UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

TESIS

GESTIÓN DE INVENTARIO MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL EN LA MUNICIPALIDAD DE SAN JERONIMO, PROVINCIA DEL CUSCO, 2024

PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN MATEMÁTICAS

AUTOR:

Br. EDWIN JAIMES SALCEDO

ASESOR:

Dr. TONY GODOFREDO TICONA FLORES

ORCID: 0000-0003-0652-3788

CUSCO- PERÚ

2026

Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco

INFORME DE SIMILITUD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-321-2025-UNSAAC)

El que suscribe, el **Asesor** Dr. TONY GODOFREDO TICONA FLORES quien aplica el software de detección de similitud al trabajo de investigación/tesis titulada: GESTIÓN DE INVENTARIO MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL EN LA MUNICIPALIDAD DE SAN JERONIMO, PROVINCIA DEL CUSCO, 2024

Presentado por: Br. EDWIN JAIMES SALCEDO DNI N° 42239502;
presentado por: .... DNI N°: ....
Para optar el título Profesional/Grado Académico de MAESTRO EN MATEMÁTICAS

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por 11 veces, mediante el Software de Similitud, conforme al Art. 6° del ***Reglamento para Uso del Sistema Detección de Similitud en la UNSAAC*** y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 6 **%.**

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No sobrepasa el porcentaje aceptado de similitud.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las subsanaciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, conforme al reglamento, quien a su vez eleva el informe al Vicerrectorado de Investigación para que tome las acciones correspondientes; Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de Asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y **adjunto** las primeras páginas del reporte del Sistema de Detección de Similitud.

Cusco, 21 de enero de 2026

Firma

Post firma TONY GODOFREDO TICONA FLORES

Nro. de DNI 40840949

ORCID del Asesor 0000-0003-0652-3788

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema de Detección de Similitud: **oid:** 27259:547952775

Br EDWIN JAIMES SALCEDO

GESTIÓN DE INVENTARIO MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL EN LA MUNICIPALIDAD DE SAN JERONIMO, PROVIN...

Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::27259:547952775

Fecha de entrega

21 ene 2026, 10:27 a.m. GMT-5

Fecha de descarga

21 ene 2026, 10:40 a.m. GMT-5

Nombre del archivo

turniting GESTIÓN DE INVENTARIO MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL EN LA MUNICIPALIDAD ....pdf

Tamaño del archivo

1.7 MB

114 páginas

25.890 palabras

137.132 caracteres

6% Similitud general

El total combinado de todas las coincidencias, incluidas las fuentes superpuestas, para ca...

Filtrado desde el informe

- Bibliografía
- Coincidencias menores (menos de 15 palabras)

Exclusiones

- N.º de fuentes excluidas
- N.º de coincidencias excluidas

Fuentes principales

5% Fuentes de Internet
1% Publicaciones
3% Trabajos entregados (trabajos del estudiante)

Marcas de integridad

N.º de alerta de integridad para revisión

Texto oculto
60 caracteres sospechosos en N.º de páginas
El texto es alterado para mezclarse con el fondo blanco del documento.

Los algoritmos de nuestro sistema analizan un documento en profundidad para buscar inconsistencias que permitirían distinguirlo de una entrega normal. Si advertimos algo extraño, lo marcamos como una alerta para que pueda revisarlo.

Una marca de alerta no es necesariamente un indicador de problemas. Sin embargo, recomendamos que preste atención y la revise.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
ESCUELA DE POSGRADO

INFORME DE LEVANTAMIENTO DE OBSERVACIONES A TESIS

Dr. TITO LIVIO PAREDES GORDON, Director (e) de la Escuela de Posgrado, nos dirigimos a usted en condición de integrantes del jurado evaluador de la tesis intitulada **GESTIÓN DE INVENTARIO MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL EN LA MUNICIPALIDAD DE SAN JERONIMO, PROVINCIA DEL CUSCO, 2024** del (la) **Br. EDWIN JAIMES SALCEDO.** Hacemos de su conocimiento que el (la) sustentante ha cumplido con el levantamiento de las observaciones realizadas por el Jurado el día **CINCO DE ENERO DEL 2026.**

Es todo cuanto informamos a usted fin de que se prosiga con los trámites para el otorgamiento del grado académico de MAESTRO EN MATEMÁTICAS.

Cusco, 16 Enero 2026

DR. JAIME ZARATE DALENZ
Primer Replicante

DR. MARCO ANTONIO HERRERA VARGAS
Segundo Replicante

DR. EPIFANIO PUMA HUAÑEC
Primer Dictaminante

DRA. NORY LILIAM PALOMINO SILVERA
Segundo Dictaminante

Dedicatoria

Dedico este trabajo con profunda gratitud A mi difunta madrecita Josefa Salcedo y en especial para mi viejito lindo Mariano Jaimes, porque son el motivo para llegar a ser una persona mejor, porque con sus consejos me motivaron a seguir luchando y lograr la meta soñada.

Para mi querida esposa Águeda, por todo su amor, dedicación, y paciencia con la que me acompaño en mis momentos de recuperación que no fue uno fueron varios los momentos que pensé que no soportarías, y mis hijos Lady Sharmely y Liam Adbel mis dos grandes motores que hacen que esta máquina aun este operativa.

Para mis hermanas queridas Celia, María y Juanita que nunca me negaron su tiempo cuando las necesite, siempre estaban a mi lado en los momentos difíciles, a mis sobrinos que son mis hijos y hermanos Jesica, Walter y Luis Gustavo.

Agradecimiento

A Dios, por darme la vida, la salud y la fortaleza necesarias para culminar este importante logro académico.

A mis padres, por su amor incondicional, sus enseñanzas y el apoyo constante que me han brindado a lo largo de mi vida.

A mi familia, por su paciencia, comprensión y aliento en los momentos de mayor exigencia.

A mi asesor, Dr. Tony Godofredo Ticona Flores, por su guía, orientación y valiosos aportes que enriquecieron el desarrollo de esta investigación.

A mis docentes de la Maestría en Ciencias: Matemática de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, por haber compartido sus conocimientos y experiencias que contribuyeron a mi formación profesional.

Finalmente, a mis compañeros y amigos, quienes con su apoyo y motivación hicieron más llevadero este camino de esfuerzo y aprendizaje.

Índice general

Dedicatoria ... ii
Agradecimiento ... iii
Índice de tablas ... vii
Índice de figuras ... vii
Resumen ... viii
Sut'inchay ... ix
Introducción ... x
1. CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ... 11
1.1. Situación problemática ... 11
1.2. Formulación del problema ... 12
1.2.1. Problema general ... 12
1.2.2. Problemas específicos ... 12
1.3. Justificación de la investigación ... 13
1.4. Objetivos de la investigación ... 13
1.4.1. Objetivo general ... 13
1.4.2. Objetivos específicos ... 13
2. CAPITULO II. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL ... 15
2.1. Bases teóricas ... 15
2.1.1. Generalidades de los sistemas de inventario ... 15
2.1.2. Programación lineal (LP) ... 16
2.1.3. Estructura y objetivos de un sistema de inventarios ... 17
2.1.4. Clasificación de los modelos de inventarios ... 18
2.1.5. Costos relevantes ... 24
2.1.6. Restricciones ... 28

2.1.7. Modelos determinísticos 32

2.1.8. Modelos estocásticos 45

2.2. Marco conceptual 53

2.3. Antecedentes empíricos de la investigación 57

2.3.1. Antecedentes internacionales 57

2.3.2. Antecedentes nacionales 61

2.3.3. Antecedentes locales 63

2.4. Hipótesis 64

2.4.1. Hipótesis general 64

2.4.2. Hipótesis específicas 64

2.5. Identificación de variables e indicadores 64

2.6. Operacionalización de variables 66

3. CAPÍTULO III: METODOLOGÍA 67

3.1. Ámbito de estudio: Localización política y geográfica 67

3.2. Tipo y nivel de investigación 68

3.3. Unidad de análisis 69

3.4. Población de estudio 69

3.5. Técnicas de selección de muestra 69

3.6. Técnicas de recolección de información 70

3.7. Técnicas de análisis e interpretación de la información 70

4. CAPITULO IV: RESULTADO Y DISCUSIÓN 71
4.1. Nivel De Inventario Uniformemente Distribuido 71
4.2. Modelo ⟨Q, R⟩ para tiempo de reposición fijo 72
4.3. Demanda Poisson 77
4.4. Restricciones para múltiples artículos 80
4.5. Análisis de resultados 97
4.6. Interpretación de Resultados 97
4.7. Discusión de resultados 97
5. CAPITULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 101
5.1. Conclusiones 101
5.2. Recomendaciones 101
6. VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 103
ANEXOS 108

Índice de tablas

Tabla 1 Operacionalización de variables 66

Tabla 2 Modelo desarrollado 84

Tabla 3 Tabla de costos 87

Tabla 4 Resumen 89

Tabla 5 Matriz de consistencia 108

Tabla 6 Operacionalización de variables 110

Índice de figuras

Figura 1 *Demanda anual* 34

Figura 2 *Cantidad de ciclos por año* 38

Figura 3 *Generalizaciones del modelo de cantidad económica de pedidos* 41

Figura 4 *Modelo* $\langle Q, R \rangle$ 48

Figura 5 *Ubicación de la zona de estudio* 68

Figura 6 *Nivel de inventario uniformemente distribuido* 71

Figura 7 *Modelo*$\langle Q, R \rangle$ *con tiempo de reposición fijo* 73

Figura 8 *Línea combinada normalizada* 90

Figura 9 *Costos por artículos* 91

Figura 10 *Detalles de costos* 92

Figura 11 *Espacio usado* (m^2) 93

Figura 12 *Backorders esperados* 94

Figura 13 *Distribucion Z- Score* 95

Figura 14 *Resumen del sistema* 96

Figura 15 *Implementación del software* 113

Resumen

El objetivo de la investigación es analizar la gestión de inventarios mediante la aplicación de la programación lineal en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, durante el año 2024. La problemática identificada se relaciona con deficiencias en el control de inventarios, tales como niveles inadecuados de stock, elevados costos de almacenamiento y reposición, así como demoras para la atención en los requerimientos de las diferentes áreas usuarias, lo que afecta la efectividad para la disposición de los recursos públicos.

Este estudio se realiza con el enfoque cuantitativo, tipo aplicada y nivel explicativo, con un diseño no experimental y de corte transversal. La recopilación de información se realizó mediante el análisis documental de registros logísticos y la observación directa del proceso de gestión de inventarios. Como herramienta principal de análisis se empleó el modelo estocástico Q, R, el cual permite determinar la cantidad óptima de pedido (Q) y el punto de reorden (R), teniendo en cuenta la variabilidad en la demanda con tiempos de reposición fijo.

Los resultados evidencian que la programación lineal permite optimizar la gestión de inventarios, contribuyendo a la reducción en los costos, al uso eficiente de los recursos y a la mejora en la disponibilidad oportuna de los bienes. Se concluye que la programación lineal constituye como un material eficiente para fortalecer la gestión logística en la Municipalidad de San Jerónimo y apoyar la toma de decisiones en la administración pública.

Palabras clave: Gestión de inventarios, Programación lineal, Optimización de recursos, Toma de decisiones.

Sut’inchay

Kay yachay mask’aypa munayninqa waquchaqkunapa kamachiyta qhawariymi, siq’iy ñiqin ruwanakuyta llamk’achispa, San Jerónimo llaqtapa Munisipalidadninpi, Qusqu suyupi, 2024 watapi. Rikurqusqa sasachakuyqa waquchaqkunata kamachiypi pantaqkuna kasqanmanta hamun, ahinakunaqa mana allin waquchaq hayk’aynin, waquchaqkunata waqaychaypa huch’uy mana huch’uy gastosninkuna, chaymanta ima munasqakunata mañaq kamachiqkunaman tardaykuna, chaykunam mana allin llamk’achiyta ruwayta hark’an llaqtapa qullqinkunata.

Kay yachayqa yupay yachay ñiqinwan, llamk’ay yachay hina, riqsichiy p’unchayninpi, mana llamk’asqa ruwanakuy hinallataq huk p’unchaw k’uchupi ruwasqa. Willakuy huñuyqa ruwasqa qillqasqa kamachiy qhawariywan (logística qillqakuna) hinallataq chiqa qhawaywan waquchaq kamachiy ruwanakuyta. Aswan hatun llamk’achina hinataqa llamk’achisqa Q, R estokástico modelota, chaymi riqsichin aswan allin mañay hayk’ayninta (Q) hinallataq wakmanta mañay qallariy (R), mañaykunapi tikray kasqanta yuyarispa, hukllapi tikray tiempo kaqtin. Kayqa huk siq’iy ñiqin ruwanakuy modelowan huñusqa, waquchaqpa tukuy gastosninta aswan pisiyman churaypaq, mañaypaq, waqaychay atiy, hinallataq qullqi sayaykuna hina hark’ayninkunata yuyarispa.

Taripakuykunam rikuchin siq’iy ñiqin ruwanakuyqa waquchaqkunapa kamachiyta aswan allin ruwayta atisqanta, gastoskunata pisiyachispa, ima kaqkunata allinta llamk’achispa, hinallataq imakuna wakt’alla kasqanmanta allin apachiyta allinchispa. Tukuywanqa rimayta tukuchin kay siq’iy ñiqin ruwanakuyqa huk allin llamk’achina kasqanta San Jerónimo Munisipalidadpi logística kamachiyta kallpanchaypaq hinallataq llaqtapa kamachayninpi akllayta hap’iyta yanapaypaq.

Sut’in rimaykuna: Waquchaqkunapa kamachiy, Siq’iy ñiqin ruwanakuy, Ima kaqkunata aswan allin llamk’achiy, Akllayta hap’iy

Introducción

La gestión de inventarios constituye un elemento fundamental dentro de la administración pública, ya que permite asegurar la disponibilidad oportuna de bienes y recursos necesarios para el buen cumplimiento de las funciones institucionales, optimizando al mismo tiempo el uso de los recursos económicos. En las municipalidades, una inadecuada gestión de inventarios puede generar problemas como desabastecimiento, sobrestock, pérdidas de bienes y un uso ineficiente del presupuesto público, afectando directamente la calidad de los servicios brindados a la población.

En este contexto, la programación lineal se muestra como la herramienta matemática efectiva para la toma de decisiones, al permitir la optimización de recursos bajo ciertas restricciones. Su aplicación en la gestión de inventarios posibilita determinar cantidades óptimas de adquisición y distribución, minimizando costos y maximizando la eficiencia operativa. El uso de modelos de programación lineal contribuye a una gestión más transparente, planificada y orientada a resultados, especialmente en instituciones públicas que manejan recursos limitados.

La Municipalidad de San Jerónimo, ubicada en la provincia del Cusco, enfrenta el reto de mejorar sus procesos administrativos y logísticos para responder de manera eficiente a las demandas de la población durante el año 2024. En este escenario, resulta necesario implementar métodos cuantitativos que permitan fortalecer la gestión de inventarios y apoyar la toma de decisiones estratégicas.

Por ello, el presente estudio titulado "Gestión de inventario con programación lineal en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, 2024" tiene como objetivo analizar y proponer el modelo matemático de programación lineal que optimice la gestión de inventarios, contribuyendo a una administración más eficiente de los recursos y al mejoramiento del desempeño institucional.

CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Situación problemática

En la actualidad, la gestión de inventarios constituye un elemento importante para el buen funcionamiento de las entidades públicas, porque permite garantizar la disponibilidad oportuna de bienes y materiales necesarios para el cumplimiento de sus funciones administrativas y operativas. Sin embargo, en muchas municipalidades del país, este proceso presenta deficiencias relacionadas con una planificación inadecuada, controles poco eficientes y una asignación ineficaz de los recursos disponibles.

En la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, durante el año 2024, se ha evidenciado una gestión de inventarios caracterizada por la existencia de excesos y faltantes de bienes, compras realizadas sin criterios técnicos de optimización, elevados costos de almacenamiento y reposición, así como las demoras para atender los requerimientos de las diferentes áreas usuarias. Estas situaciones generan no solo ineficiencia administrativa, sino también un uso inadecuado del presupuesto público, afectando el cumplimiento oportuno de las actividades institucionales.

Asimismo, las decisiones en materia de inventarios se realizan principalmente de forma empírica, sin el apoyo de herramientas cuantitativas que permitan determinar cantidades óptimas de pedido, niveles adecuados de stock y una mejor distribución de los recursos disponibles. La ausencia de modelos matemáticos de optimización limita la capacidad de la municipalidad para mejorar sus procesos logísticos y responder de manera eficiente a las demandas internas.

Frente a esta problemática, surge la necesidad de aplicar técnicas de programación lineal como soporte en el proceso para la toma de decisiones, lo que permitirá optimizar la gestión de inventarios mediante la minimización de costos y el aprovechamiento eficiente de los recursos.

Bajo estas condiciones, resulta pertinente analizar cómo la aplicación de la programación lineal puede contribuir a mejorar la gestión de inventarios en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, 2024.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

En la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, durante el año 2024, se ha evidenciado una gestión de inventarios caracterizada por la existencia de excesos y faltantes de bienes. Estas situaciones generan no solo ineficiencia administrativa, sino también un uso inadecuado del presupuesto público.

¿De qué manera la aplicación de la programación lineal puede mejorar la gestión de inventarios en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, 2024?

