevantes en el análisis del movimiento de proyectiles: alcance, ángulo óptimo de vuelo. Cada uno de estos valores dependerá de ciertos parámetros, e indicamos estas relaciones con notación de dependencia funcional. Todos los resultados parten de la hipótesis de un lanzamiento de proyectil de la ecuación (4.23) con condiciones iniciales de las ecuaciones (4.14) y (4.15) luego se muestra la gráfica mediante la parametrización siguiente:

$$\vec{r}(t) = \left(v_0 t \cos(\Phi), v_0 t \sin(\Phi) - \frac{gt^2}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)$$

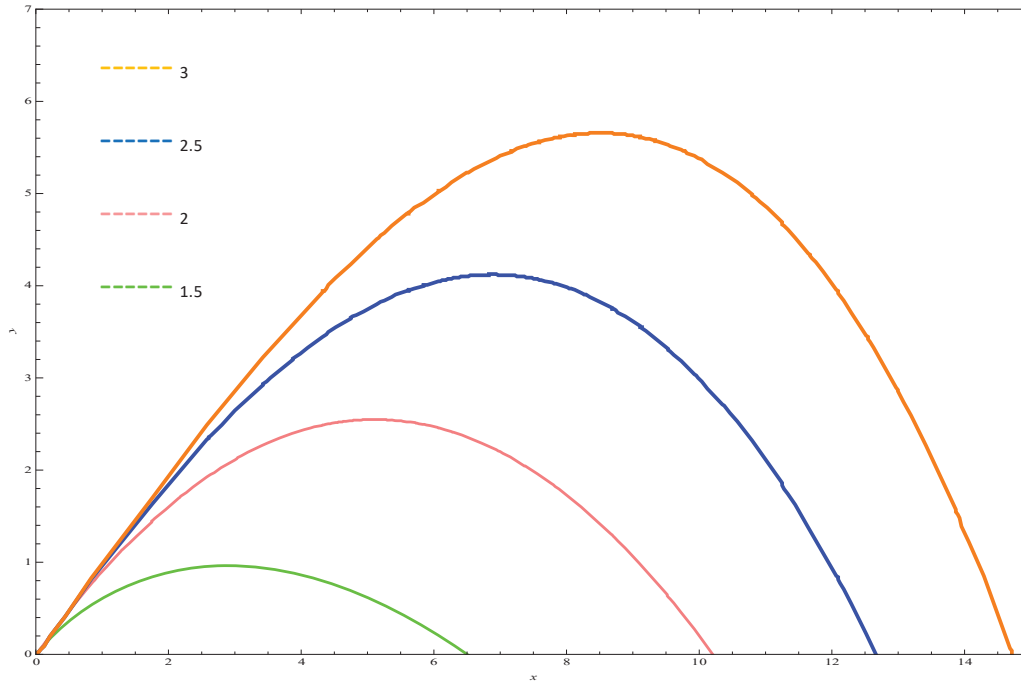


Figura 3 Comparación de trayectorias para diferentes valores de $\alpha(\phi = \pi/4, v_0 = 10)$

4.1.4 ALCANCE DEL MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

DEFINICIÓN 4.1 Se define el alcance (D) a la distancia horizontal recorrida por el proyectil entre el instante del lanzamiento y la toma de contacto con la superficie. Es decir, al valor $x(t)$ en el tiempo t de impacto con la superficie.

PROPOSICIÓN 4.1 El alcance $D(\alpha, \phi, v_0)$ viene dado por

$$D(\alpha, \phi, v_0) = \left[\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} v_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (\sin(\phi))^{\frac{1}{\alpha-1}} \cos(\phi) \quad (4.24)$$

DEMOSTRACIÓN

La demostración de esta ecuación (4.24) se obtiene al reemplazar la ecuación (4.31) a la ecuación (4.21) y coincide con el alcance clásico haciendo $\alpha = 2$:

$$\begin{aligned} D(2, \phi, v_o) &= \left[\frac{\Gamma(3)}{g} \right] v_o^2 \text{sen}(\phi) \cos(\phi) \\ &= \frac{2v_o^2}{g} \text{sen}(\phi) \cos(\phi) \end{aligned} \quad (4.25)$$

PROPOSICIÓN 4.2 Fijados α y v_o los alcances fraccionario y clásico coinciden solamente para un ángulo de lanzamiento concreto:

$$D(\alpha, \phi, v_o) = D(2, \phi, v_o) \Leftrightarrow \phi = \text{arc sen} \left(\frac{g \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}}}{v_o} \right), \quad \left(0 < \phi < \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.26)$$