1.2.2. Problemas específicos

¿Cómo influye la aplicación de la programación lineal en la optimización de los niveles de inventario de bienes y materiales en la Municipalidad de San Jerónimo en el año 2024?

¿En qué medida la programación lineal contribuye a la reducción de costos de almacenamiento y reposición en la gestión de inventarios de la Municipalidad de San Jerónimo durante el año 2024?

¿Cómo la implementación de un modelo de programación lineal permite mejorar la eficiencia en la distribución y disponibilidad oportuna de los bienes almacenados en la Municipalidad de San Jerónimo en el año 2024?

1.3. Justificación de la investigación

Esta investigación desarrollo un análisis de las políticas de inventario y sus consecuencias prácticas para la mejora en la administración municipal, implementado un modelo de programación lineal que permitirá a la municipalidad:

a) Reducir costos de inventario mediante una planificación más precisa.
b) Asegurar la disponibilidad de insumos en el momento oportuno.
c) Optimizar el uso del espacio físico en almacenes.
d) Mejorar la trazabilidad y el control documental de los materiales.

Se fundamenta que la investigación aporta al campo de la matemática aplicada y la gestión pública, al demostrar la utilidad de la programación lineal en la resolución de problemas reales en gobiernos locales. Asimismo, se genera un referente académico que podrá ser replicado en otros contextos similares.

Se verificó que la mejora en la gestión de inventarios repercute en la calidad de los servicios municipales, generando beneficios directos para la población, tales como obras más oportunas, limpieza pública más eficiente y reducción de desperdicios y optimización de recursos. Ello contribuye a fortalecer la confianza ciudadana en la administración pública.

1.4. Objetivos de la investigación

1.4.1. Objetivo general

Determinar de qué manera la programación lineal mejora la gestión de inventarios de la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, 2024.

1.4.2. Objetivos específicos

Analizar el efecto de la programación lineal en la optimización de los niveles de inventario en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, 2024.

Evaluar la influencia de la programación lineal en la reducción de costos de almacenamiento y reposición en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, 2024.

Determinar cómo la programación lineal optimiza la disponibilidad oportuna de los bienes en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, 2024.

CAPITULO II. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

2.1. Bases teóricas

2.1.1. Generalidades de los sistemas de inventario

Los inventarios son una realidad natural en prácticamente todas las empresas, sin importar el sector económico al que pertenezcan. La razón detrás de esto es sencilla: los inventarios permiten responder de manera inmediata, o casi inmediata, a la demanda de un producto. Desde la perspectiva del cliente, siempre debe haber disponibilidad del artículo requerido (Chopra & Meindl, 2016).

Sin embargo, mantener inventarios implica costos para las empresas, y en algunos casos, estos representan una parte significativa de sus gastos operativos. Por esta razón, no siempre resulta beneficioso para las empresas contar con inventarios elevados. (Heizer et al., 2017).

Es importante señalar que los términos cliente empresa "pueden aplicarse a diversas situaciones. Un cliente no solo es el consumidor final del producto, sino que también puede ser un departamento dentro de la misma empresa que necesita insumos de otra área en el proceso de producción. En este sentido, los inventarios pueden encontrarse en distintos puntos de la cadena de suministro (Arnold & Chapman, 2007).

Es evidente que los inventarios representan un mal necesario. Los clientes esperan ser atendidos con rapidez, y si al llegar no encuentran disponibilidad del producto que buscan, la espera podría afectar futuras transacciones o, en el peor de los casos, llevarlos a buscar alternativas en otra empresa, algo claramente indeseable (Ballou, 2004).

No obstante, existen otras razones por las cuales una empresa u organización decide gestionar inventarios. Por ejemplo, en el caso de productos con precios estacionales, puede resultar conveniente adquirir una cantidad considerable cuando el costo es bajo, almenarlo y venderlo cuando los precios aumenten. Del mismo modo, producir o comprar en grandes volúmenes suele reducir el costo unitario, lo que también justifica mantener inventarios (Chopra & Meindl, 2016).

Dado que hay múltiples factores que influyen en la necesidad de almacenar productos, las organizaciones buscan mantener niveles óptimos de inventario. En este sentido, la administración de inventarios tiene como objetivo encontrar un equilibrio adecuado entre los costos de almacenamiento y los beneficios que estos generan (Ballou, 2004)

2.1.2. Programación lineal (LP)

Es una técnica matemática para optimización donde objetivo es encontrar un valor mínimo o máximo para una determinada función lineal, por tanto, es el modelo de optimización más avanzado y clásico por excelencia. Esta técnica matemática tiene múltiples aplicaciones en situaciones reales. La programación lineal es el más desarrollado y por ende el más utilizado respecto a otros tipos de optimizadores. La programación lineal abarca una gran variedad de actividad humana ente los cuales podemos mencionar planificación de operaciones, asignación de tareas, organización para una buena gestión, economía, administración etc. Su interés radica en que utiliza técnicas avanzadas estables para determinar un valor optimo que permita tomar decisiones con un porcentaje alto de éxito.

Sea el modelo matemático de PL estandarizado:

$$\underset{x_j}{Min}\, z = \sum_j c_j x_j$$

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_j$$

$$x_j \geq 0$$

Donde:

x_j son las variables de decisión

a_{ij} coeficientes tecnológicos

b_j recursos disponibles

z función objetivo

Geometría de la programación lineal

Para poder analizar un problema de forma gráfica es necesario tener en cuenta algunos términos generales

Un *hiperplano* se define como el conjunto de puntos x_j que cumplen la igualdad, $\sum_j a_{ij}x_j = b_j$ .Para dos dimensiones un hiperplano es una recta. En hiperplano los semiespacios se definen por $\sum_j a_{ij}x_j \leq b_j$ y $\sum_j a_{ij}x_j \geq b_j$.

Teorema de existencia de puntos extremos

Dado $S = \{x/Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset,$ $A \in R^{mxn}$, $r(A) = m$. Por tanto S tiene por lo menos un punto extremo.

Teorema de representación de un politopo

Sea $S = \{x/Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ y acotado, $A \in R^{mxn}$, $r(A) = m$. Sean $x_1, \dots, x_k$ los puntos extremos de S. Por tanto $x \in S$. Si y solo si x se puede representar por medio de una combinación lineal convexa de los puntos extremos del conjunto. Esto quiere decir que $\exists \lambda_1, \dots \lambda_2 \geq 0,$ talque $\sum_i \lambda_i = 1$ y $x = \sum_i \lambda_i x_i$.

2.1.3. Estructura y objetivos de un sistema de inventarios

Un sistema de inventario es un conjunto de normas y controles diseñado para gestionar los niveles de existencias, definiendo cuánto inventario se debe mantener, cuándo es necesario reabastecerlo y qué volumen de pedido realizar. Además, establece la estructura organizativa y las políticas operativas para la administración y control de los productos almacenados (Arnold y Chapman, 2007).

Este sistema se encarga de solicitar y recibir mercancía, determinando el momento adecuado para realizar los pedidos y llevando un registro detallado de lo solicitado, la cantidad requerida y el responsable de la solicitud. También debe supervisar el proceso para responder a interrogantes como: ¿El proveedor recibió el pedido? ¿Ha sido enviado? ¿Las fechas de entrega son correctas? ¿Se han establecido protocolos para reordenar o devolver productos no deseados? (Heizer et al., 2017)

Para ayudar al sistema a responder las diversas cuestiones que surgen, se traducen sus características en un modelo matemático. Este modelo representa la parte abstracta del sistema y se utiliza para la toma de decisiones y la optimización de su eficiencia (Chopra & Meindl, 2016).

En términos generales, el modelo debe responder a dos preguntas fundamentales: ¿cuál es la cantidad óptima a solicitar? y ¿cuándo debe realizarse el pedido? Las respuestas se basan en un enfoque operativo cuyo objetivo principal es minimizar los costos asociados al mantenimiento del inventario. Sin embargo, en algunos casos, resulta más conveniente centrarse en la minimización de las utilidades, que es la meta principal de cualquier empresa con fines de lucro (Ballou, 2004)

Si bien maximizar las ganancias sería el objetivo ideal, este enfoque es más complejo, ya que las utilidades no dependen únicamente de la gestión de inventarios, sino del desempeño global de todas las áreas de la empresa. Por ello, para abordar esta complejidad, se requeriría un modelo multiobjetivo que considere la interrelación entre los distintos departamentos de la organización (Chopra & Meindl, 2016).

2.1.4. Clasificación de los modelos de inventarios

Los sistemas de inventario pueden diferir considerablemente dependiendo de diversos factores y circunstancias. Entre los elementos que influyen en estas variaciones se encuentran la naturaleza de los bienes almacenados, el comportamiento de la demanda y el sistema de información utilizado (Ballou, 2004; Tersine, 1994).

Debido a estas diferencias, resulta conveniente clasificar los distintos tipos de modelos de inventario según ciertas condiciones. Una forma de categorizarlos es en función del comportamiento de la demanda y el tiempo de reposición, lo que da lugar a los modelos determinísticos y modelos estocásticos (Chopra & Meindl, 2016; Silver et al., 2016).

Los modelos determinísticos asumen que tanto la demanda como el tiempo de reposición son constantes, mientras que los modelos estocásticos consideran una demanda variable y tiempo de reposición constante o tanto la demanda como el tiempo de reposición sigue un comportamiento aleatorio. En estos últimos, se supone que las variables son estacionarias, es decir, pueden representarse mediante una función de probabilidad que se mantiene constante a lo largo del tiempo (Heizer et al., 2017; Nahmias & Olsen, 2015).

Los modelos de inventario pueden clasificarse según la frecuencia con la que se revisan los niveles de stock. En este sentido, existen dos tipos principales: modelos de revisión continua y modelos de revisión periódica (Arnold & Chapman, 2007; Zipkin, 2000).

En los modelos de revisión continua, el nivel de inventario se monitorea en todo momento, registrando de inmediato cualquier transacción que lo modifique, ya sea una compra o una venta. Por otro lado, los modelos de revisión periódica solo permiten conocer el estado del inventario en momentos específicos, es decir, las revisiones se realizan en intervalos de tiempo previamente establecidos, y solo en esos momentos se actualiza la información del sistema (Heizer et al., 2017; Nahmias & Olsen, 2015).

Los modelos de inventario también pueden nombrarse según características específicas del sistema o la forma en que se maneja la información. Incluso es posible combinar distintas clasificaciones, dando lugar a denominaciones como modelo estocástico de revisión continua o modelo estocástico de revisión periódica (Ballou, 2004; Zipkin, 2000).

En el caso de los modelos determinísticos, no hay diferencia en los resultados obtenidos entre las políticas de revisión continua y periódica, ya que es posible predecir con exactitud los niveles de inventario en cualquier momento. Sin embargo, en los modelos estocásticos sí existen diferencias significativas entre ambas estrategias. Matemáticamente, los modelos con revisión periódica suelen ser más complejos, mientras que los de revisión continua requieren un monitoreo constante, lo que puede hacerlos más costosos debido a la necesidad de un sistema de información adecuado (Arnold & Chapman, 2007; Silver et al., 2016)

Además, algunos sistemas de inventario presentan características particulares y, debido a su relevancia en la literatura, han sido modelados bajo condiciones específicas con notaciones especiales. A continuación, se describen brevemente algunos de los modelos más estudiados (Chopra & Meindl, 2016; Zipkin, 2000).

2.1.4.1. Modelo ⟨Q, R⟩. En el presente esquema, la variable R representa el punto de reorden, es decir, el nivel de inventario en el que se requiere efectuar un nuevo pedido de Q unidades. Para su correcta implementación, es necesario que el sistema opere bajo una política de revisión continua, ya que se requiere un monitoreo constante para identificar el momento exacto en que el inventario alcanza el nivel R y, en ese instante, realizar el pedido correspondiente. (Arnold & Chapman, 2007; Chopra & Meindl, 2016). Además, se asume que los productos se venden de manera individual. Si la demanda ocurre en lotes, y el tamaño de estos lotes es variable, podría darse el caso de que una sola venta reduzca el inventario bajo el nivel de reorden. En estos escenarios, el modelo ⟨Q, R⟩ no sería adecuado (Nahmias & Olsen, 2015). Por otro lado, El periodo de reposición o la duración de la llegada de los pedidos puede mantenerse invariable o fluctuar conforme a una función de probabilidad (Heizer et al., 2017; Zipkin, 2000).

Ejemplo: Una tienda de repuestos automotrices siempre pide 50 unidades de un producto cada vez que el inventario cae a 20 unidades, sin importar la demanda reciente. Aquí, Q es constante y no se ajusta a variaciones en el consumo (Ballou, 2004*)*.

2.1.4.2. Modelo ⟨R, r⟩. Este modelo funciona así: cuando el nivel de inventario desciende hasta r o por debajo de este, se debe realizar un pedido cuya cantidad sea suficiente para reabastecer el inventario hasta alcanzar el nivel R. A diferencia del modelo <Q, R>, este enfoque es más adecuado cuando la demanda ocurre en lotes variables, lo que lo hace útil en escenarios donde la cantidad requerida fluctúa significativamente (Nahmias & Olsen, 2015).

Al igual que el modelo anterior, este sistema requiere una política de revisión continua, ya que es fundamental conocer en tiempo real el momento exacto en el que el inventario cae al nivel crítico r para generar el pedido correspondiente de manera inmediata (Arnold & Chapman, 2007; Chopra & Meindl, 2016). Sin este monitoreo constante, la empresa podría enfrentar desabastecimientos inesperados o pedidos tardíos que afectarían la operación (Heizer et al., 2017).

Es importante destacar que el modelo <Q, r> es un caso particular del modelo más general <R, r>. La diferencia clave entre ambos radica en que, mientras en el modelo <Q, r> la cantidad pedida (Q) es siempre fija, en el modelo <R, r> el volumen del pedido varía según la discrepancia entre el inventario presente y el grado de reposición R. Esta variabilidad hace que el modelo <R, r> sea más flexible y adaptable a cambios en la demanda, pero también más complejo de gestionar desde la perspectiva matemática y logística (Tersine, 1994; Zipkin, 2000b). Para ilustrarlo mejor, imaginemos dos escenarios:

Ejemplo: Una empresa de distribución de alimentos maneja un inventario donde los pedidos dependen de las fluctuaciones en la demanda. Si el inventario baja a 100 unidades (r), la empresa realiza un pedido que reabastece el stock hasta 500 unidades (R), ajustando la cantidad solicitada según el inventario disponible en ese momento (Silver et al., 2016).

Este último modelo, aunque más eficiente en términos de optimización del inventario, requiere herramientas avanzadas para su correcta implementación, como sistemas de gestión automatizados que permitan monitorear los niveles de stock en tiempo real y realizar pedidos dinámicos basados en análisis de demanda y patrones de consumo (Nahmias & Olsen, 2015; Zipkin, 2000).

2.1.4.3. Modelo ⟨R, T⟩. Este modelo aplica una estrategia de revisión periódicamente, en la que T simboliza el periodo que comprende cada revisión del inventario. En cada uno de estos momentos establecidos previamente, se efectúa un pedido con el volumen requerido para reponer el inventario hasta llegar al nivel R (Ballou, 2004; Silver et al., 2016).

En contraposición a los modelos de revisión, continua, en los que el pedido se realiza en función del nivel de inventario disponible, este enfoque establece pedidos en intervalos fijos, sin importar cuánto stock haya en ese momento o cuanta demanda se haya registrado previamente (Arnold & Chapman, 2007; Chopra & Meindl, 2016). Este modelo permite gestionar tanto demandas individuales como por lotes, lo que lo hace aplicable en diversas situaciones. Además, el tiempo de reposición del pedido puede ser constante o estar sujeto a variaciones, dependiendo de las condiciones del proveedor o del sistema de abastecimiento (Heizer et al., 2017; Nahmias & Olsen, 2015).

Ejemplo: Una cadena de supermercados utiliza un modelo <R, T> para gestionar su inventario de productos perecederos. Cada semana (T = 7 días), revisa su nivel de stock y realiza un pedido que le permite reabastecerse hasta un nivel ´optimo (R), sin importar cuanto se haya vendido en la semana anterior. Esto les permite garantizar la disponibilidad de productos frescos sin necesidad de monitorear constantemente el inventario, aunque puede existir el riesgo de escasez o exceso de stock si la demanda varía inesperadamente (Zipkin, 2000; Tersine, 1994).

2.1.4.4. Modelo ⟨nQ, R, T ⟩. El modelo <nQ, El modelo <nQ, R, T> es una táctica de administración de inventarios que fusiona con ponentes de revisión periódica y constante. En este método, se realiza una evaluación del inventario a periodos regulares de tiempo, señalados por T. En cada revisión, si el nivel de inventario ha descendido o es equivalente al punto de reordenación, se establece una orden de compra. La cantidad requerida es un múltiplo entero de una cantidad fija Q (o sea, nQ, donde n es un número entero positivo), con la finalidad de que el nivel de inventario, tras la recepción del pedido, se incremente, se sitúé entre R y R + Q (Silver et al., 2016). Los modelos mencionados anteriormente representan solo una parte de los que se encuentran en la literatura actual. En general, su nivel de complejidad tiende a aumentar en el mismo orden en que fueron presentados estos modelos permite establecer diferentes supuestos, lo que da lugar a diversas políticas de gestión de inventarios, haciendo que este área de estudio sea amplia y compleja (Ballou, 2004; Chopra & Meindl, 2016).

Además, aún no se han abordado otros aspectos relevantes, como los sistemas de múltiples escalones, donde un mismo producto debe ser administrado en distintos lugares dentro de la cadena de suministro, añadiendo un nivel extra de complejidad a la gestión del inventario (Zipkin, 2000; Tersine, 1994). Posterior a la definición de la doctrina de operación orientada hacia la minimización de los costos de inventario, es imperativo especificar con brevedad los costos que deben ser integrados en la función de costos de un modelo de inventario. Estos costos pueden ser diversos y difíciles de cuantificar, por lo que generalmente se requiere hacer estimaciones considerando ciertos supuestos adecuados (Heizer et al., 2017). El propósito principal de un modelo de inventarios es disminuir al mínimo los gastos relacionados dentro de un periodo específico, lo que se traduce en reducir el costo por unidad de tiempo. En la mayoría de las situaciones, la unidad temporal empleada es el año, por lo que generalmente se muestra la función de costos en relación al costo anual del inventario. No obstante, cualquier otro periodo de tiempo claramente delimitado pue- de generar los mismos resultados, siempre que todos los costos sean de igual magnitud (Arnold & Chapman, 2007). Es crucial subrayar que solo se deben considerar aquellos gastos que están directamente relacionados con las variables del modelo. Si, bajo las condiciones previamente fijadas, un costo no se ve afectado por las variables de decisión, este debe ser excluido del análisis. Para entender de manera más profunda este concepto, a continuación, se exponen las explicaciones de los diferentes tipos de costos que se incluyen en el modelo (Silver et al., 2016; Zipkin, 2000).

2.1.5. Costos relevantes

Una vez establecida la doctrina de operación basada en la minimización de los costos de inventario, es momento de describir brevemente los costos que deben incluirse en la función de costos de un modelo de inventarios. Estos costos pueden ser diversos y difíciles de cuantificar, por lo que generalmente se requiere hacer estimaciones considerando ciertos supuestos adecuados (Ballou, 2004; Silver et al., 2016).

El objetivo principal de un modelo de inventarios es reducir al mínimo los costos asociados dentro de un período determinado, lo que equivale a minimizar el costo por unidad de tiempo. En la mayoría de los casos, la unidad de tiempo utilizada es el año, por lo que la función de costos suele expresarse en términos del costo anual de inventario. Sin embargo, cualquier otro intervalo de tiempo bien definido produciría los mismos resultados, siempre que todos los costos sean dimensionalmente homogéneos (Heizer et al., 2017; Nahmias & Olsen, 2015)

Es importante destacar que solo deben incluirse aquellos costos que dependen directamente de las variables del modelo. Si, bajo los supuestos establecidos, un costo no está influenciado por las variables de decisión, este debe omitirse del análisis (Arnold & Chapman, 2007; Zipkin, 2000). Para comprender mejor este concepto, a continuación, se presentan las descripciones de los distintos tipos de costos involucrados en el modelo (Tersine, 1994; Chopra & Meindl, 2016).

2.1.5.1. Costos de Adquisición. El costo de adquisición puede hacer referencia al precio de compra de los artículos cuando estos provienen de un proveedor externo o al costo de producción cuando los productos son fabricados internamente dentro de la empresa (Ballou, 2004; Tersine, 1994). En la mayoría de los casos, este costo no está influenciado por las variables del modelo.

Por ejemplo, en un modelo <Q, R>, si el costo unitario de los artículos no varía en función de la cantidad pedida (Q), no es necesario incluirlo en la función de costos (Arnold & Chapman, 2007; Chopra & Meindl, 2016). Sin embargo, este costo debe considerarse en casos donde existan descuentos por volumen en la compra del producto o cuando el sistema de inventarios también deba cubrir los gastos de transporte y estos dependan de la cantidad transportada (Nahmias & Olsen, 2015; Silver et al., 2016). No obstante, esta última situación es poco común (Heizer et al., 2017; Zipkin, 2000b)

2.1.5.2. Costos Fijos de Ordenar. Cada vez que se realiza un pedido, el sistema asume ciertos costos asociados, como gastos administrativos, costos de personal, uso de papel, llamadas al proveedor, envío de correos, entre otros. Estos costos suelen representarse como un valor fijo que se aplica cada vez que se genera una orden (Ballou, 2004; Arnold & Chapman, 2007).

Si el tamaño del lote (Q) solicitado en cada pedido es pequeño, será necesario realizar un mayor número de órdenes dentro de un período determinado, lo que incrementará el costo fijo anual asociado al proceso de solicitud de inventario (Chopra & Meindl, 2016; Silver et al., 2016).

2.1.5.3. Costos de Mantener Inventario. El costo de mantenimiento abarca diversos factores, algunos de los cuales son difíciles de cuantificar e incorporar directamente en el modelo. Por ejemplo, si la bodega donde se almacenan los productos es alquilada, el costo de arrendamiento puede depender del espacio utilizado, el cual está directamente relacionado con el nivel de inventario (Heizer et al., 2017; Tersine, 1994).

Además, mantener los productos en buen estado puede generar gastos adicionales en servicios como electricidad y vigilancia, cuyos costos pueden variar de manera compleja según el volumen de inventario almacenado, lo que dificulta su expresión en el modelo (Ballou, 2004).

Sin embargo, el costo más significativo de mantener inventario suele ser el costo de oportunidad, ya que el capital invertido en productos almacenados podría generar una rentabilidad si se destinara a otra inversión. Para abordar esto, se asigna un costo de oportunidad a cada unidad de inventario, generalmente expresado como un porcentaje del valor del artículo (Zipkin, 2000; Nahmias & Olsen, 2015).

El costo de mantenimiento es proporcional al tiempo que un producto permanece en inventario y se mide en unidades monetarias por unidad de producto y por unidad de tiempo (Silver et al., 2016).

2.1.5.4. Costos de Escasez. El costo de escasez es uno de los más difíciles de cuantificar dentro de un sistema de inventarios, ya que ocurre cuando el inventario disponible se agota y no es posible atender una demanda en el momento en que se presenta. Su medición es compleja, especialmente porque involucra costos intangibles como la pérdida de confianza del cliente o el deterioro de la reputación de la empresa (Ballou, 2004; Chopra & Meindl, 2016).

Es importante distinguir entre dos situaciones: pedidos pendientes y ventas perdidas. Un pedido pendiente ocurre cuando un cliente solicita un producto que no está en stock, pero está dispuesto a esperar hasta que se reponga el inventario. En contraste, una venta perdida sucede cuando la falta de existencias impide la transacción y no hay posibilidad de satisfacer la demanda en el futuro (Nahmias & Olsen, 2015; Zipkin, 2000).

Para cuantificar estos costos, se suele asignar una penalización por cada unidad de demanda insatisfecha y, en el caso de los pedidos pendientes, un costo adicional proporcional al tiempo de espera del cliente. En el caso de una venta perdida, solo se considera un costo fijo por cada unidad no vendida, ya que no existe un tiempo de espera (Silver et al., 2016; Tersine, 1994).

Cuando un pedido queda pendiente, el costo puede incluir tanto una penalización fija por el incumplimiento inmediato como un costo adicional en función del tiempo de espera del cliente. Esto se debe a que, aunque el producto termine siendo entregado, el simple hecho de hacer esperar al cliente puede afectar la credibilidad de la empresa. Como resultado, en este caso se suele aplicar una combinación de un costo fijo por unidad y un costo variable según el tiempo de espera.

2.1.5.5. Otros Costos del Sistema de inventario. Los costos asociados a un sistema de inventarios son diversos y pueden variar según múltiples factores. Sin embargo, los mencionados anteriormente son los que generalmente se incluyen en el análisis dentro de un modelo matemático. Existen otros factores que pueden influir en el costo del sistema, aunque en menor medida, o que se consideran independientes de la estrategia operativa del sistema. Por ejemplo, el costo relacionado con el manejo de la información y el procesamiento de datos puede ser significativo, pero usualmente no se vincula directamente con las variables del modelo. En otras palabras, el costo de procesar la información no se ve afectado por la cantidad solicitada en cada pedido o el momento en que se realiza (Heizer et al., 2017)

En síntesis, los principales costos considerados en la función de costo del modelo incluyen: el costo fijo de realizar un pedido, el costo de mantenimiento del inventario, el costo de escasez (cuando se contemplan pedidos pendientes o ventas perdidas) y el costo de adquisición, especialmente en casos donde existen descuentos por volumen de compra (Ballou, 2004; Chopra & Meindl, 2016).

2.1.6. Restricciones

En muchos casos, los sistemas de inventario operan bajo condiciones de recursos limitados, lo que implica que no basta con definir una función de costo óptima, sino que es fundamental establecer restricciones que reflejen las limitaciones reales del sistema. Estas restricciones permiten garantizar que el modelo sea viable y aplicable en la práctica, evitando soluciones teóricas que no puedan implementarse debido a limitaciones operativas (Arnold & Chapman, 2007; Zipkin, 2000).

Algunas de las restricciones más comunes incluyen:

Restricciones de capacidad de almacenamiento: En muchas empresas, el espacio disponible para almacenar inventario es limitado, por lo que el modelo debe asegurarse de que el volumen total de productos no exceda la capacidad del almacén (Ballou, 2004).

Restricciones presupuestarias: La disponibilidad de capital para la compra de inventarios es otro factor crítico. Un modelo debe considerar un límite máximo de inversión en inventario para evitar problemas de flujo de efectivo (Chopra & Meindl, 2016).

Restricciones de tiempo de entrega: En ciertos sistemas, los tiempos de reposición pueden estar sujetos a condiciones específicas, como contratos con proveedores o restricciones logísticas, lo que afecta la planificación de pedidos (Silver et al., 2016)

Restricciones de demanda mínima o contractual: Algunas empresas deben garantizar un nivel mínimo de stock para cumplir con contratos o acuerdos con clientes, lo que impone restricciones adicionales al sistema (Nahmias & Olsen, 2015).

Restricciones en la frecuencia de pedidos: Dependiendo de los costos administrativos o la disponibilidad de producción, puede ser necesario limitar la cantidad de pedidos en un período determinado (Ballou, 2004; Arnold & Chapman, 2007).

En conclusión, incluir restricciones en los modelos de inventarios no solo mejora su precisión y aplicabilidad, sino que también permite optimizar la gestión de los recursos disponibles, asegurando que el sistema funcione de manera eficiente dentro de los límites establecidos.

2.1.6.1. Capacidad de almacenamiento. Todo sistema de inventario en la realidad opera con una capacidad de almacenamiento finita, lo que significa que la gestión del inventario debe considerar limitaciones físicas para evitar problemas logísticos y operativos. Al momento de realizar un pedido, es fundamental asegurarse de que la cantidad solicitada no supere la capacidad máxima de la bodega, ya que el exceso de inventario podría quedar expuesto a condiciones ambientales adversas o generar costos adicionales en almacenamiento temporal (Ballou, 2004; Arnold & Chapman, 2007).

Para gestionar eficientemente este aspecto, es necesario cuantificar el espacio ocupado por cada unidad de producto y determinar el espacio total requerido para un lote completo. Esta ocupación espacial puede expresarse de diversas maneras:

Medición por volumen o área unitaria: Se calcula el espacio que ocupa cada artículo en términos de metros cúbicos o metros cuadrados, lo que permite estimar con precisión la capacidad total utilizada.

Medición por número de unidades: Se establece un límite máximo de unidades almacenadas en función de la disposición de los artículos dentro de la bodega.

Medición combinada: En algunos casos, se consideran tanto la cantidad de unidades como su volumen total, lo que resulta especialmente útil cuando los productos varían en tamaño y forma (Tersine, 1994; Zipkin, 2000).

2.1.6.2. Frecuencia de pedidos. En algunos escenarios, el sistema de inventarios enfrenta restricciones en la cantidad de pedidos que puede realizar dentro de un período determinado, estableciéndose así un límite máximo en la frecuencia de pedidos anuales. Esta limitación puede derivarse de diversos factores, siendo uno de los más comunes las condiciones impuestas por los proveedores (Chopra & Meindl, 2016; Silver et al., 2016). En ciertos casos, los proveedores solo están en capacidad de atender un número específico de órdenes al año debido a limitaciones en su producción, logística o acuerdos comerciales previamente establecidos con la empresa.

Esta restricción debe ser considerada dentro del modelo de inventarios, ya que impacta directamente en la planificación de los pedidos y en la gestión del stock disponible. Si la empresa no puede realizar pedidos con la frecuencia ideal para minimizar costos de mantenimiento y escasez, será necesario encontrar un equilibrio entre el tamaño de los lotes y la cantidad de pedidos permitidos.

Además, el límite en la frecuencia de pedidos puede influir en la negociación con proveedores, ya que la empresa podría verse en la necesidad de ajustar sus volúmenes de compra para asegurar el suministro de productos sin sobrepasar las restricciones establecidas. También puede requerir una optimización del almacenamiento para evitar problemas de desabastecimiento o costos excesivos por mantener inventario en exceso (Heizer et al., 2017; Nahmias & Olsen, 2015).

En definitiva, cualquier modelo de inventario debe considerar este tipo de restricciones para garantizar que la operación sea viable dentro de las limitaciones del entorno comercial y logístico en el que se desarrolla.

2.1.6.3. Presupuesto. La disponibilidad de flujo de caja es una de las restricciones más críticas en la gestión de inventarios, ya que el capital disponible para la compra de productos no siempre es ilimitado. En muchas ocasiones, una empresa enfrenta limitaciones financieras que le impiden adquirir la cantidad ideal de unidades en un solo pedido, no por restricciones de almacenamiento o logística, sino simplemente porque no dispone del dinero suficiente en ese momento (Ballou, 2004; Arnold & Chapman, 2007).

Para abordar esta situación dentro de un modelo de inventarios, es fundamental incluir una restricción que refleje la inversión máxima permitida en cada compra. Esta restricción garantiza que la empresa mantenga un equilibrio entre su capacidad de abastecimiento y su estabilidad financiera, evitando problemas de liquidez que podrían comprometer otras áreas operativas o estratégicas (Chopra & Meindl, 2016; Silver et al., 2016).

Además, esta limitante obliga a optimizar la planificación de pedidos, lo que puede llevar a estrategias como priorizar ciertos productos de mayor rotación, negociar plazos de pago con proveedores o incluso buscar financiamiento externo para cubrir necesidades críticas de inventario. También puede influir en la decisión entre realizar pedidos más pequeños y frecuentes o buscar descuentos por volumen que permitan maximizar el poder adquisitivo dentro del presupuesto disponible.

En definitiva, incluir la restricción del capital máximo invertido en inventarios dentro de un modelo matemático no solo ayuda a reflejar con mayor precisión la realidad financiera de la empresa, sino que también permite desarrollar estrategias más eficientes para la gestión de recursos y la sostenibilidad del negocio.

2.1.7. Modelos determinísticos

Los modelos determinísticos surgen cuando se asume que existe un conocimiento completo y exacto sobre como la demanda y los tiempos de reposición se comportan. Estos modelos son relativamente fáciles de manejar utilizando matemática elemental, ya que no tienen en cuenta las fluctuaciones o incertidumbres en esos factores. Sin embargo, su aplicabilidad es limitada, ya que no reflejan la variabilidad inherente a la demanda o al tiempo de reposición, lo cual es una característica común en los entornos de negocios reales (Heizer et al., 2017; Nahmias & Olsen, 2015)

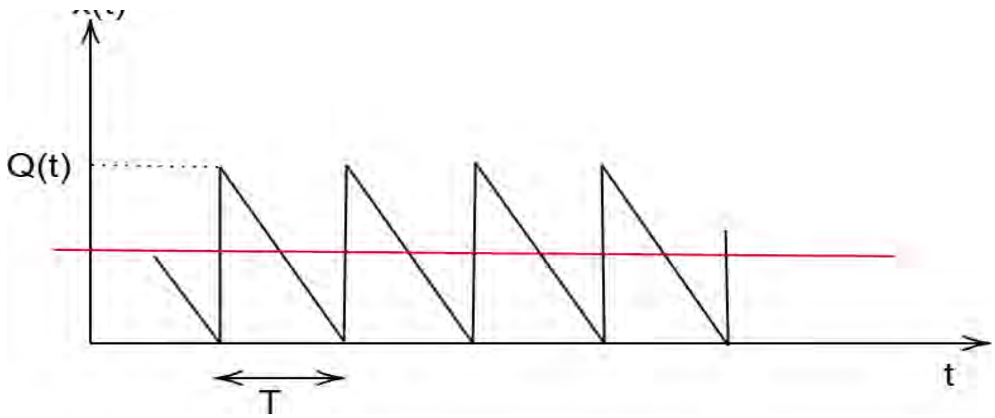
El modelo de inventarios más relevante dentro de esta categoría es el modelo EOQ (Economic Order Quantity o Cantidad Económica de Pedido), propuesto por Harris en 1913. El modelo buscaba determinar un pedido óptimo que minimizara el costo total del inventario, considerando solo los costos de adquisición y de mantenimiento. A pesar de su simplicidad y de ser un referente en la teoría de inventarios, el modelo EOQ no considera factores como la incertidumbre en la demanda o el tiempo de reposición, lo cual lo hace poco realista para muchas situaciones en las que los negocios enfrentan variabilidad (Ballou, 2004; Zipkin, 2000).