DEMOSTRACIÓN

La ecuación (4.26) se demuestra al despejar la dirección del proyectil de la igualdad $D(\alpha, \phi, v_o) = D(2, \phi, v_o)$ de los alcances fraccionario y clásico

$$\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} v_o^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (\text{sen}(\phi))^{\frac{1}{\alpha-1}} = \frac{2v_o^2}{g} \text{sen}(\phi)$$

$$(\text{sen}(\phi))^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} = 2v_o^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} g^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \Gamma(\alpha+1)^{-\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$(\text{sen}(\phi))^{2-\alpha} = 2^{\alpha-1} v_o^{-1} g^{2-\alpha} \Gamma(\alpha+1)^{-1}$$

$$\text{sen}(\phi) = 2^{\frac{\alpha-1}{2-\alpha}} v_o^{-1} g \Gamma(\alpha+1)^{-\frac{1}{2-\alpha}}$$

$$\text{sen}(\phi) = \frac{g \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}}}{v_o}$$

4.1.5 ÁNGULO ÓPTIMO DEL PROYECTIL

DEFINICIÓN 4.2 Se define el ángulo óptimo (A) como el ángulo de lanzamiento con respecto al horizontal con el que el proyectil consigue un mayor alcance.

PROPOSICIÓN 4.3 El ángulo óptimo $A(\alpha)$ viene dado por

$$A(\alpha) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\right), \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq A(\alpha) < \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.27)$$

y coincide con el ángulo óptimo clásico $\frac{\pi}{4}$ haciendo $\alpha = 2$

PROPOSICIÓN 4.4 Fijamos α y v_o , el alcance máximo que viene determinado por el ángulo óptimo es

$$D_{max}(\alpha, v_o) = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)v_o^\alpha}{g\sqrt{\alpha}} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (4.28)$$

DEMOSTRACIÓN

La condición necesaria para maximizar el alcance máximo fraccionario es similar que el cálculo clásico por lo que el alcance $D(\alpha, \phi, v_o)$ se maximiza al derivar $\frac{d}{d\phi}D = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} v_o^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(-(\text{sen}(\phi))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} (\text{sen}(\phi))^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} (\text{cos}(\phi))^2 \right) &= 0 \\ (\text{sen}(\phi))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} &= \frac{1}{\alpha-1} (\text{sen}(\phi))^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} (\text{cos}(\phi))^2 \\ (\text{sen}(\phi))^2 &= \frac{1}{\alpha-1} (\text{cos}(\phi))^2 \\ \tan(\phi) &= \sqrt{\frac{1}{\alpha-1}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

reemplazando la ecuación (4.29) en la ecuación (4.24) se obtiene el alcance máximo

$$D(\alpha, \phi, v_o) = v_o \frac{\alpha}{\alpha-1} \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\sqrt{\frac{1}{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

$$D_{max}(\alpha, v_o) = v_o \frac{\alpha}{\alpha-1} \left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left[\frac{\Gamma(\alpha+1) v_o^\alpha}{g \sqrt{\alpha}} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Coincide con el alcance máximo clásico haciendo $\alpha = 2$:

$$D_{max}(2, v_o) = \frac{v_o^2}{g}$$

4.1.6 ALTURA MÁXIMA DEL PROYECTIL

DEFINICIÓN 4.3 Se define la altura máxima H como el valor de $y(t)$ en el punto más elevado de la trayectoria del proyectil.

PROPOSICIÓN 4.5 La altura máxima $H(\alpha, \phi, v_o)$ viene dada por

$$H(\alpha, \phi, v_o) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left[\frac{\Gamma(\alpha)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} (v_o \text{sen}(\phi))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \quad (4.30)$$

DEMOSTRACIÓN

Reemplazamos la ecuación (4.33) en la ecuación (4.22) se obtiene la altura máxima

$$\begin{aligned}
y &= t \left(v_0 \operatorname{sen}(\phi) - \frac{gt^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \\
&= \left[\frac{\Gamma(\alpha)v_0 \operatorname{sen}(\phi)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(v_0 \operatorname{sen}(\phi) - \frac{g \left(\left[\frac{\Gamma(\alpha)v_0 \operatorname{sen}(\phi)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \\
&= \left[\frac{\Gamma(\alpha)v_0 \operatorname{sen}(\phi)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(v_0 \operatorname{sen}(\phi) - \frac{g \frac{\Gamma(\alpha)v_0 \operatorname{sen}(\phi)}{g}}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right) \\
&= \left[\frac{\Gamma(\alpha)v_0 \operatorname{sen}(\phi)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} v_0 \operatorname{sen}(\phi) \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \left[\frac{\Gamma(\alpha)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} (v_0 \operatorname{sen}(\phi))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

y coincide con la altura máxima clásica haciendo $\alpha = 2$:

$$H(2, \phi, v_0) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2(\phi)}{2g} \quad (4.31)$$