Con el tiempo, se han desarrollado intentos de generalizar el modelo EOQ, incorporando aspectos estocásticos (o probabilísticos) que permiten modelar de manera más precisa la incertidumbre y las fluctuaciones en estos parámetros (Chopra & Meindl, 2016; Silver et al., 2016). De esta forma, se busca mejorar la aplicabilidad de los modelos de inventarios, adaptándolos a escenarios más complejos y reales. Sin embargo, a pesar de estas generalizaciones, los modelos determinísticos continúan siendo útiles para situaciones en las que los supuestos de certeza sobre los tiempos de reposición y la demanda se acercan a la realidad del negocio (Tersine, 1994; Nahmias & Olsen, 2015).

2.1.7.1. Modelo de lote económico. Del modelo de Lote Económico de Pedido (EOQ), el comportamiento del inventario sigue una dinámica establecida, como se ilustra en la Figura 1. Este modelo asume que no ocurrirán faltantes de inventario en ningún momento, garantizando que siempre haya suficientes existencias para satisfacer la demanda (Ballou, 2004; Chopra & Meindl, 2016). Además, se considera que el costo por adquisición no depende de que cantidad se pedirá, es decir, no se aplican descuentos por realizar pedidos en mayor volumen (Arnold & Chapman, 2007; Heizer et al., 2017).

La estructura de la función de costos en este modelo se basa en dos componentes principales: el costo fijo por hacer un pedido y los costos de mantenimiento del inventario. Para el costo fijo por cada orden, es representado como. A", cubre aspectos como el tiempo y los recursos necesarios para generar y procesar un pedido (Nahmias & Olsen, 2015; Silver et al., 2016). Por otro lado, el costo de mantenimiento, denotado como "h", es el costo asociado a mantener una unidad de inventario durante un período determinado de tiempo, lo que incluye gastos como almacenamiento, seguro y deterioro (Zipkin, 2000; Tersine, 1994).

Figura 1 *Demanda anual*



Este modelo es sencillo y efectivo para situaciones en las que se puede predecir con certeza la demanda y los tiempos de reposición, y donde no se presentan descuentos por realizar compras en grandes cantidades. Sin embargo, su aplicabilidad se limita cuando los costos de adquisición no son constantes o cuando existen fluctuaciones significativas en la demanda o los tiempos de reposición, lo que requiere el uso de modelos más complejos que incorporen estos factores (Nahmias & Olsen, 2015; Silver et al., 2016).

La demanda anual es un parámetro conocido y se denota como D (unidades/año). Q, por otro lado, representa la cantidad de unidades que se ordenan cada vez que se realiza un pedido, y es la variable clave en el modelo de inventarios (Arnold & Chapman, 2007).

Existen diferentes métodos para derivar la función de costo. Uno de los enfoques más rigurosos implica calcular el costo total del sistema de inventarios durante un periodo de tiempo T, al que denominamos C(T). Luego, se divide este costo entre el periodo de tiempo T, y para obtener la función de costo a largo plazo, se toma el límite de esta relación cuando T tiende a infinito. Este procedimiento permite obtener una representación precisa del costo asociado con el manejo del inventario en un intervalo extendido (Zipkin, 2000).

Este enfoque resulta útil porque nos proporciona una visión detallada y general del comportamiento del sistema a lo largo del tiempo, permitiendo tomar decisiones informadas sobre el tamaño de los pedidos y la frecuencia con la que se realizan, lo cual es crucial para optimizar los costos de adquisición y mantenimiento.

$$k(x) = \text{lím}_{T\to\infty} \frac{C(T)}{T} \qquad (2.1)$$

Sin embargo, resulta mucho más sencillo utilizar la estructura presentada en la gráfica. Note que si T representa la duración de un ciclo (en años) y D corresponde a la tasa de demanda anual, por consiguiente, $DT = Q \to T = Q/D$, y la cantidad de ciclos por año será, DT = QT = Q/D, y la cantidad de ciclos por año será $\frac{1}{T} = D/Q$, En cada ciclo se emite una única orden, por lo que el costo fijo por ciclo es A. Por lo tanto, el costo fijo de ordenar anualmente es:

$$CAO = \frac{D}{Q}A$$

CAO: Costo anual de ordenar

Si en un instante t, medido desde la llegada de un pedido, La cantidad de inventario disponible es $x(t)$, por tanto, es evidente que $x(t) = Q - Dt$, costo asociado a conservar este nivel de inventario durante un período de tiempo dt es, $h * x(t)dt = h(q - Dt)dt$, Después, para calcular el costo de mantenimiento por ciclo, realizamos la integración. desde $t = 0$, hasta $t = T$), Si al final multiplicamos por la cantidad de ciclos, obtenemos el costo anual de mantenimiento.

$$CAM = \frac{D}{Q}\int_0^T h(Q - Dt)dt$$

CAM: Costo anual de mantenimiento

El valor de inventario físico varía entre su valor máximo Q y cero. Dado que el valor disminuye de forma lineal, el valor promedio de inventario mantenido es $Q/2$. Por lo tanto, el costo anual de mantenimiento se obtiene multiplicando h por el nivel medio de inventario.

$$CAM = h\ \frac{Q}{2}$$

Este resultado coincide con el obtenido al calcular la integral, pero de una manera más sencilla de deducir. La función de costo anual se obtiene al sumar el costo de ordenar y el costo de mantenimiento.

$$K(Q) = \frac{D}{Q}A + h\frac{Q}{2}$$

Para encontrar el valor que minimiza esta función, debemos derivarla con respecto a la variable de interés y luego igualar la derivada a cero. Esto nos permite identificar los puntos críticos de la función. Al resolver esta ecuación, podemos determinar el valor que optimiza el costo. Posteriormente, podemos verificar si este punto corresponde a un mínimo mediante el análisis de la segunda derivada o evaluando el comportamiento de la función en los puntos cercanos.

$$\frac{dK}{dQ} = \frac{h}{2} - \frac{D}{Q^2}A = 0 \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{2AD}{h}}$$

Como

$$\frac{d^2K}{dQ^2} = \frac{2D}{Q^3}A > 0 \qquad \forall Q > 0$$

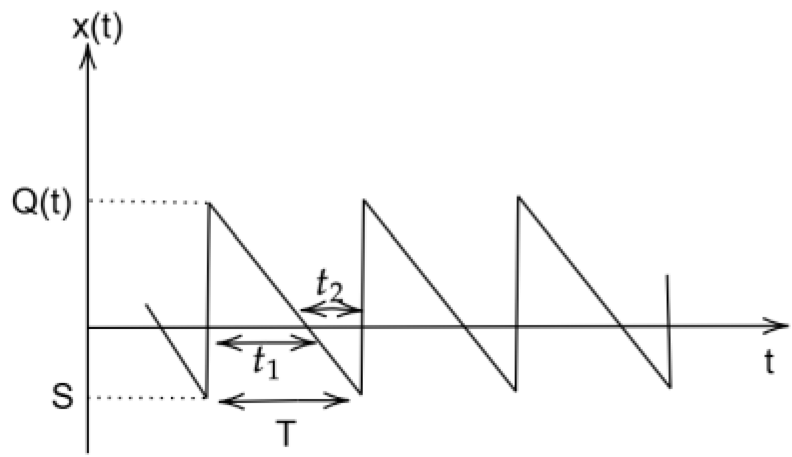
En efecto, se ha demostrado que el valor Q = $\sqrt{\frac{2AD}{h}}$ proporciona el mínimo en la función de costo. Esta fórmula de Q es conocida como la fórmula del lote económico, propuesta por Harris en 1913, en los primeros intentos de modelar un sistema de inventarios. A partir de este punto, surgieron diversas generalizaciones que ampliaron el modelo inicial, permitiendo situaciones en las que el sistema podría experimentar escasez de inventario o donde la tasa de entrega de los pedidos no fuera infinita. Estos casos más complejos se abordaron en modelos posteriores, los cuales incorporan nuevas dinámicas que reflejan mejor las condiciones del mundo real en la gestión de inventarios.

2.1.7.2. Modelo de Faltante Planeado. El modelo de lote económico clásico no tiene en cuenta los faltantes, asumiendo que siempre hay suficiente inventario disponible para satisfacer la demanda. Sin embargo, en ciertas situaciones, puede ser beneficioso permitir que el sistema tenga un nivel de escasez planificado. Esto implica que, en lugar de mantener un inventario constante y sin interrupciones, el sistema acepta la posibilidad de quedarse temporalmente sin stock. Esta estrategia puede reducir los costos asociados con el almacenamiento, especialmente cuando los costos de mantener inventario son altos, y al mismo tiempo permite optimizar otros aspectos del sistema, como el costo de pedidos o el flujo de efectivo (Ballou, 2004; Silver et al., 2016). Esta flexibilidad puede ser especialmente útil en mercados con demanda variable o cuando los costos de reposición y almacenamiento requieren un enfoque más dinámico (Nahmias & Olsen, 2015; Chopra & Meindl, 2016).

En este escenario, pueden ocurrir dos situaciones posibles: la primera es cuando la demanda no satisfecha se conserva como pedidos pendientes, los cuales se atenderán en cuanto haya inventario disponible; y la segunda es cuando la demanda que surge durante el período de escasez se pierde de forma definitiva, sin posibilidad de ser atendida (Zipkin, 2000; Tersine, 1994).

En este caso, supondremos que la demanda durante el período de escasez se considera como un pedido pendiente. Q Es la cantidad solicitada en cada pedido y para el máximo valor de escasez aceptable lo representaremos por ρ. (donde Q y ρ son variables del modelo). En este modelo supondremos que existe un costo de penalización por unidad de pedido pendiente el cual se representará por p_0 y el costo por unidad de pedido pendiente por unidad de tiempo será p (Arnold & Chapman, 2007; Heizer et al., 2017).

Figura 2 *Cantidad de ciclos por año*



La cantidad de ciclos por año continúa siendo D/Q Por consiguiente

$$CAO = \frac{D}{Q}A$$

CAO: Costo anual de ordenar

t_1 : representa el tiempo donde hay inventario disponible, por tanto

$$Dt_1 = Q - \rho, \;\; y \quad t_1 = \frac{Q - \rho}{D}$$

t_2: representa el tiempo de escasez en el inventario, entonces

$$Dt_2 = \rho, \;\; \text{y} \quad t_2 = \frac{\rho}{D}$$

Por consiguiente, se tiene que

$$T = t_1 + t_2 = Q/D$$

En un ciclo el costo de mantener el inventario es h x A_1 , donde A_1 es el área de la figura 2. Esto es:

$$A_1 = \frac{t_1(Q-\rho)}{2} = \frac{(Q-\rho)^2}{2D}$$

Por tanto, se tienen que

$$h\frac{(Q-\rho)^2}{2D}$$

Y de aquí que

$$CAM = \frac{(Q-\rho)^2}{2Q}$$

CAM : costo anual de mantenimiento

Por otro lado, el costo de pedido pendiente por ciclo estará dador por:

$$= p_0\rho + \ pA_2$$

$$= \ p_0\rho + \frac{p\ t_2 S}{2}$$

$$= p_0\rho + \frac{p\ \rho^2}{2D}$$

Y de esta manera tenemos que

$$CAPP \ = \frac{D}{Q}\left(p_0\rho + \frac{p\rho^2}{2D}\right) = \frac{p_0 D\rho}{Q} + \frac{p\rho^2}{2Q}$$

CAPP: Costo anual de pedido pendiente.

Al agregar los costos tomados en cuenta, se obtendrá una función de costo anual.

$$K(Q,\rho) \ = \frac{D}{Q}A + \ h\frac{(Q-\rho)^2}{2Q} + \frac{p_0 D\rho}{Q} + \frac{p\rho^2}{2Q}$$

Utilizando el criterio de la primera derivada para obtener valores máximos y mínimos se tiene que.

$$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{\partial K}{\partial \rho} = 0$$

el cual nos lleva a las siguientes expresiones:

$$Q = \sqrt{\frac{p\ +\ h}{p}\left(\frac{2AD}{h} - \frac{(p_0 D)^2}{h(p+h)}\right)}$$

$$\rho = \frac{1}{p\ +\ h}\left(\sqrt{2ADh\left(1 + \frac{h}{p}\right) - \frac{h(P_0 D)^2}{p}} - p_0 D\right)$$

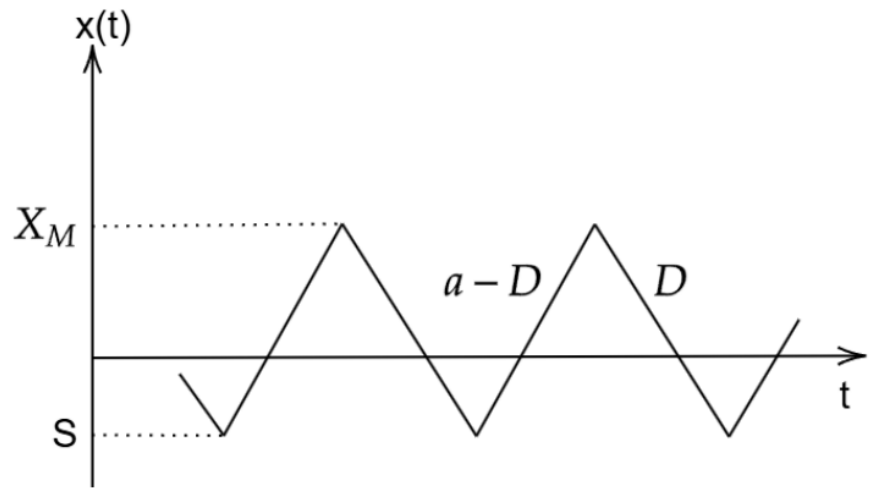
Para finalizar, es fundamental examinar el determinante de la matriz hessiana para valores específicos de Q y ρ. En otras palabras, es necesario verificar que dichos valores realmente representan un mínimo y, además, que este sea un mínimo absoluto de la función $K(Q, \rho)$.

2.1.7.3. Otras Generalizaciones del Modelo EOQ. En teoría de inventarios hay numerosos factores adicionales que se pueden incorporarse en modelos de lote económico para hacerlo más realista y aplicable a distintos escenarios empresariales. Por ejemplo, se pueden considerar esquemas de descuento por volumen, en los cuales el costo unitario de la mercancía disminuye al adquirir lotes grandes, lo que introduce una nueva variable en la toma de decisiones (Ballou, 2004; Silver et al., 2016). Asimismo, es posible analizar situaciones donde la llegada de los pedidos no es instantánea, sino finita, lo que impacta directamente en el inventario y la planificación de reabastecimiento (Nahmias & Olsen, 2015; Zipkin, 2000).

Los modelos estudiados previamente, se asume de manera implícita que el lote o pedido completo llega de inmediato en un solo instante. Sin embargo, en muchas situaciones reales, los pedidos pueden recibirse de manera gradual (unidades por unidad de tiempo). Este enfoque modifica la dinámica del sistema de inventario, ya que la reposición ocurre de manera continua en lugar de instantánea, afectando la cantidad de stock disponible en cada momento. La siguiente gráfica ilustra cómo se comportarían los niveles de inventario bajo este esquema, permitiendo una mejor comprensión de su impacto en la gestión logística (Chopra & Meindl, 2016; Heizer et al., 2017).

Es fundamental asegurarse de que la tasa de arribo de los pedidos, sea mayor que la demanda, D es decir $a > D$, ya que, de lo contrario, el inventario nunca podría incrementarse (Silver et al., 2016; Tersine, 1994).

Figura 3 *Generalizaciones del modelo de cantidad económica de pedidos*



En otras palabras, las unidades deben ingresar al sistema a un ritmo superior al de su consumo para que los niveles de stock puedan aumentar y garantizar un suministro adecuado.
Si bien los cálculos en este caso pueden ser más extensos en comparación con el modelo básico, este modelo de inventario se puede resolver de manera tradicional utilizando operaciones elementales de cálculo. El análisis parte de la observación de que, en cada ciclo, la cantidad total de unidades demandadas sigue siendo Q. Dado que D representa la demanda anual, la cantidad de ciclos que ocurren en un año se calcula como D/Q.

Además, el parámetro A corresponde al costo fijo de realizar un pedido en cada ciclo, lo que influye en la optimización del tamaño del lote. A partir de estas consideraciones, se puede determinar el nivel máximo de inventario, cuyo cálculo se muestra a continuación.

$$X_M = Q\left(1 - \frac{D}{a}\right) - \rho$$

El costo de almacenamiento durante un ciclo esta

$$\frac{h\left[Q\left(1 - \frac{D}{a}\right) - \rho\right]^2}{2D\left(1 - \frac{D}{a}\right)}$$

Si únicamente tomamos en cuenta un costo de pedido pendiente que sea proporcional al tiempo ($p_0 = 0$), el análisis se simplifica, y el costo de pedido pendiente durante un ciclo estará dado por.

$$\frac{p\rho^2}{2D\left(1 - \frac{D}{a}\right)}$$

Dado que se realizan D/Q pedidos anuales, por tanto, el sistema tendrá un costo anual de:

$$K(Q,\, \rho) = \frac{D}{Q}A + \frac{h\left[Q\left(1 - \frac{D}{a}\right) - \rho\right]^2}{2Q\left(1 - \frac{D}{a}\right)} + \frac{p\rho^2}{2Q\left(1 - \frac{D}{a}\right)}$$

Además, que

$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{\partial K}{\partial \rho} = 0$

lo cual nos lleva a obtener una solución única.

$$Q = \sqrt{\frac{2.A.D(p + h)}{p.h\left(1 - \frac{D}{a}\right)}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2A.D.h\left(1 - \frac{D}{a}\right)}{p.(p - h)}}$$

Es fundamental demostrar que dichas soluciones corresponden al mínimo absoluto de la función. $K(Q, S)$.