PROPOSICIÓN 4.6 Fijamos α y v_0 , las alturas máximas fraccionaria y clásica coinciden solamente para un ángulo de lanzamiento concreto

$$H(\alpha, \phi, v_0) = H(2, \phi, v_0) \Leftrightarrow \phi = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{g \left[\left(2 - \frac{2}{\alpha} \right)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) \right]^{\frac{1}{2-\alpha}}}{v_0} \right) \quad \left(0 < \phi < \frac{\pi}{2} \right)$$

DEMOSTRACIÓN

Igualando las ecuaciones (4.30) y (4.31) se obtiene un ángulo de lanzamiento concreto del proyectil

$$\begin{aligned}\frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2(\phi)}{2g} &= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left[\frac{\Gamma(\alpha)}{g}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} (v_o \operatorname{sen}(\phi))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\ (v_o \operatorname{sen}(\phi))^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} &= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \left[\frac{\Gamma(\alpha)}{g}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} 2g \\ v_o \operatorname{sen}(\phi) &= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-2}} \left[\frac{\Gamma(\alpha)}{g}\right]^{\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)} (2g)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-2}} \\ v_o \operatorname{sen}(\phi) &= \left(2 - \frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha-2}} \Gamma(\alpha)^{\frac{1}{\alpha-2}} g^{-\frac{1}{\alpha-2}} g^{\frac{\alpha-1}{\alpha-2}} \\ \operatorname{sen}(\phi) &= \frac{g \left[\left(2 - \frac{2}{\alpha}\right)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) \right]^{\frac{1}{2-\alpha}}}{v_o}\end{aligned}$$

Se observa que las gráficas se obtienen de la siguiente parametrización

$$\vec{r}(t) = \left(v_0 t \cos(\Phi), v_0 t \sin(\Phi) - \frac{gt^2}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)$$

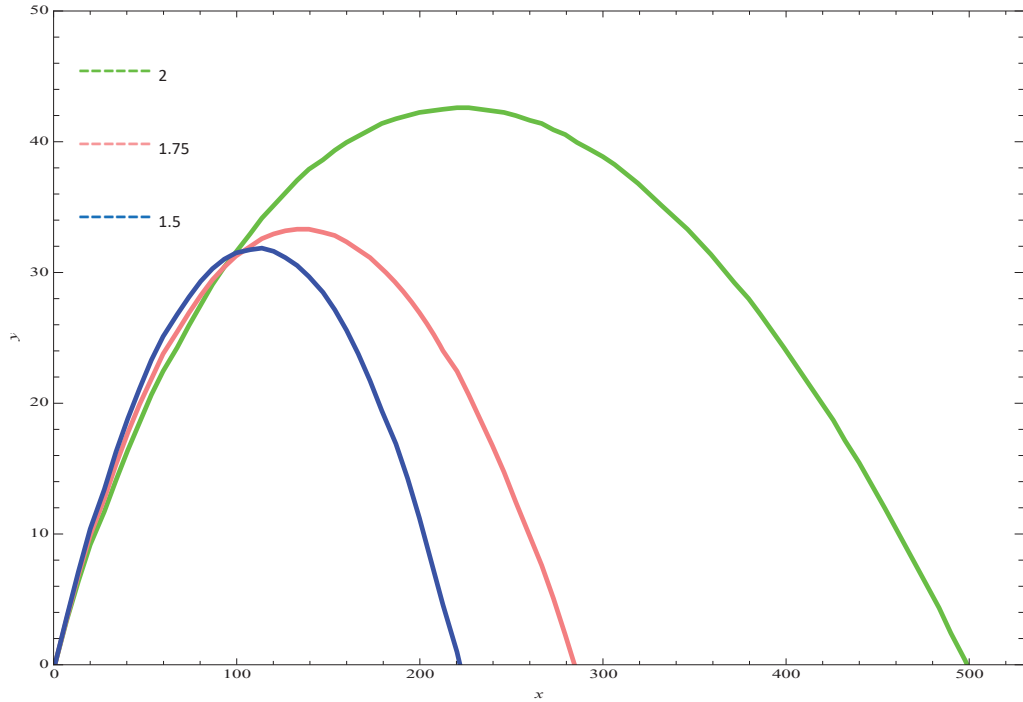


Figura 4 Comparación entre la trayectoria fraccionarias $\alpha = 3/2, 7/4$ con la trayectoria clásica $\alpha = 2$ si $v_0 = 50 m/s$ con un ángulo de tiro $\phi = \pi/6$

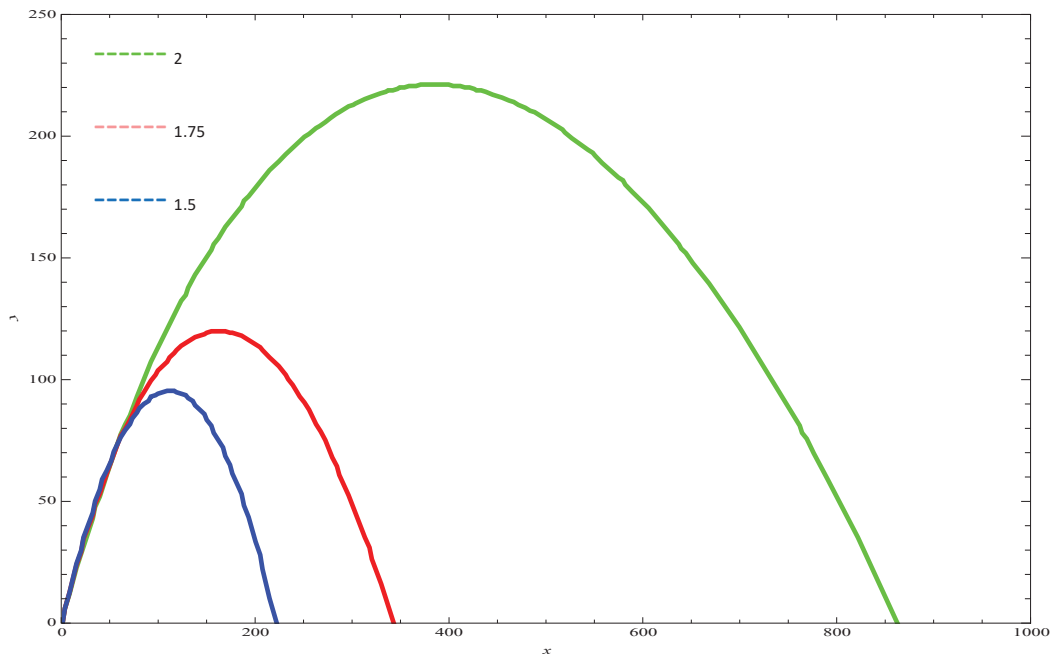


Figura 5 Comparación entre la trayectoria fraccionarias $\alpha = 3/2, 7/4$ con la trayectoria clásica $\alpha = 2$ si $v_0 = 50 m/s$ con un ángulo de tiro $\phi = \pi/3$

4.1.7 TIEMPO DE VUELO DEL PROYECTIL

DEFINICIÓN 4.4 Se define el tiempo de vuelo (T) como el tiempo total en que el proyectil está en movimiento desde su lanzamiento hasta que toma tierra.

PROPOSICIÓN 4.7 El tiempo de vuelo $T(\alpha, \phi, v_o)$ viene dado por

$$T(\alpha, \phi, v_o) = \left[\frac{\Gamma(\alpha + 1)v_o \text{sen}(\phi)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (4.32)$$

y coincide con el tiempo de vuelo clásico haciendo $\alpha = 2$:

$$T(2, \phi, v_o) = \frac{2v_o \text{sen}(\phi)}{g}$$

en particular el tiempo máximo de vuelo está dado por

$$T_{max}(\alpha, \phi, v_o) = \left[\frac{\Gamma(\alpha)v_o \text{sen}(\phi)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (4.33)$$

y coincide con el tiempo máximo de vuelo clásico haciendo $\alpha = 2$:

$$T_{max}(2, \phi, v_o) = \frac{v_o \text{sen}(\phi)}{g}$$

4.1.8 RELACIÓN DEL CÁLCULO FRACCIONAL Y CÁLCULO CLÁSICO DEL MOVIMIENTO PARABÓLICO

TEOREMA 4.1 Si $\mu = \frac{1}{2} [\Gamma(\alpha + 1)]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left[\frac{v_o \text{sen}(\phi)}{g} \right]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}$ entonces la relación entre el alcance de un proyectil usando calculo fraccionario y el alcance en lo clásico es dado por $D_F = \mu D_C$ por lo tanto

- I. si $D_F = D_C$ y $\mu = 1$ por tanto $v_o \text{sen}(\phi) = \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$
- II. si $D_F > D_C$ y $\mu > 1$ por tanto $v_o \text{sen}(\phi) > \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$
- III. si $D_F < D_C$ y $\mu < 1$ por tanto $v_o \text{sen}(\phi) < \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$