Además, resulta interesante verificar cómo estas soluciones se simplifican cuando el parámetro a tiende al infinito.

Los modelos que consideran una tasa de arribo finita son especialmente aplicables en escenarios donde el sistema es abastecido directamente desde el área de producción. En este contexto, se considera como una tasa de producción en lugar de una simple reposición de stock. La producción no solo influye en la cantidad de artículos disponibles, sino también en la planificación de la demanda y en la eficiencia operativa del sistema (Nahmias & Olsen, 2015; Silver et al., 2016). Dicho enfoque es crucial en industrias fabricantes donde los bienes no pueden ser suministrados instantáneamente, sino que se generan progresivamente (Zipkin, 2000; Tersine, 1994).

2.1.7.4. Modelos con Múltiples Artículos y Restricciones. A menudo, una empresa tiene que gestionar al mismo tiempo diversos tipos de productos. Si no hay interconexión entre los productos, entonces el modelo puede tratar de manera autónoma cada uno de ellos, puesto que el comportamiento de uno no influye en el de los demás (Ballou, 2004). Si no es así, se debe considerar un modelo uniforme que incluya a cada tipo de los productos inventariados. Cuando los recursos del sistema son escasos, es necesario considerar un modelo multi artículo. Por ende, cada modelo debe obtener una parte de dicho recurso (Chopra & Meindl, 2016).

Los diferentes productos tienen necesidades y particularidades diferentes. Consideremos que se administran n categorías de productos, la tasa de entrega es instantánea y durante un periodo de escasez, la demanda produce pedidos atrasados. La función de costo es relevante para cada clase de producto i.

$$k(Q_i;\rho_i) = \frac{D_i}{Q_i}A_i + h_i\ \frac{(Q_i-\rho_i)^2}{2D_i} + \frac{p_{0i}D_i\rho_i}{Q_i} + \frac{p_{0i}{\rho_i}^2}{2Q_i}$$

D_i: *Demanda anual del artículo i*

A_i: *Costo fijo de ordenar para el artículo i*

h_i : *Costo de mantener una unidad del artículo i por unidad de tiempo*

p_{0i} : *Costo de penalización por unidad de pedido pendiente del artículo i*

P_i: *Costo de penalización por unidad de pedido pendiente por unidad de tiempo del artículo i*

Q_i , ρ_i : *son el tamaño del lote y el nivel de escasez para el artículo i respectivamente.*

$$K\big(Q_1; \ldots., Q_{2\,;}\rho_1 \ldots, \rho_2\big) = \sum_{i=1}^{n} K(Q_i,\rho_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{D_i}{Q_i}A_i + h_i\frac{(Q_i-\rho_i)^2}{2D_i} + \frac{p_{0i}D_i\rho_i}{Q_i} + \frac{p_{0i}{\rho_i}^2}{2Q_i}\right)$$

Si un local tiene un espacio máximo para el almacenamiento, el cual lo representaremos por E_0, y sea e_i el requerimiento de espacio requerido para tener en el almacén una unidad del artículo i, por tanto, el requerimiento espacio para un tamaño de lote Q_i del artículo i estará dado por $e_i\,Q_i$ y para el almacenamiento de todos los artículos será necesario un espacio $\sum_i^n e_i\,Q_i$ este debe ser menor a la máxima capacidad de la bodega.

$$\sum_{i=1}^{n} e_i\,Q_i \le E_0$$

Sea c_i el valor costo unitario para la compra del artículo i , y C_0 es la capacidad máxima de inversión para cualquier pedido, por tanto, se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\,Q_i \le C_0$$

consideremos que para cada producto el sistema permite hacer un máximo número de pedidos anuales (F_0); para cada producto se hacen $\frac{D_i}{Q_i}$ pedidos por año, por consiguiente

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{Q_i} \leq F_0$$

Por tanto, el modelo estructurado es:

$$MinK(Q_1; \dots, Q_{2\,;}\rho_1 \dots, \rho_2) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{D_i}{Q_i} A_i + h_i \frac{(Q_i - \rho_i)^2}{2D_i} + \frac{p_{0i} D_i \rho_i}{Q_i} + \frac{p_{0i} {\rho_i}^2}{2Q_i})$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i\, Q_i \leq E_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, Q_i \leq C_0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{D_i}{Q_i} \leq F_0$$

Los modelos de inventario con restricciones no son tan sencillos de desarrollar. En ciertas situaciones, los multiplicadores de Lagrange se presentan como un instrumento adecuado para la resolución este tipo de problemas. En los anteriores modelos, el tiempo de reposición no fue tomado en cuenta en el análisis. No obstante, resulta sencillo incorporar este periodo en el modelo de inventario ya que se asume que se conoce con exactitud (Tersine, 1994; Zipkin, 2000).

2.1.8. Modelos estocásticos

Un modelo determinístico es utópico, ya que la demanda de un artículo o producto puede fluctuar en el escenario real. En los modelos estocásticos, la variable de demanda es variable. Esto conlleva a obtener un modelo más consistente con la realidad, a cambio de la necesidad de gestionar ecuaciones de mayor complejidad. Los desafíos que surgen en los modelos estadísticos suelen ser tan complejos que en ocasiones resulta más gratificante abordar estos desafíos mediante algunas Simplificaciones que conducen a un modelo más controlable, a pesar de que la precisión del mismo sea disminuida. Examinemos detenidamente la teoría relacionada con los modelos $\langle Q, r\rangle$ (Nahmias & Olsen, 2015; Zipkin, 2000).

2.1.8.1. Niveles de Inventario en el Sistema. Los modelos de inventario $<\boldsymbol{Q},\boldsymbol{r}>$ necesitan un sistema de evaluación continua. Se asume que las unidades se requieren de forma individual, no en grupos. Además, a pesar de ser variable, la demanda es estacionaria, lo que significa que puede ser reflejada a través de una distribución de probabilidades que no se altera con el paso del tiempo. El problema se encuentra en que el sistema tiene que hacer un requerimiento de tamaño $\boldsymbol{Q}$ cada que el inventario llega al punto $\boldsymbol{R}$. Este es el primer obstáculo, puesto que la demanda es una variable aleatoria, podría surgir una demanda de gran envergadura durante el período de reposición que no es suficiente al momento de incrementar el inventario por encima del punto $\boldsymbol{R}$. Por consiguiente, el sistema acumulará pedidos pendientes y esto ara que no se pueda efectuar un pedido de nuevo (Heizer et al., 2017). Por todos estos supuestos, definiremos los niveles de inventario siguientes:

$$inventario\ neto\ = Inventario\ físico - Pedidos\ pendientes$$

$$posición\ del\ inventario = Inventario\ neto + mQ$$

El inventario físico se compone de las unidades presentes en el almacén. En el caso de que el Inventario neto sea negativo, hace referencia al número de órdenes pendientes en el sistema.

Es crucial resaltar la diferencia entre las órdenes pendientes y las solicitudes pendientes. Los pedidos pendientes aluden a la demanda que el sistema no ha logrado cubrir debido a la escasez de stock, mientras que las órdenes pendientes aluden al número de órdenes de suministro que todavía no han llegado del proveedor al inventario.

La ubicación del inventario simboliza la capacidad presente y venidera del sistema para cubrir sus necesidades. Consideremos a la ubicación de inventario con la propiedad de restricciones de nivel mínimo y máximo, sin tomar en cuenta la cantidad de demanda durante el período de reposición (Silver et al., 2016; Tersine, 1994).

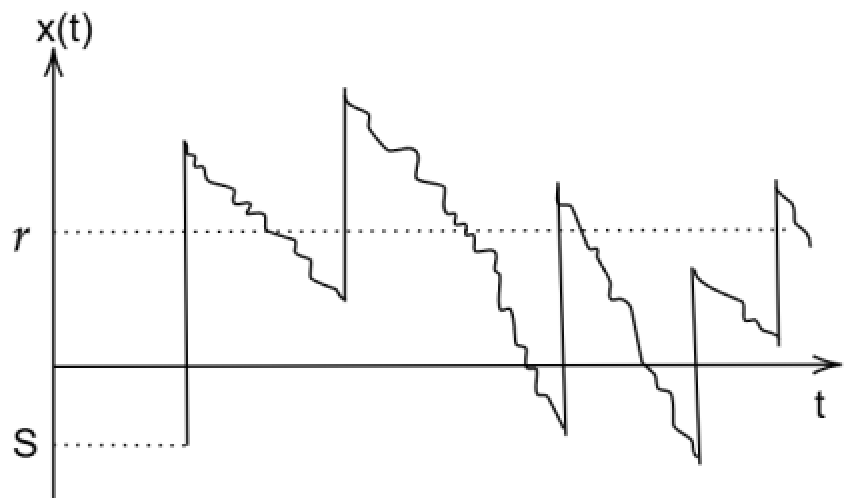
Esta característica lo sitúa en el nivel apropiado para indicar el punto donde se debe realizar un nuevo pedido. En determinadas situaciones, es adecuado asumir que la posibilidad de tener más de una orden pendiente es muy baja.

De manera similar, es posible suponer que la demanda durante el tiempo de reposición sea excesiva, como se analizará en la sección subsecuente.

2.1.8.2. Modelo ⟨Q, R⟩ aproximado con demanda y tiempo de reposición variable. De hecho, en modelos de inventario estocásticos, la función de costo no es precisa. Es improbable que los gastos del sistema sean los mismos que los relacionados con el modelo en un año concreto. Esto ocurre porque la demanda es variable y por consiguiente, es casi imposible anticipar con total certeza las fluctuaciones del sistema durante un periodo de tiempo determinado (Nahmias & Olsen, 2015; Zipkin, 2000). El método implica utilizar la función de costos previstos, esto es, se muestra el modelo con relación a los costos previstos en el sistema cada año. Así pues, se prevé que las fluctuaciones reales no se desvíen demasiado de lo esperado. Los valores previstos provienen del carácter del proceso estructural que establece la demanda y el período de descanso (Silver et al., 2016). Al referirse a la función de costo exacta, nos referimos a la función que posee los valores previstos claramente establecidos y que se determinan a partir de todas las probabilidades de las variables. No obstante, a veces es difícil determinar un valor previsto preciso, por lo que se deben hacer cálculos adicionales. En esta situación, se logra un modelo aproximado (Ballou, 2004; Chopra & Meindl, 2016).

Consideremos una función de costo estimada para un modelo $< Q, R >$. Donde Q y R se consideran como variables continuas; sin embargo, el caso puede ser ampliado a variables discretas (Heizer et al., 2017; Tersine, 1994).

Figura 4 *Modelo ⟨Q, R⟩*



Utilizaremos las variables y parámetros:

D: $Demanda\ esperada\ anual, no\ varía\ ya\ que\ se\ supone\ una\ demanda\ estacionaria$

T: $Tiempo\ de\ reposición, es\ una\ variable\ aleatoria$

X: $Demanda\ durante\ el\ tiempo\ de\ reposición, es\ variable\ aleatoria$

$\mu = E(X)$: $demanda\ esperada$

$f\ (x/t) = P\ (X = x\ dado\ que\ T = t)$: $distribución\ de\ probabilidad$

$g(t) = P\ (T = t)$: $Distribución\ marginal\ de\ la\ variable\ aleatoria\ T$

$h(x) = P\ (X = x)$: $Distribución\ marginal\ de\ la\ variable\ X$

$H(x) = P(X \leq x)$: $Distribución\ acumulada\ de\ X$

A: $Costo\ fijo\ de\ ordenar$

h: $Costo\ unitario\ de\ mantenimiento\ por\ unidad\ de\ tiempo$

p_0: $Costo\ de\ penalización\ por\ unidad\ de\ pedido\ pendiente$

p: $Costo\ de\ penalización\ por\ unidad\ de\ pedido\ pendiente\ por\ unidad\ de\ tiempo$

R: $Nivel\ de\ inventario\ en\ el\ que\ se\ debe\ colocar\ una\ orden$

Para cada fase el nivel del inventario varía entre R y $Q + R$, esto significa que la demanda es Q unidades para cada fase, puesto que D es la demanda anual esperada, por tanto, la cantidad esperado de fases anuales es D/Q, por tanto, el costo anual esperado de ordenar estará dado por.

$$CEAO = \frac{D}{Q}A$$

$CEAO$: Costo esperado anual de ordenar

Consideremos el caso de que exista a lo más una orden pendiente, ya que R está definida en relación de la posición de inventario. Esta conjetura garantiza el que, con cada reabastecimiento, su nivel de inventario neto se alzara por encima de R.

Para definir un ciclo tomemos como referencia dos órdenes consecutivas y, en referencia a esto, definamos las variables aleatorias en este ciclo.

$B(x,r)$: $Nivel\ de\ pedidos\ pendientes\ en\ el\ ciclo$

$y_m(x,r)$: $Nivel\ mínimo\ del\ inventario\ físico$

$y_M\ (x,r)$: $Nivel\ máximo\ del\ inventario\ físico$

Si x es la demanda en el tiempo de reposición, entonces se tiene que

$$B(x,r) = \begin{cases} x - r : x > r \\ 0 : x \leq r \end{cases}$$

$$y_m(x,r) = \begin{cases} r - x : x \leq r \\ 0 : x > r \end{cases}$$

$$y_M(x,r) = \begin{cases} Q + y_m(x,r): x \leq r \\ Q - B(x,r): x > r \end{cases}$$

Estas variables tienen un valor esperado de

$$E[B(x,r)] = \bar{B}(r) = \int_0^{\infty} B(x,r)h(x) \cdot dx = \int_0^{\infty} (x-r)h(x) \cdot dx$$

$$= \int_r^{\infty} xh(x)dx - r\int_r^{\infty} h(x) \cdot dx$$

$$= \int_r^{\infty} xh(x)dx - r\widehat{H}(r)$$

$$E[y_m(x,r)] = \hat{y}_m \text{ (r)} = \int_0^{\infty} y_m(x,r)h(x) \cdot dx = \int_0^{r} (x-r)h(x)dx$$

$$= r\int_0^{r} h(x) \cdot dx - \int_0^{r} xh(x) \cdot dx$$

$$= rH(r) - \int_0^{r} xh(x) \cdot dx$$

$$E[y_M(x,r)] = \hat{y}_M \text{ (r)} = \int_0^{\infty} y_M(x,r)h(x) \cdot dx$$

$$= \int_0^{r} [Q + y_m(x,r)]h(x)dx + \int_r^{\infty} [Q + B(x,r)]h(x)dx$$

$$Q \int_0^{r} h(x)dx + \int_0^{r} y_m(x,r)h(x)dx + Q\int_r^{\infty} h(x)dx - \int_r^{\infty} B(x,r)h(x)dx$$

$$= Q\left\{\int_0^{R} h(x)dx + \int_r^{\infty} h(x)dx\right\} + \bar{y}_m(r) - \bar{B}(r) = Q + \bar{y}_m(r) - \bar{B}(r)$$

La parte de tiempo donde hay desabastecimiento del sistema será naturalmente la fracción $\bar{B}$ (r)/Q y por consiguiente la parte de tiempo donde hay inventario físico deberá ser:

$$1 - \bar{B}(r)/Q$$

Si se considera la posibilidad que la demanda sea constante, por tanto, también se puede considerar que el nivel de inventario bajara linealmente desde su nivel máximo $\bar{y}_m(r)$, hasta llegar a su nivel mínimo $\bar{y}_m(r)$, por consiguiente, la media esperada se puede representar como:

$$\frac{\bar{y}_m(r) + y_m(r)}{2} = \frac{Q + \bar{y}_m(r) - \bar{B}(r) + \bar{y}_m(r)}{2} = \frac{Q - \bar{B}(r)}{2} + \bar{y}_m(r)$$

Por tanto, se tiene que el costo anual de mantenimiento estará dado por

$$h\left(1 - \frac{\bar{B}(r)}{Q}\right)\left\{\frac{Q - \bar{B}(r)}{2} + \bar{y}_m(r)\right\}$$

además, el costo anual por pedido pendiente es:

$$P_0 \frac{D}{Q} \bar{B}(r)$$

por otro lado, se tiene que el costo anual esperado por pedido pendiente es:

$$P \frac{\bar{B}(r)}{2} * \frac{\bar{B}(r)}{Q} = \frac{P\left(\bar{B}(r)\right)^2}{2Q}$$

Donde

P : costo de pedido pendiente

$\bar{B}(r)$: nivel medio de pedidos pendientes

Por tanto, una aproximación de la función de costo es:

$$k(Q, r) = \frac{D}{Q} A + h\left(1 - \frac{\bar{B}(r)}{Q}\right)\left\{\frac{Q - \bar{B}(r)}{2} + \bar{y}_m(r)\right\} + p_0 \frac{D}{Q} \bar{B}(r) + \frac{P\left(\bar{B}(r)\right)^2}{2Q}$$

Donde:

$$\bar{B}(r) = \int_{r}^{\infty} xh(x)dx - r\widehat{H}(r)$$

$$\bar{y}_m = rH(r) - \int_{0}^{r} xh(x)dx$$

$$H(r) = \int_{r}^{\infty} h(x)dx$$

$$\widehat{H}(r) = 1 - H(r)$$

$$h(x) = \int_{r}^{\infty} f(x|t)g(t)dx$$

2.1.8.3. Tasa de ocupación del sistema y nivel de servicio. Los modelos de inventario estocásticos, suelen determinar la parte del tiempo que el sistema tiene un inventario disponible, en particular, la parte del tiempo donde el sistema está desprovisto. La tasa de ocupación o espacio ocupado del sistema se puede entender como la probabilidad de que el sistema disponga de inventario en cualquier instante del día (Nahmias & Olsen, 2015; Silver et al., 2016). En resumen, al presentarse un cliente, lo que nos indica una tasa de ocupación es la probabilidad de poder satisfacer dicha demanda. Para aludir al nivel de complacencia de los clientes respecto al sistema de inventario se utiliza el termino nivel de servicio (Ballou, 2004; Chopra & Meindl, 2016). Bajo este enfoque, el índice de ocupación ofrece una evaluación razonable del nivel de servicio. Dentro de las oportunidades para cubrir una necesidad particular, se prevé que también se aumente la satisfacción del cliente con respecto al servicio prestado. El nivel de servicio prestado es un índice vital para todo el sistema, por lo que es crucial establecer una tasa de ocupación el sistema con el fin de poder regular el nivel de servicio que el sistema ofrece (Heizer et al., 2017; Zipkin, 2000).