DEMOSTRACIÓN

Dividiendo las ecuaciones (4.24) y (4.25) cuando $\alpha \rightarrow 2$

$$\begin{aligned} \frac{D_F}{D_C} &= \frac{\left[\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} v_o^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (\text{sen}(\phi))^{\frac{1}{\alpha-1}} \cos(\phi)}{\frac{2v_o^2}{g} \text{sen}(\phi) \cos(\phi)} \\ &= \frac{1}{2} [\Gamma(\alpha + 1)]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left[\frac{v_o \text{sen}(\phi)}{g} \right]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \end{aligned}$$

Si $D_F = D_C$ cuando $\mu = 1$ por lo tanto se tiene que

$$\frac{1}{2} [\Gamma(\alpha + 1)]^{\frac{1}{\alpha-1}} \left[\frac{v_o \text{sen}(\phi)}{g} \right]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} = 1$$

Usando la primera condición $v_o \text{sen}(\phi) = \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$ la demostración $D_F > D_C$ si $\mu > 1$ como requiere

$$v_o \text{sen}(\phi) > \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha + 1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$$

Similarmente $D_F < D_C$ si $\mu < 1$ es $v_o \text{sen}(\phi) < \left[\frac{2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$

$$\vec{r}(t) = \left(v_0 t \cos(\Phi), v_0 t \sin(\Phi) - \frac{gt^2}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)$$

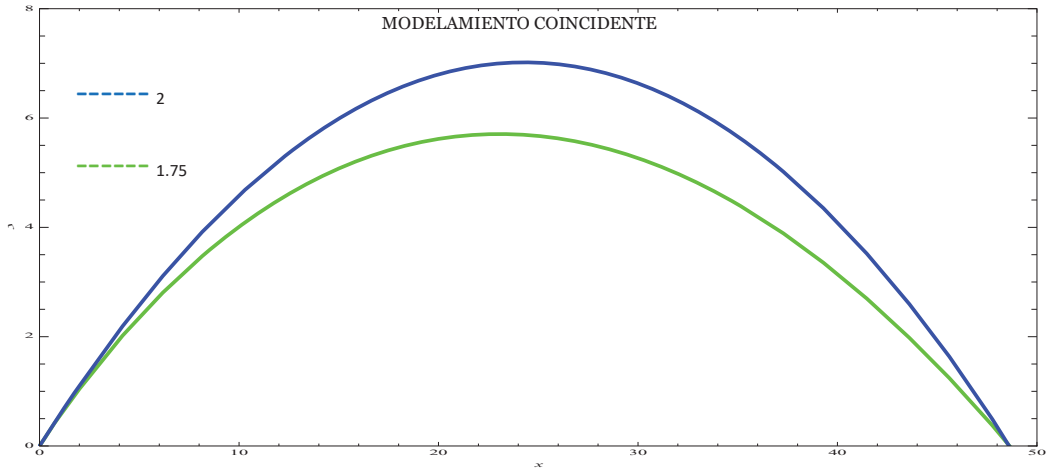


Figura 6 Comparación entre $D_F: \alpha = 7/4$ con $D_C: \alpha = 2$ si $(\phi = \pi/6, v_0 = 23.45628 \text{ m/s})$

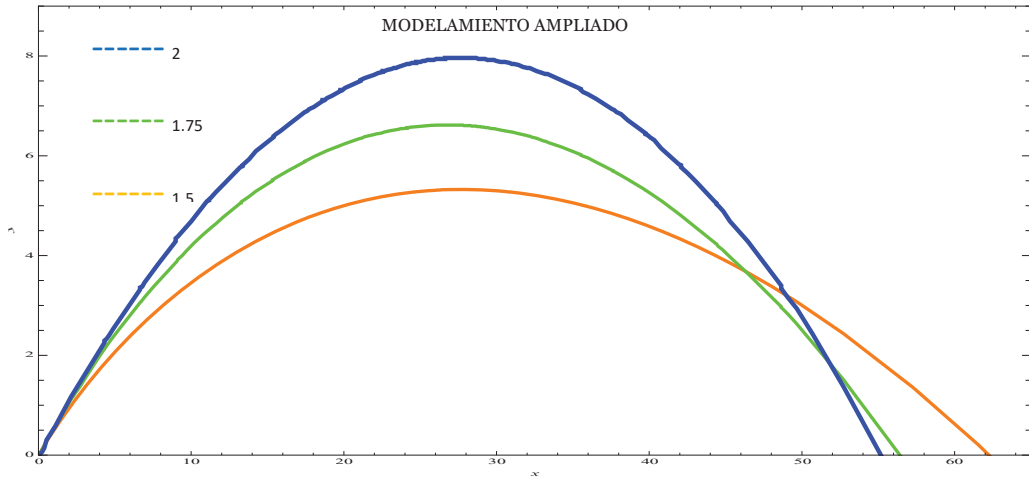


Figura 7 Comparación entre $D_F: \alpha = 3/2, 7/4$ con $D_C: \alpha = 2$ si $(\phi = \pi/6, v_0 = 25 \text{ m/s})$