2.2. Marco conceptual

La gestión de inventario, como proceso intrínseco a la empresa, se erige como un medio para estructurar los activos corporativos, garantizando la operatividad a la población con los procedimientos más eficaces que ofrece la empresa. En consecuencia, se impone la necesidad de una gestión meticulosa con el propósito de prevenir la escasez de insumos o recursos. En la formulación de los inventarios, es imperativo contemplar aspectos financieros, precisando el monto destinado al mantenimiento, así como las penalizaciones y los costos asociados a los productos adquiridos.

En este contexto, la consideración de la demanda exige la elaboración de un registro específico de productos proyectados para su comercialización futura. Asimismo, el concepto de tiempo de anticipación refiere al intervalo transcurrido en la empresa desde que un cliente solicita un producto hasta que este es efectivamente entregado (Córdova Rojas, 2022)

La evaluación de los inventarios debe ofrecer esclarecimientos en diversas facetas, entre ellas: la identificación de los artículos que requieren preservarse en el inventario, la determinación de su cantidad óptima y el establecimiento del punto de pedido, con el propósito de gestionar sus costos dentro de un rango eficiente. Este proceso conlleva la definición del sistema de control más apropiado para cada situación particular. En consonancia con el objetivo delineado, resulta imperativo sintetizar los fundamentos esenciales de los esquemas de adquisición tanto con déficit como sin él (Tañski, 2022).

Por otro lado, la gestión de los inventarios presenta la ventaja de evitar costos adicionales derivados del seguimiento en las operaciones de inventario. Esto se traduce en el conocimiento detallado del valor inicial del inventario, así como de las compras, devoluciones y rebajas. Además, proporciona información sobre el número de productos tanto de ingreso como de salida de la organización, así como los existentes en los almacenes. En consecuencia, la implementación continua de medidas de control se vuelve fundamental en las empresas, especialmente cuando se trata de productos perecederos, ya que la ausencia de medidas de control conlleva a mayores pérdidas y gastos (Pizzan, 2022)

Asimismo, controlar el inventariado facilita una planificación eficiente de los productos al proporcionar herramientas para evaluar a los proveedores en términos de cumplimiento, precio y calidad de sus productos. Además, permite conocer el promedio de rotación de los productos, lo que posibilita que las empresas tomen decisiones informadas en cuanto a la adquisición y almacenamiento de sus productos. Para (Villarreal et al., 2021), La gestión de inventarios (GI) se configura como un instrumento esencial en la gestión contemporánea, en la medida en que permite a las empresas y organizaciones saber cuántas cosas están actualmente disponibles para la venta en un momento y lugar determinados.

Las entidades cuyas operaciones comerciales Los sectores que dependen de la producción, como la industria manufacturera, la agricultura, la ganadería y la tecnología, entre otros, ofrecer un marco para que la alta dirección de la empresa tenga en cuenta todas las fuentes de datos creíbles y sustanciales a la hora de tomar decisiones (Becerra, 2021)

Las existencias se refieren al stock de un artículo o recurso que posee una entidad en un momento determinado. Un sistema de inventario es la agrupación de normas y reglamentos diseñados para hacer un seguimiento de las existencias en este entorno concreto, determinando qué elementos se mantendrán, el momento en el que es necesario realizar el reabastecimiento, así como las dimensiones de los pedidos correspondientes.

Según lo mencionado, para (Villarreal et al., 2021), debido al descubrimiento de nuevos usos del método a lo largo de los años, la investigación operativa es dinámica y adaptable. En la década de los setenta, por ejemplo, surgió con Farrell una evaluación adecuada de la eficacia de la producción que tenga en cuenta todos los recursos o recursos utilizados

para generar una producción, denominada output, como resultado de la eficiencia. Es relevante señalar que esta disciplina matemática engloba diversas aplicaciones en campos como la Física, Economía, Sociología, y especialmente en la Administración de Empresas, donde busca establecer relaciones causa-efecto mediante la implementación de modelos matemáticos.

La compra de medios y la publicidad son dos ámbitos en los que los modelos de optimización están muy extendidos en el mundo empresarial, con el objetivo de generar la mezcla adecuada de medios a seleccionar. Partiendo de la asignación de un presupuesto fijo como recurso limitado, la aplicación de estos modelos busca maximizar la respuesta, abarcando así la mayor audiencia posible.

La programación lineal, dentro del ámbito de la programación matemática, por su practicidad y amplio potencial, es uno de los enfoques más vanguardistas de la computación actualmente en uso. La teoría y la práctica se centran en encontrar la mejor solución a los problemas de optimización, cuyo objetivo es determinar el rango de valores que puede tomar la función, previamente dadas unas restricciones y un número determinado de variables. Cuando se trata de cuestiones de maximización, la función objetivo, las variables y las restricciones son las tres partes principales (Quintero, 2020)

De acuerdo con (Fleites, 2020), La Programación Lineal (PL), que incluyen la maximización de un sistema lineal teniendo en cuenta las restricciones lineales, exhibe una estructura matemática sencilla, pero destaca por su versatilidad en la adaptación a di- versas aplicaciones. La literatura científica internacional hace referencia a diversos usos de la PL descritas a continuación:

a) Reducir los gastos de transporte de las instalaciones industriales químicas.
b) Maximizar los beneficios maximizando la mezcla de flujos en una refinería para generar determinados grados de gasolina.
c) Crear una estrategia de producción que minimice los gastos de marketing y fabricación teniendo en cuenta las estimaciones de ventas.

El propósito fundamental del modelo de programación lineal en la GI consiste en la minimización de los costos globales asociados al inventario. Entre los costos preeminentes se incluyen los costos unitarios de los productos, los costos unitarios asociados al mantenimiento de los productos y los costos unitarios vinculados a la escasez de los productos.

En este contexto, hay que tener en cuenta el estado del inventariado, que es el número de existencias necesarias en cada tiempo. Una forma de verlo es que la cantidad de inventario al final de un periodo se determina sumando las unidades vendidas durante ese periodo a la producción durante ese tiempo y restando después el inventario inicial.

Dada la capacidad de producción, cuya finalidad es asegurar que exista un límite superior en la capacidad productiva durante el horizonte de planificación, se torna imperativo incorporar esta limitación como restricción en el modelo.

Además, con el propósito de prevenir la existencia de deficiencias en el suministro al concluir la planificación de cada periodo, por ende, se debe incluirse la siguiente limitación.

Precisando al final que, se debe tomar en cuenta la no negatividad de las variables antes mencionadas.

2.3. Antecedentes empíricos de la investigación

2.3.1. Antecedentes internacionales

(Zipkin, 2000), en su libro títulado "Foundations of Inventory Management" desarrollo una formulación de programación lineal para resolver problemas de gestión de inventarios que incluyan restricciones de nivel de servicio, con el fin de optimizar el balance entre costos de inventario y satisfacción de la demanda. Para ello, se construyó un modelo matemático que incorpora dicha restricción y que fue probado y validado mediante casos de estudio y simulaciones numéricas. Los resultados evidenciaron que la aplicación de la programación lineal permite definir reglas óptimas para establecer "stocks de seguridad", especialmente en ítems de baja demanda, mejorando la eficiencia en la toma de decisiones. En conclusión, la programación lineal se presenta como una herramienta eficaz para modelar y resolver problemas complejos de inventarios con restricciones de servicio, apoyando la toma de decisiones de manera sistemática y medible.

(Wang et al., 2024), el cual tiene como título "A Novel Mixed-Integer Linear Programming Formulation for Continuous-Time Inventory Routing" y tiene como objetivo desarrollar una nueva formulación compacta de programación lineal entera mixta (MILP) para el problema de ruteo de inventarios en tiempo continuo, garantizando que los niveles de inventario se mantengan dentro de los intervalos deseados durante todo el horizonte de planificación. La metodología se basa en modelar el problema de inventario y ruteo mediante MILP, adaptando desigualdades clásicas de capacidad redondeada e implementando un algoritmo branch-and-cut, cuya eficiencia fue evaluada mediante estudios computacionales con 90 instancias de referencia de la literatura y 63 instancias adaptadas de datos reales. Los resultados evidencian que el algoritmo propuesto supera en rendimiento a los métodos más avanzados previamente reportados, logrando resolver instancias con hasta 20 clientes a optimalidad garantizada. En conclusión, la formulación planteada y el enfoque de solución constituyen un avance significativo en el tratamiento del problema de ruteo de inventarios en tiempo continuo, aportando una herramienta sólida para la toma de decisiones óptimas y eficientes, con relevancia tanto en el ámbito académico como en aplicaciones prácticas.

(Janssens & Ramaekers, 2011), el cual tiene como título "A linear programming formulation for an inventory management decision problem with a service constraint" y tiene como objetivo formular un problema de decisión para la gestión de inventarios bajo incertidumbre en la demanda durante el tiempo de entrega, considerando un nivel mínimo de servicio y determinando un inventario de seguridad óptimo que garantice el desempeño incluso bajo el peor escenario de demanda, a pesar de que su distribución sea parcialmente desconocida. La metodología se basa en un modelo de optimización mediante programación lineal que utiliza información incompleta sobre la distribución de la demanda —limitada a los primeros momentos estadísticos y el rango— para calcular intervalos de desempeño como la probabilidad de ruptura de stock y el número esperado de unidades faltantes, con el fin de establecer el inventario óptimo que asegure el nivel deseado de servicio. Los resultados evidencian que el modelo propuesto permite definir límites superiores e inferiores para los inventarios de seguridad y las medidas de desempeño, comparándose favorablemente frente a enfoques tradicionales que suponen distribuciones normales, así como frente a distribuciones Gamma, Uniforme y Triangular simétrica, mostrando robustez frente a la incertidumbre. En conclusión, se demuestra que la gestión de inventarios con restricciones de servicio puede formularse como un problema de programación lineal, lo que permite optimizar niveles de inventario de seguridad bajo información incompleta, ofreciendo un enfoque más flexible y realista que los métodos clásicos y constituyendo una herramienta útil para la toma de decisiones en contextos de incertidumbre.

(Calle & Quimis, 2025), el cual tiene como título "Control presupuestario y la gestión pública Gobierno Autónomo Descentralizado Parroquial La Unión, 2023", y cuyo objetivo fue determinar cómo influye el control presupuestario como herramienta en la gestión pública de dicha entidad para proponer mejoras técnicas que fortalezcan la gestión financiera local y promuevan el desarrollo territorial sostenible. La metodología fue de enfoque mixto, combinando métodos inductivo, deductivo, analítico, sintético y descriptivo, mediante encuestas estructuradas a siete funcionarios y una entrevista semiestructurada al presidente del GAD La Unión, abarcando un muestreo censal. Los resultados evidenciaron que el 83% de los encuestados consideran que el control presupuestario garantiza la sostenibilidad financiera; el 67% que fortalece la transparencia institucional y que influye en el logro de resultados estratégicos, aunque solo el 50% señaló que el presupuesto está alineado con el PDOT y POA, destacándose deficiencias en normativas, baja ejecución en áreas clave, y falta de alineación técnica entre presupuesto y metas estratégicas territoriales. Como conclusión, el control presupuestario ha mantenido la operatividad institucional y mejorado la rendición de cuentas, pero persisten debilidades normativas, técnicas y de planificación que limitan la eficacia del gasto, por lo que se recomienda fortalecer la planificación técnica y la capacitación del personal.

(Sama & Mdemu, 2024),titulado "Effects of Inventory Management on Service Delivery in Public Sector: A Case of Office of Registrar of Political Parties" (Efectos de la Gestión de Inventarios en la Prestación de Servicios en el Sector Público: Un Caso de la Oficina del Registrador de Partidos Políticos), tuvo como objetivo investigar la influencia de la gestión de inventarios en la prestación de servicios en el sector público. La metodología empleada fue un diseño de investigación de corte transversal con una muestra de 44 encuestados seleccionados mediante una técnica de muestreo aleatorio simple , y se utilizaron cuestionarios y entrevistas como métodos de recolección de datos. Los datos se analizaron mediante estadística descriptiva y análisis de correlación. El resultado principal fue que existe una relación positiva débil (r=0,317, p- valua=0.000) entre la adopción de tecnología, el entorno regulatorio, la infraestructura física y las instalaciones (las variables de gestión de inventarios) y la prestación de servicios. Esto implica que un aumento en estas áreas de la gestión de inventarios incrementará la prestación de servicios en el sector público. La conclusión del estudio es que la gestión de inventarios fue un factor importante que influye en la prestación de servicios en la Oficina del Registrador de Partidos Políticos , y que la baja medida en que se aplican la adopción de tecnología, el entorno regulatorio, la infraestructura física y las instalaciones afecta la prestación de servicios en esa oficina.

(Kurt & Lesley, 2023), cuyo estudio se titula *Quality of inventory management system: Case study of BARMM-Ministry of Public Works-Basilan District Engineering Office*, tuvo como objetivo evaluar la calidad del sistema de gestión de inventarios del BDEO para identificar sus fortalezas, debilidades y proponer mejoras orientadas a la eficiencia y la creación de valor público. Para ello, se aplicó una metodología de estudio de caso con enfoque mixto, utilizando entrevistas, observación directa, análisis documental y cuestionarios estructurados, además de un análisis estadístico descriptivo y una codificación temática para datos cualitativos. Los resultados mostraron que, aunque el sistema cuenta con ciertos procedimientos organizados y personal competente, presenta debilidades críticas como falta de una política formal de inventario, registros deficientes, procesos manuales, ausencia de integración con el área de adquisiciones y escasa coordinación entre departamentos, lo que genera sobrestock, desabastecimientos, retrasos y duplicidad de esfuerzos. En conclusión, los autores evidencian que el sistema requiere una modernización urgente mediante la implementación de un sistema centralizado, automatización con códigos de barras, fortalecimiento del seguimiento de inventarios, capacitación constante y alineación con enfoques de New Public Management para mejorar la eficiencia, transparencia y el valor generado para la comunidad.

(Pawel & Grazyna, 2023), titulado "implementation of inventory policy in local government units" (Implementación de la Política de Inventario en Unidades de Gobierno Local), tuvo como objetivo principal presentar los determinantes de un proceso de inventario correctamente ejecutado en los gobiernos locales y demostrar el papel de los Centros de Servicios Compartidos (CSC) en la mejora de la calidad de dicho proceso. La metodología se basó en un estudio de caso aplicado en un municipio rural de Polonia (Voivodato de Cuyavia y Pomerania), el cual incluyó la revisión de documentos internos, capacitación del personal y la aplicación de encuestas a los empleados involucrados tras finalizar el inventario, complementado con el análisis de la literatura y los hallazgos de auditorías regionales. Los resultados revelaron que, si bien las unidades de gobierno local manejan el aspecto sustantivo del inventario (métodos y principios contables), el aspecto organizativo plantea desafíos debido a la complejidad estructural y la dotación limitada de personal, identificándose áreas problemáticas que requieren atención. La conclusión principal sugiere que la utilización de los CSC podría aumentar la eficiencia y la seguridad del proceso de inventario en las unidades de gobierno local, subrayando la necesidad de distinguir y abordar los aspectos organizativos y sustantivos.

2.3.2. Antecedentes nacionales

(Nalvarte, 2023), con el título “Sistema web para la gestión de stock en el almacén del área de logística de la Municipalidad Distrital de Pilcomayo”, que tiene como objetivo determinar cómo influye un sistema de información web en la gestión de stock en el almacén del área de logística municipal. Para ello, se desarrolló el sistema utilizando herramientas open-source como Angular, Java, Bootstrap y Spring Boot, aplicando metodologías ágiles como RUP (Rational Unified

Process) y UML para el modelado del sistema. Los resultados demostraron que el sistema fue eficaz para mejorar indicadores clave de gestión de inventarios, tales como stock promedio, rotación de inventario e índice de rotura de stock, lo cual fue respaldado mediante el análisis de datos históricos sobre la gestión de materiales salientes.