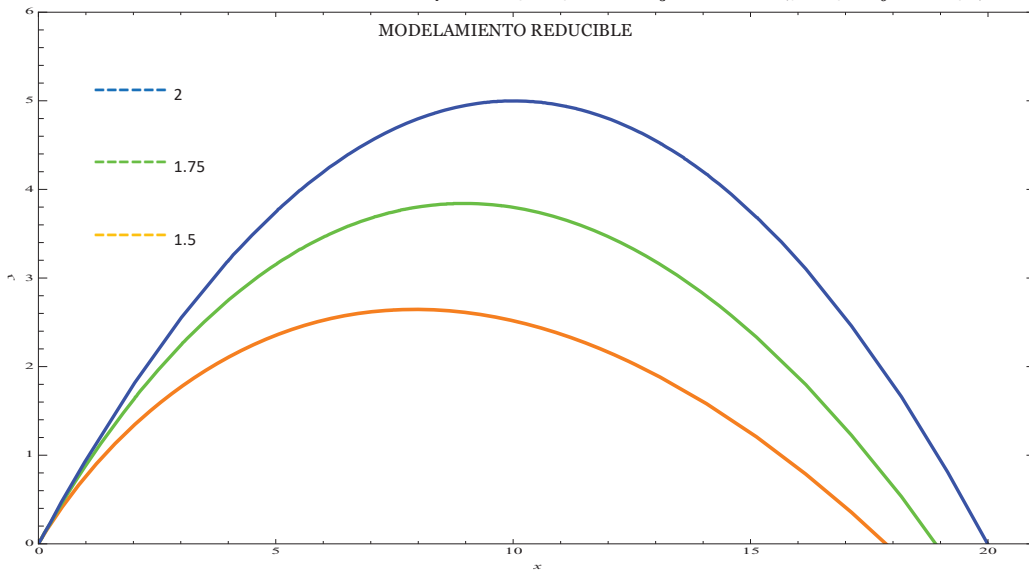


Figura 8 Comparación entre $D_F: \alpha = 3/2, 7/4$ con $D_C: \alpha = 2$ si $(\phi = \pi/4, v_0 = 14 \text{ m/s})$

TEOREMA 4.2 Si $\lambda = 2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \Gamma(\alpha)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left[\frac{v_o \text{sen}(\phi)}{g}\right]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}$ entonces la relación entre la máxima altura de un proyectil usando, cálculo fraccionario y la máxima altura en el cálculo clásico es dado por $H_F = \lambda H_C$ por lo tanto

- I. Si $H_F = H_C$ y $\lambda = 1$ por tanto $v_o \text{sen}(\phi) = \left[\left(2 - \frac{2}{\alpha}\right)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)\right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$
- II. Si $H_F > H_C$ y $\lambda > 1$ por tanto $v_o \text{sen}(\phi) > \left[\left(2 - \frac{2}{\alpha}\right)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)\right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$
- III. Si $H_F < H_C$ y $\lambda < 1$ por tanto $v_o \text{sen}(\phi) < \left[\left(2 - \frac{2}{\alpha}\right)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)\right]^{\frac{1}{2-\alpha}} g$

La demostración se realiza similarmente como el teorema 4.1

4.1.9 MODELOS MATEMÁTICOS DEL MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

	$1.5 < \alpha \leq 2$	$\alpha = 2$
ALCANCE (D)	$D(\alpha, \phi, v_0) = \left[\frac{(\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{g} v_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (\text{sen}(\phi))^{\frac{1}{\alpha-1}} \cos(\phi) \right]$	$D(2, \phi, v_0) = \frac{2v_0^2}{g} \text{sen}(\phi) \cos(\phi)$
ALCANCE (D_{max})	$D_{max}(\alpha, v_0) = \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha} \left[\frac{(\alpha + 1)v_0^\alpha}{g\sqrt{\alpha}} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}}$	$D_{max}(2, v_0) = \frac{v_0^2}{g}$
ANGULO OPTIMO (A)	$A(\alpha) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \right), \left(\frac{\pi}{4} \leq A(\alpha) < \frac{\pi}{2} \right)$	$A(2) = \frac{\pi}{4}$
ANGULO CONCRETO (ϕ)	$\phi = \arcsen \left(\frac{g \left[\frac{2^{\alpha-1}}{(\alpha+1)} \right]^{\frac{1}{2-\alpha}}}{v_0} \right), \left(0 < \phi < \frac{\pi}{2} \right)$	
ALTURA (H_{max})	$H(\alpha, \phi, v_0) = \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \left[\frac{(\alpha)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{g} (v_0 \text{sen}(\phi))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right]$	$H(2, \phi, v_0) = \frac{v_0^2 \text{sen}^2(\phi)}{2g}$
TIEMPO (T)	$T(\alpha, \phi, v_0) = \left[\frac{\Gamma(\alpha + 1)v_0 \text{sen}(\phi)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$	$T_{max}(2, \phi, v_0) = \frac{2v_0 \text{sen}(\phi)}{g}$
TIEMPO (T_{max})	$T_{max}(\alpha, \phi, v_0) = \left[\frac{\Gamma(\alpha)v_0 \text{sen}(\phi)}{g} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}}$	$T_{max}(2, \phi, v_0) = \frac{v_0 \text{sen}(\phi)}{g}$