(Medina, 2018), que tiene como título "Control de inventario de bienes patrimoniales en la Municipalidad Distrital de Condebamba – 2018 " y tiene objetivo analizar el control de inventario de bienes patrimoniales en la Municipalidad Distrital de Condebamba durante el año 2018, evaluando su impacto en la gestión administrativa y financiera de la entidad. La investigación fue de tipo descriptiva, con diseño no experimental y transversal, utilizando técnicas de análisis documental, entrevistas y observación directa sobre los bienes patrimoniales registrados en la municipalidad, considerando como variables el control de inventario y la gestión patrimonial. Los resultados mostraron deficiencias en el control, como la ausencia de documentos de origen de los bienes, personal no capacitado en codificación y registro, errores en la codificación de los bienes, discrepancias en el Acta de conciliación y diferencias en el inventario de bienes faltantes y sobrantes, lo que afecta la precisión de los estados financieros de la municipalidad. En conclusión, se determinó que la falta de normatividad, procedimientos adecuados y capacitación del personal contribuye a un control ineficiente de los bienes patrimoniales, recomendando implementar procedimientos estandarizados para el registro y seguimiento de los bienes, capacitar al personal encargado en técnicas de control y codificación, y establecer normativas claras para la gestión de bienes patrimoniales.

(Abad, 2024), el cual tiene como título "Control Interno y la Gestión de Inventarios en la Municipalidad Distrital Veintiséis de Octubre - Piura, 2024" y como objetivo principal determinar la relación existente entre el control interno y la gestión de inventarios en dicha municipalidad durante 2024. Para ello, se empleó una metodología cuantitativa con diseño descriptivo correlacional no experimental, aplicando encuestas a 35 colaboradores de las áreas de abastecimiento y almacenes mediante Google Forms con 32 preguntas, analizando datos con la prueba de Shapiro-Wilk para normalidad y Spearman para correlación, obteniendo un Rho de 0.834 y p=0.000 que evidencia una correlación positiva significativa muy alta. Los resultados muestran relaciones significativas entre cultura organizacional, controles de riesgo y supervisión con la gestión de inventarios, concluyendo que fortalecer el control interno mejora la eficiencia en el manejo de recursos públicos.

(Galarza, 2024), en su tesis titulada "Control interno y la gestión de inventarios en la Municipalidad Provincial de Huánuco, 2024" tuvo como propósito de determinar la relación que existe entre ambos sistemas administrativos. Para la recolección de datos utilizó encuestas dirigidas al personal administrativo encargado de los inventarios, además se realió una revisión documental de registros institucionales. El estudio constata que un control interno deficiente genera riesgos de pérdidas de bienes, errores en los registros y baja transparencia en la administración de recursos, finalmente concluye que la implementación adecuada de mecanismos de control interno fortalece la gestión de inventarios, optimiza procesos y mejora la rendición de cuentas en la entidad pública, además recomienda la capacitación del personal y el uso de herramientas tecnológicas para el seguimiento de bienes municipales.

2.3.3. Antecedentes locales

(Usca et al., 2020) en su estudio titulado "Control interno y gestión de inventarios de bienes corrientes en la Municipalidad Distrital de Pallpata, Provincia de Espinar departamento de Cusco-

2021”, analizaron las deficiencias en el registro y control de bienes municipales, encontrando que la falta de procedimientos claros y de un sistema de control interno adecuado generaba pérdidas y baja confiabilidad en la información, los datos fueron obtenidos a través de encuestas al personal responsable de los inventarios y una exhaustiva revisión de documentos administrativos y registros contables de la municipalidad. Los resultados evidenciaron que la ausencia de controles internos adecuados genera deficiencias en la gestión de inventarios, como pérdidas de bienes, errores en la codificación y una baja confiabilidad en los reportes. Concluye que la implementación de un sistema de control interno más estricto junto con la capacitación del personal permitiría optimizar la gestión de inventarios y reforzar la rendición de cuentas institucional.

2.4. Hipótesis

2.4.1. Hipótesis general

La aplicación de la programación lineal mejora significativamente la gestión de inventarios en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, durante el año 2024.

2.4.2. Hipótesis específicas

La programación lineal influye significativamente en la optimización de los niveles de inventario en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, durante el año 2024.

La programación lineal reduce significativamente los costos de almacenamiento y reposición en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, durante el año 2024.

La programación lineal mejora significativamente la disponibilidad oportuna de los bienes en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, durante el año 2024.

2.5. Identificación de variables e indicadores

Variable independiente: Programación lineal

- Dimensiones: Formulación del modelo, Optimización, Aplicación del modelo

Variable dependiente: Gestión de inventario

- Dimensiones: Control de inventarios, Costos de inventario, Disponibilidad de bienes

2.6. Operacionalización de variables

Tabla 1 Operacionalización de variables

Variable	Tipo	Dimensión	Indicadores	Técnica	Instrumento
Programación lineal	Independiente	Formulación del modelo	Función objetivo definida	Análisis documental	Ficha de análisis documental
			Restricciones del modelo (demanda, capacidad, presupuesto)	Análisis documental	Ficha de análisis documental
		Optimización	Cantidad óptima de pedido	Análisis matemático	Modelo de programación lineal
			Minimización de costos totales	Análisis matemático	Modelo de programación lineal
		Aplicación del modelo	Nivel de implementación del modelo	Observación directa	Guía de observación
Gestión de inventario	Dependiente	Control de inventarios	Nivel de inventario	Observación directa	Lista de cotejo
			Rotación de inventarios	Análisis documental	Ficha de análisis documental
		Costos de inventario	Costos de almacenamiento	Análisis documental	Ficha de análisis documental
			Costos de reposición	Análisis documental	Ficha de análisis documental
		Disponibilidad de bienes	Nivel de desabastecimiento	Observación directa	Lista de cotejo
			Oportunidad en la atención de requerimientos	Observación directa	Guía de observación

Fuente: Elaboración propia.

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

3.1. Ámbito de estudio: Localización política y geográfica

Localización política

Región: Cusco

Provincia: Cusco

Distrito: San Jerónimo

Localización geográfica

Se ubica en el sector sureste de la provincia del Cusco

Altitud

Se ubica entre los 3220 m.s.n.m y 4300 m.s.n.m

Coordenadas

Longitud: -13,5447 aproximadamente -13º 32' 41'' sur

Latitud: - 71,8839 aproximadamente -71º53' 02''

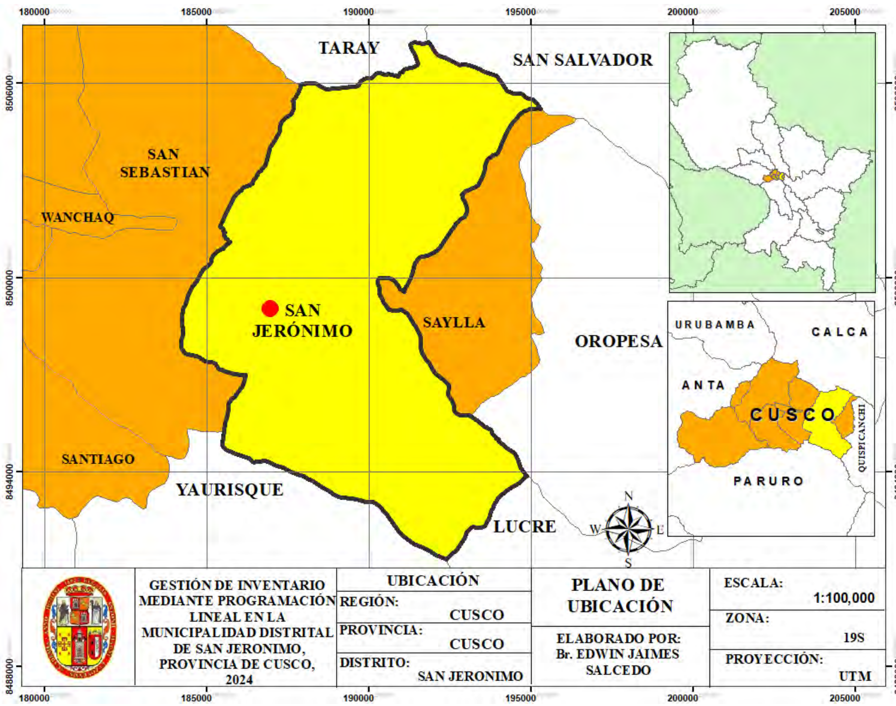
Limites

Norte: en la provincia de Calca con los distritos de Taray y San salvador

Sur: en la provincia de Paruro con los distritos de Yaurisque y Lucre

Este: con Opesa y Saylla

Figura 5 *Ubicación de la zona de estudio*



Fuente: Elaboración propia

3.2. Tipo y nivel de investigación

La investigación se realiza desde un enfoque cuantitativo, debido a que se fundamenta en una medición objetiva de variables y en el análisis de datos numéricos relacionados con la gestión de inventarios. Asimismo, se emplea la programación lineal como una herramienta matemática que permite modelar, analizar y optimizar el uso de los recursos, lo cual requiere el uso de métodos cuantitativos para la validación de resultados.

El estudio es de tipo aplicada, considerando que su finalidad es resolver un problema práctico identificado en la Municipalidad de San Jerónimo, específicamente en el área de gestión de inventarios. Los conocimientos teóricos de la programación lineal se aplican directamente para mejorar los procesos logísticos y administrativos de la entidad pública durante el año 2024.

La investigación es de nivel explicativo, porque busca identificar y analizar la relación de causa–efecto entre la programación lineal (variable independiente) y la gestión de inventarios (variable dependiente). En este sentido, se pretende explicar cómo la implementación del modelo de programación lineal influye en la optimización de niveles de inventario, reducción de costos y mejora en la disponibilidad de bienes.

La investigación presenta un diseño no experimental, puesto que las variables no son objetos de manipulación de forma deliberada, sino que se observan y analizan conforme se manifiestan en el entorno institucional. Por otra parte, el diseño es transversal, puesto que la información se recolecta en un solo periodo de tiempo correspondiente al año 2024.

3.3. Unidad de análisis

Estará compuesta por los costos de cada producto o bien almacenado en el inventario municipal. Según (Arias, 2006), el concepto de unidad de análisis se refiere a la entidad más significativa o representativa que se selecciona como objeto específico de estudio en una medición. Este término alude al qué o quién constituye el foco de interés en el contexto de una investigación.

3.4. Población de estudio

La población está compuesta por los costos de todos los productos que se encuentran en el inventario. De acuerdo con (López, 2004), se trata de un conjunto de casos específicos, debidamente definidos, delimitados y accesibles, que servirá como base para elegir una muestra que cumpla los requisitos especificados.

3.5. Técnicas de selección de muestra

La muestra está compuesta por los registros de los costos de inventario del año 2024. Alude a un subconjunto de la población objetivo que será encuestada. Se emplean métodos y procedimientos, tales como fórmulas y razonamientos lógicos, con el propósito de establecer la cantidad de elementos que integrarán la muestra, un tema que será tratado en secciones posteriores.

La muestra representa de manera representativa una fracción de la población en consideración (López, 2004)

3.6. Técnicas de recolección de información

Se considerará como técnica al análisis documental, debido a que se recolectaran desde los registros o reportes de la municipalidad de San Jerónimo, provincia del cusco. Según (Arias, 2006), constituye un subconjunto o segmento de cada persona en el estudio. Se utilizan métodos como las matemáticas y el razonamiento lógico para calcular cuántos elementos habrá en la muestra, aspecto que se discutirá posteriormente. La muestra es una porción que refleja de manera representativa la composición de la población.

3.7. Técnicas de análisis e interpretación de la información

El estudio será descriptivo, pues se determinará a través de tablas y gráficos el estado de la GI de la organización. Los softwares que se planean utilizar es Microsoft Excel y Python, para crear el modelo de programación lineal, para poder desarrollarlo para reducir al máximo los gastos de inventario, se debe definir el problema, recopilar datos, desarrollar el modelo, probar e implementar el modelo.

CAPITULO IV: RESULTADO Y DISCUSIÓN

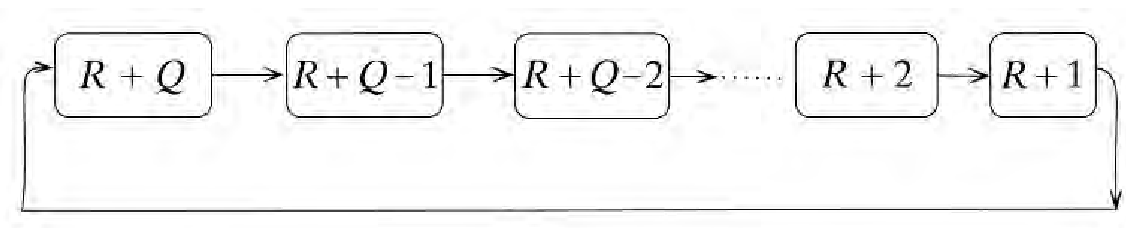
4.1. Nivel De Inventario Uniformemente Distribuido

En teoría de inventarios se destaca la importancia de registrar y controlar materiales ingresados al almacén se limitan a aquellos de considerable valor económico y volumen significativo como motores, llantas, aceites y repuestos de camiones, entre otros. Por el contrario, los materiales de bajo costo y volumen reducido como papel higiénico, lapiceros y hojas bond etc. no son registrados cuando entra al almacén, lo que conduce a un desorden, falta de control y generación de costos adicionales en un municipio.

Por otro lado, la cantidad de productos tiene que ser directamente proporcional a la demanda para que de esta manera mantener un equilibrio en el almacén.

Cuando las variables Q, R sean discretas, el lugar del inventario cambia entre $R + 1 \; y \; R + Q.$ Esto cuando la demanda se da una por una, el sistema pasara por cada uno de estos lugares, tal como se muestra en la figura 5.

Figura 6 *Nivel de inventario uniformemente distribuido*



Cuando existe una demanda el estado del sistema varia, si el sistema de inventario esta ubicado en el estado $R + 1$ y sucede una nueva demanda, por tanto, se llegará al estado R, pero seguidamente se hace una nueva orden el cual levantara el nivel de inventario al estado $R + Q$. Por lo tanto si k representa el estado del inventario, tendremos que:

$$K = R + 1, R + 2, \dots\dots\dots\dots, R + Q - 1, R + Q$$

Es necesario determinar la probabilidad de la posición de inventario en cada estado y establecer el valor de los costos esperados en función de las probabilidades que mejor describan el estado del sistema.

La dificultad para determinar una distribución de probabilidad en cada estado es muy complicada. En este trabajo supondremos que la demanda se hace de uno en uno y además esta sigue una distribución de Poisson, Asumiendo estas condiciones, se considera que el inventario está uniformemente distribuido. entre los posibles Q valores.

$$R + 1, R + 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, R + Q - 1, R + Q.$$

Para una comprensión perceptiva de esto, imaginemos que se examina la situación del inventario para un momento específico del tiempo. Consideramos que la demanda ocurre uno por uno y que se mantiene estable la tasa de demanda también que, en cada demanda, el nivel de inventario cambia de estado, por tanto ¿existirá alguna razón para creer que la probabilidad de uno de los estados es más alta que las demás?

Si k representa el estado de la posición del inventario en un momento determinado, entonces:

$$P(posici\acute{o}ndelinventario = k) = P(k) = 1/Q = R + 1, R + 2, \ldots\ldots, R + Q$$

4.2. Modelo ⟨Q, R⟩ para tiempo de reposición fijo

Para definir la función de costo del modelo ⟨Q, R⟩ en el cual el tiempo de reposición es constante, usaremos la notación siguiente.