4.2 MATRIZ DE CONSISTENCIA

TÍTULO: MODELOS MATEMÁTICOS DEL MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL MEDIANTE LA EXISTENCIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS NO LINEAL

<p>PROBLEMA GENERAL</p> <p>¿Será posible determinar la solución de la Ecuación Diferencial Fraccionaria no lineal de la forma:</p> $\begin{cases} {}_0^C D_x^\alpha y = f(x, y(x)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$ <p>y formular modelos matemáticos del movimiento de un proyectil mediante las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias?</p>	<p>OBJETIVO GENERAL</p> <p>Determinar las condiciones necesarias para establecer la existencia de la Ecuación Diferencial Fraccionaria no lineal y formular modelos matemáticos del movimiento de un proyectil.</p>	<p>HIPÓTESIS GENERAL</p> <p>Con la Ecuación Diferencial Fraccionaria no lineal es factible formular los modelos matemáticos del movimiento de un proyectil</p>
<p>PROBLEMAS ESPECÍFICOS</p> <p>a) ¿Es posible determinar la existencia de la solución local y solución superior e inferior de la ecuación (1)?</p> <p>b) ¿Para este resultado Será posible efectuar modelos matemáticos del movimiento de un proyectil?</p>	<p>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</p> <p>a) Encontrar la solución local mediante el teorema de Peano y solución superior e inferior mediante las desigualdades estrictas y no estrictas para la existencia de la Ecuación Diferencial Fraccionaria</p> <p>b) Comparando el resultado anterior junto con el polinomio de Taylor formular los modelos matemáticos de un proyectil en un instante t de su movimiento</p>	<p>HIPOTESIS ESPECÍFICOS</p> <p>a) La solución local junto con el teorema de Peano y solución superior e inferior junto con las desigualdades estrictas y no estrictas da lugar a la existencia de una Ecuación Diferencial Fraccionaria expresado en términos de derivada fraccionario de Caputo.</p> <p>b) Los nuevos modelos matemáticos de orden fraccional del movimiento de un proyectil junto con el polinomio de Taylor están expresados en términos de la función Gamma.</p>

CONCLUSIONES

He presentado un desarrollo teórico para las condiciones necesarias impuestas sobre f para la existencia de la solución local y solución superior e inferior de una Ecuación Diferencial Fraccionaria no lineal de la forma:

$$\begin{cases} {}^c_0D_x^\alpha y = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

llegando a las siguientes conclusiones:

- a) Para garantizar la existencia de una solución local de la Ecuación Diferencial Fraccionaria es necesario que f sea continua y acotada en un conjunto cerrado y para garantizar la existencia de la solución superior e inferior de una Ecuación Diferencial Fraccionaria es necesario que f sea continua, acotada y no decreciente en y para cada x en un conjunto cerrado.

- b) Tomando en cuenta la existencia de las ecuaciones diferenciales fraccionarias junto al polinomio de Taylor se propone la formulación de los modelos matemáticos mejor modelado del movimiento de un proyectil para su recorrido.

SUGERENCIAS

- a) Se sugiere que se incluya el Cálculo Fraccionario de funciones para la curricula de la Carrera Profesional de Matemáticas debido a su gran importancia que tiene en el estudio de problemas físicos y la principal aplicación a la Ingeniería Mecánica e Ingeniería Civil como por ejemplo en circuitos eléctricos y bombeo hidráulico.

- b) Se recomienda impulsar la utilización de estos modelos matemáticos para seguir mejorando el desempeño en las diversas áreas que cada vez cobran más importancia en diversos tipos de aplicación.

- c) Sugiero a los estudiantes, tesisistas e interesados en la investigación de este tema, puedan ampliar a un más este trabajo debido a que se puede aplicar a muchos problemas físicos y de ingeniería.

FUENTES DE INFORMACION

- [1] Atanackovic, T. Pilipovic, S. (2014) Fractional Calculus With Applications in Mechanics, Great Britain: Wiley
- [2] Guzman, M. (1975) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Teoría de Estabilidad y control (1ª ed.) España: editorial alhambra S.A.
- [3] Herrmann, R. (2011) Fractional Calculus an Introduction for Physicists, USA: World Scientific
- [4] Kilbas, A. Srivastava, H. and Trujillo, J. (2006) theory and applications of fractional differential equations, Elsevier Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies.
- [5] Lakshmikantham, V. Leela, S. (1969) Differential and Integral Inequalities, Theory and Applications, New York and London: Academic Press.
- [6] Otero, O. (2012) Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, Santiago: universidad de Santiago de Compostela
- [7] Ortiguera, MD. (2011) Fractional Calculus for Scientists and Engineers, Lecture Notes in Electrical Engineering 84, Caparica, Portugal: Springer.
- [8] Podlubny, I. (1999) Fractional Differential Equations, San Diego: Academic Press.
- [9] Sienz, J. (2011) Applied Mathematical Modelling, New York, USA: Swansea
- [10] Torres, T. (2009) Existencia y Unicidad de la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden fraccionario, Trujillo: universidad nacional de Trujillo.

LINKOGRAFIA

- [1] www.esacademic.com/dic.nsf/eswiki/1136647.
- [2] https://www.ugr.es/jagalvez/pdfs/M1_T4.pdf.
- [3] <https://eswikipedia.org/wiki/E.D.O>.
- [4] www.dma.uvigo.es/aurea/TR_C2_EDO.
- [5] www.elsevier.com/locate/apm.
- [6] www.us.es/edan/php/asig/LICMAT/LMAED/tema1AED.

APÉNDICE

- a. `ParametricPlot[{{7.071t, 7.071t - 7.372t^1.5}, {7.071t, 7.071t - 4.9t^2}, {7.071t, 7.071t - 2.9488t^2.5}, {7.071t, 7.071t - 1.6333t^3}}, {t, 0, 6}, PlotStyle -> {{Green, Thick}, {Pink, Thick}, {Blue, Thick}, {Orange, Thick}}, PlotStyle -> Thickness[0.02], AxesLabel -> {x, y}, PlotRange -> {{0, 15}, {0, 7}}, AspectRatio -> 1, Frame -> True, FrameLabel -> {x, y}]`
- b. `ParametricPlot[{{43.3t, 25t - 7.37t^1.5}, {43.3t, 25t - 6.093t^1.75}, {43.3t, 25t - 4.9t^2}}, {t, 0, 500}, PlotStyle -> {{Green, Thick}, {Pink, Thick}, {Blue, Thick}}, FrameLabel -> {x, y}, PlotRange -> {{0, 530}, {0, 50}}, AspectRatio -> 1, Frame -> True]`
- c. `ParametricPlot[{{25t, 43.301t - 7.37t^1.5}, {25t, 43.301t - 6.093t^1.75}, {25t, 43.301t - 4.9t^2}}, {t, 0, 500}, PlotStyle -> {{Green, Thick}, {Red, Thick}, {Blue, Thick}}, FrameLabel -> {x, y}, PlotRange -> {{0, 1000}, {0, 250}}, AspectRatio -> 1, Frame -> True]`
- d. `ParametricPlot[{{20.3137t, 11.72814t - 6.093t^1.75}, {20.3137t, 11.72814t - 4.9t^2}}, {t, 0, 5}, PlotStyle -> {{Green, Thick}, {Blue, Thick}}, PlotRange -> {{0, 50}, {0, 8}}, AspectRatio -> 1, Frame -> True, FrameLabel -> {x, y}]`
- e. `ParametricPlot[{{21.651t, 12.5t - 7.37t^1.5}, {21.651t, 12.5t - 6.093t^1.75}, {21.651t, 12.5t - 4.9t^2}}, {t, 0, 10}, PlotStyle -> {{Orange, Thick}, {Green, Thick}, {Blue, Thick}}, PlotRange -> {{0, 65}, {0, 9}}, AspectRatio -> 1, Frame -> True, FrameLabel -> {x, y}]`
- f. `ParametricPlot[{{9.8995t, 9.8995t - 7.37t^1.5}, {9.8995t, 9.8995t - 6.093t^1.75}, {9.8995t, 9.8995t - 4.9t^2}}, {t, 0, 5}, PlotStyle -> {{Orange, Thick}, {Green, Thick}, {Blue, Thick}}, FrameLabel -> {x, y}, PlotRange -> {{0, 21}, {0, 6}}, Frame -> True, AspectRatio -> 1]`