D: $Demanda\ anual\ esperada$

L : $lead\ time\ (tiempo\ de\ entraga)$

x: $demanda\ durante\ el\ lead\ time$

$\mu x = E(x)$: $Valor\ esperado\ de\ la\ demanda\ durante\ el\ tiempo\ de\ reposición$

$f_D(x)$: $Distribución\ de\ probabilidad\ de\ la\ variable\ aleatoria\ X$

h: $Costo\ anual\ de\ mantenimiento\ por\ unidad\ en\ bodega$

p_0: $Costo\ de\ penalización\ por\ unidad\ de\ pedido\ pendiente$

p: $Costo\ anual\ de\ penalización\ por\ unidad\ de\ pedido\ pendiente$

Q: $Cantidad\ a\ pedir\ en\ cada\ orden$

R: $Nivel\ de\ inventario\ en\ el\ que\ se\ debe\ colocar\ una\ orden\ (variable\ de\ decisión)$

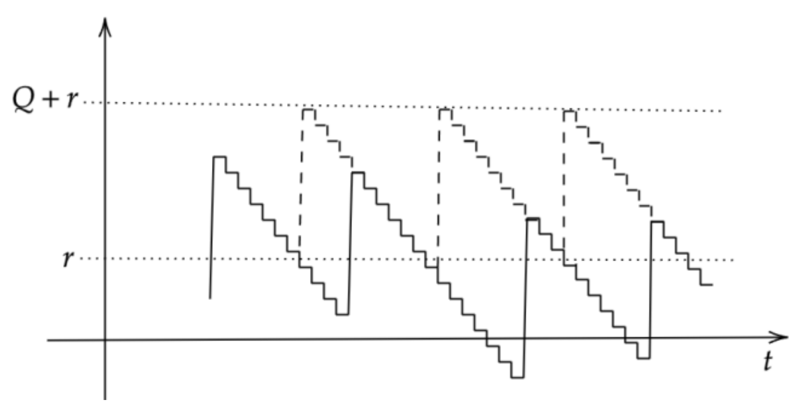
ρ : $Tasa\ de\ ocupación\ del\ sistema$

$\bar{B}$: $Número\ promedio\ de\ pedidos\ pendientes.$

$E[I]$: $Valor\ esperado\ de\ unidades\ disponibles.$

Q y R son variables de tipo discreto. nos basaremos en el hecho de que la demanda ocurre uno a la vez y que la posición del inventario se distribuye de manera uniforme, en el caso de la demanda no se tomara en cuenta una distribución de probabilidad especifica. En la figura 6 se muestra de qué manera se comporta el sistema:

Figura 7 *Modelo*$\langle Q, R\rangle$ *con tiempo de reposición fijo*



La probabilidad de que la posición del inventario se encuentre en el k estado es:

$$p(k) = \frac{1}{Q}$$

$$k = R + 1, R + 2, \dots, rR + Q$$

entonces analicemos que ocurre en el instante $t + L$, para el cual L representa un tiempo de reposición de inventario. Notemos que en el desarrollo de un tiempo L , las ordenes que estaban pendientes habrán llegado, y la orden colocada entre t y $t + L$, tiene una alta probabilidad que no habrá llegado. Por consiguiente, podemos afirmar que en $t + L$, el inventario neto va ser igual a la posición de inventario en un tiempo t, menos la cantidad de unidades demandadas entre t y $t + L$, es decir, X. Entonces el nivel de inventario neto es muy favorable al momento de analizar el número de pedidos pendientes. Durante el intervalo temporal t y $t + L$, se requieren X unidades. La probabilidad de que en $t + L$ exista una escasez puesto que en el tiempo t la posición de inventario es K, esto representa la probabilidad que la demanda X sea superior o igual a k. esto es:

$$P\ (escasez\ en\ t + L, dada\ una\ posición\ k\ del\ inventario\ en\ t)$$

$$= P(x \geq k) = 1 - P(x < k)$$

$$= 1 - P(x \leq k - 1)$$

$$= 1 - G(k - 1)$$

por consiguiente, la probabilidad de que haya escasez en $t + L$ es:

$$P(escasezen\ t + L) = \sum_{x} p(k) P(x \geq k)$$

$$\sum_{k=R+1}^{R+Q} 1/Q\ [(1 - G(k - 1)]$$

$$\frac{1}{Q} \sum_{k=R+1}^{R+Q} [(1 - G(k - 1)] \qquad (3.1)$$

por consiguiente, tenemos que:

$$1 - \frac{1}{Q}\sum_{k=R+1}^{R+Q} \frac{1}{Q}[(1 - G(k - 1)] = \frac{1}{Q}\sum_{k=R+1}^{R+Q}(1) - 1/Q \sum_{k=R+1}^{R+Q}[(1 - G(k - 1)]$$

$$= 1/Q \sum_{k=R+1}^{R+Q} G(k-1)$$

Esto representa la tasa ocupación del sistema inventario, que es la probabilidad de que no haya escases en el sistema en un tiempo t + T

$$\Rightarrow \rho = 1/Q \sum_{k=r+1}^{r+Q} G(k-1) \qquad (3.2)$$

De forma análoga tendremos la cantidad esperada de pedidos pendientes, sabiendo que el inventario se encuentra en la posición k, esto es:

$$B(k) = \sum_{k=R+1}^{\infty}(x-k)g(x)$$

Por consiguiente, la cantidad de pedidos pendientes esperado es:

$$\bar{B} = \sum_{K} p(k)B(k)$$

$$\bar{B} = \frac{1}{Q}.B(k)$$

$$= \sum_{k=R+1}^{R+Q}\left(\sum_{k=R+1}^{R+Q}(x-k).g(x)\right)$$

$$\bar{B} = \frac{1}{Q}\sum_{k=r+1}^{r+Q} B(K) \qquad (3.3)$$

Para determinar la media del inventario físico, $\bar{E}(Q,R)$ lo representaremos por $E(k)$ al nivel de inventario físico esperado para el tiempo t + L, puesto que K determina la posición del inventario en t, por consiguiente:

$$E(k) = \sum_{x=0}^{k-1} (k-x)g(x)$$

Expresemos E(k) en función de $B(k)$

$$\sum_{x=0}^{\infty} (x-k)g(x) = \sum_{x=0}^{\infty} xg(x) - k = \sum_{x=0}^{\infty} g(x)$$

$$\mu_x - k(1) = \mu_x - k \tag{3.4}$$

De la misma forma se tiene:

$$\sum_{x=0}^{\infty} (x-k)g(x) = \sum_{x=0}^{k-1} (x-k)g(x) + \sum_{x=k}^{\infty} (x-k)g(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{k-1} (k-x)g(x) + \sum_{x=k}^{\infty} (x-k)g(x)$$

$$E(k) = B(k)$$

E igualando con (3.4) obtenemos:

$$\mu_x - K = -E(k) + B(k)$$

$$\Rightarrow E(k) = K + B(k) - \mu_x$$

Hacemos una ponderación para valores posibles de k con el fin de obtener:

$$\bar{E}[k] = \sum_{K} p(k).E(k) = \sum_{k=R+1}^{R+Q} \frac{1}{Q}(k + B(k) - \mu_x)$$

$$= \frac{1}{Q} \sum_{k=R+1}^{R+Q} [k - \mu_x + B(K)]$$

$$= \frac{1}{Q}\left\{ \sum_{k=R+1}^{R+Q} k - \mu_x \sum_{k=R+1}^{R+Q} (1) + \sum_{k=R+1}^{R+Q} B(k) \right\}$$

$$= 1/Q \left\{ \frac{(Q+1)Q}{2} + QR - \mu_x Q + Q\bar{B} \right\}$$

$$E[I] = \frac{(Q+1)}{2} + R - \mu_x + \bar{B} \qquad (3.5)$$

$\frac{D}{Q}\ A$: $Es\ el\ costo\ esperado\ anual\ por\ ordenar$

$hE[k]$: $Es\ el\ costo\ esperado\ anual\ de\ mantenimiento$

$p\bar{B}$: $Es\ el\ costo\ esperado\ anual\ por\ pedido\ pendiente\ proporcional\ al\ tiempo$

$D[1-\rho]$: $La\ cantidad\ de\ la\ demanda\ insatisfecha\ que\ se\ espera$

$P_0D[1-\rho]$: $Es\ \ el\ costo\ esperado\ por\ la\ demanda\ insatisfecha\ es$:

De las ecuaciones (3.2), (3.3), (3,4) y (3.5) tenemos que la función del costo esperado este dado por:

$$K(Q,R) = (D/Q)A + hE[I] + P_0D[1-\rho] + p\bar{B} \qquad (3.6)$$

Donde:

$$\bar{E}[k] = \frac{(Q+1)}{2} + R - \mu_x + \bar{B}$$

$$\bar{B} = \frac{1}{Q}\sum_{k=R+1}^{R+Q} B(k)$$

$$\rho = \frac{1}{Q}\sum_{k=R+1}^{R+Q} G(k-1)$$

4.3. Demanda Poisson

La ecuación (3.6) lo adaptaremos para el caso en donde la demanda sigue un proceso de Poisson:

$$\Rightarrow g(x) = \frac{e^{-u}u^x}{x!}$$

μ, : $es\ la\ demanda\ media\ durante\ el\ tiempo\ de\ reposición$

por otro lado, se tiene que la tasa de ocupación esta dado por:

$$\rho = \frac{1}{Q}\sum_{k=R+1}^{R+Q} G(k-1) = \frac{1}{Q}\{G(R) + G(R+1) + \ldots\ldots + G(R+Q-1)\}$$

Para este modelo optaremos por una aproximación de ρ esto es

$$\rho \approx G(R)$$

Al hacer la aproximación de ρ el inconveniente que se presenta es que G(R) se subestima a ρ

A este se le suele llamar nivel de servicio tipo I. . además, se sabe que la función G(k) es creciente de esta manera se tiene que en la suma

$$\frac{G(R) + G(R+1) + \cdots \ldots . + G(R+Q-1)}{Q}$$

G(R) Es el menor, por lo tanto, G(R) subestima a ρ. La principal ventaja de este tratamiento a G(R) es que solo está en función de una sola variable lo que se hace mucho más fácil de manipular como se puede apreciar en (Zipkin, 2000).

Por tanto, podemos reescribir a la tasa de servicio de la siguiente manera

$$\rho = 1 - \frac{1}{Q}[B(R) - B(R+Q)]$$

Donde:

$$B(k) = \sum_{x=k}^{\infty}(x-k)g(x)$$

Si $\rho \approx 1 - \frac{B(R)}{Q}$, se tendrá un nivel de servicio del tipo II. De la misma manera la aproximación será subestimada al valor ρ.

Para reducir los efectos de esta aproximación, la propuesta es trabajar con el promedio del máximo y mínimo valor en la ecuación:

$$\rho = \frac{1}{Q}\{G(R) + G(R+1) + \cdots \ldots \ldots + G(R+Q-1)\}$$

Con lo que tendríamos:

$$\rho \approx \widehat{\rho} = \frac{G(R) + G(R+Q-1)}{2} \qquad (3.7)$$

$\hat{\rho}$ esta en función de las dos variables, esta forma es mucho más simple que la formula exacta

$$\rho = 1 - \frac{1}{Q}[B(R) - B(R+Q)]$$

Por otro lado, como el promedio se centraliza y este no subestima como cuando $\rho \approx G(R)$

En la ecuación (3.3) se tiene:

$$\bar{B} = \frac{1}{Q}\sum_{k=R+1}^{R+Q} B(k) = \frac{1}{Q}\{B(R+1) + \cdots \ldots \ldots + B(R+Q)\}$$

Se plantea un modelo similar haciendo que:

$$\overline{B} \approx \hat{B} = \frac{B(R+1) - B(R+Q)}{2} \qquad (3.8)$$

Por lo que ρ y $\bar{B}$ estarían aproximados de la siguiente manera

$$\rho \approx \hat{\rho} = \frac{G(R) + G(R+Q-1)}{2}$$

$$\bar{B} \approx \hat{B} = \frac{B(R+1) + B(R+Q)}{2}$$

Donde

$$B(k) = \sum_{x=0}^{\infty}(x-k)g(x)$$

Es la función de perdida

Como $g(x)$ representa la distribución de Poisson, entonces

$$B(k) = \sum_{x=0}^{\infty}(x-k)g(x) = \mu g(x) + (\mu - k)[1 - G(k)]$$

Donde

$$G(k) = \sum_{x=0}^{k} g(x) = \sum_{x=0}^{k} \frac{e^{-u}\,u^{x}}{x!}$$

La función de costo se puede rescribirse, teniendo en cuenta las ecuaciones (3.7) y (3.8) como:

$$K(Q,R) = \frac{D}{Q}A + h\hat{E} + p_0 D[1-\hat{\rho}] + p\bar{B} \qquad (3.9)$$

Donde:

$$\hat{y}(Q,R) = \frac{(Q+1)}{2} + R - \mu + \hat{B}$$

$$\hat{B} = \frac{1}{2}[B(R+1) + B(R+Q)]$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}[G(R) + G(R+Q-1)]$$

$$B(k) = \mu g(K) + (\mu - k)[1 - G(k)]$$

$$G(k) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-u}\,u^{x}}{x!}$$

Donde μ es la media en la distribución de Poisson

4.4. Restricciones para múltiples artículos

Ahora lo que se quiere lograr es extender la ecuación (3.9) al caso donde existan N artículos y los recursos son limitados

En el caso donde hay N artículos la función de costo será:

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{K}(Q_i, R_i)$$

donde $K(Q_i, R_i)$ para $i = 1,2,\ldots N$ es de la forma (3.9)

A las restricciones ya usadas en los modelos tradicionales, consideraremos el nivel de satisfacción o servicio. Comencemos por la frecuencia de pedidos del sistema.

Sea F_0 el máximo número de pedidos anuales que es posible hacer para el sistema y además $D_i/\,Q_i$ son los pedidos anuales del articulo i, por tanto, se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{N} D_i/\,Q_i \leq F_0 \qquad (3.10)$$

De la misma forma, sea e_i representa el espacio que ocupa una unidad del articulo i en almacén, por consiguiente, el espacio total para un lote del articulo i será $e_i Q_i$.

Además, si E_0 es el espacio máximo destinado para almacén entonces

$$\sum_{i=1}^{N} e_i Q_i \leq E_0 \qquad (3.11)$$

Ahora sea c_i el precio unitario para el artículo i y sea C_0 la máxima inversión para sistema, por tanto, para N artículos se debe cumplir la restricción:

$$\sum_{i=1}^{N} c_i Q_i \leq C_0 \qquad (3.12)$$

Ahora consideremos el nivel de servicio del cliente, vamos a considerar que estamos priorizando una política para satisfacer al cliente, esto se mide como la probabilidad que un cliente quede satisfecho en su demanda

El propósito es tener un nivel de servicio mayor a ρ_0, por tanto, es importante tener una medida que nos dé el nivel de servicio en el sistema, considerando que se tiene N artículos distintos. Ahora si ρ representa el nivel de satisfacción para el artículo i, por tanto, el nivel de servicio medio la podemos medir por

$$\sum_{i=1}^{N} D_i \hat{\rho}(Q_i, R_i)$$

Donde $D_T = D_1 + D_2 + \ldots\ldots + D_N$

Por la aproximación propuesta se tendrá , $\rho(Qi, Ri) \approx \hat{\rho}(Qi, Ri)$ donde cada $\hat{\rho}(Qi, Ri)$ estará dado por (3.7), la aproximación para el nivel medio de servicio estará dada por:

$$1/D_T \sum_{i=1}^{N} D_i \hat{\rho}(Q_i, R_i)$$

Por las políticas propuestas en el sistema S_0 debe ser menor o igual es decir

$$1/D_T \sum_{i=1}^{N} D_i \hat{\rho}(Q_i, R_i) \geq S_0$$

De (3.9), (3.10). (3.11), (3.12) y (3.13) se tiene que la propuesta del modelo con las aproximaciones establecidas es:

Minimizar la función de costo.

$$K(Q_i, R_i) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{D_i}{Q_i} A_i + h_i \hat{E}(Q_i, R_i) + p_{oi} D_i [1 - \hat{\rho}(Q_i, R_i)] + p_i \bar{B}(Q_i, R_i) \right\} \quad (3.14)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{N} D_i/Q_i \leq F_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textit{Número de pedidos anuales}$$

$$\sum_{i=1}^{N} e_i Q_i \leq E_0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{espacio máximo destinado para almacén}$$

$$\sum_{i=1}^{N} c_i Q_i \leq C_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{la máxima inversión para sistema}$$

$$1/D_T \sum_{i=1}^{N} D_i \hat{\rho}(Q_i, R_i) \geq S_0 \ldots\ldots\ldots \text{políticas propuestas en el sistema}$$

Q_i , R_i: enteros no negativos i = 1, 2, ..., N

$K(Q_i, R_i)$: Función de costo de inventario

Q_i : Cantidad a pedir

R_i : Punto de reorden

Donde:

$$\hat{E}(Q_i, R_i) = (Q_i + 1)/2 + R_i - \mu_i + \widehat{B}(Q_i, R_i)$$

$$\hat{B}(Q_i, R_i) = \frac{1}{2}\left[B(R_i \ + \ 1) \ + \ \widehat{B}(R_i + Q_i)\right]$$

$$\hat{\rho}(Q_i, R_i) = \frac{1}{2}[G(R_i) + G(R_i + Q_i - 1)]$$

$$B(k_i) = \mu_i g(x) + (\mu_i - k_i)[1 - G(k_i)] \qquad G(k_i) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-u}\, \mu_i^x / x!$$

Tabla 2 Modelo desarrollado

artículo	q	r	z-score	backorders	costo total	espacio (m^2)
clavo para madera con cabeza marca metalic	74	36	0.00	40.31	392,27	31,9
casco de seguridad color rojo	69	12	0.00	3.05	106,57	7,33
guantes de cuero con palma reforzada	129	14	0.00	17.62	139,26	14,01
botas de jebe con punta de acero caña alta	117	2	0.00	22.10	43,9	0,99
yeso bolsa x quintal	20	2	0.00	66.25	1.298,45	1,56
caja de concreto para registro	174	101	0.00	35.84	783,9	70,26
caja de concreto para para valvula de paso	120	155	0.00	10.16	1.093,05	20,12
disco de corte para concreto	56	14	0.00	23.09	475,85	16,2
tuberia pvc sal 8"	59	24	0.00	17.84	528,69	12
codos de 45º 8"	38	10	0.00	12.53	238,52	1,92
tapones de 8"	49	14	0.00	18.08	867,67	2,88

Artículo	**Q**	**R**	**Z-Score**	**Backorders**	**Costo Total**	**Espacio (m^2)**
Clavo para madera con cabeza marca metalic	21	3	0.00	12.05	174,84	2,66
Casco de seguridad color rojo	20	1	0.00	2.41	217,29	0,61
Guantes de cuero con palma reforzada	37	1	0.00	4.82	401,28	1,17
Botas de jebe con punta de acero caña alta	34	0	0.00	4.82	388,49	0,08
Yeso bolsa x quintal	6	0	0.00	9.64	490,84	0,13
Caja de concreto para registro	50	8	0.00	2.41	181,21	5,85
Caja de concreto para para valvula de paso	35	13	0.00	2.41	276,37	1,68
Disco de corte para concreto	16	1	0.00	7.23	317,92	1,35
Tuberia pvc sal 8"	17	2	0.00	12.05	519,9	1
CODOS DE 45º 8"	11	1	0.00	14.46	597,99	0,16
Tapones de 8"	14	1	0.00	12.05	511,32	0,24
Yee pvc alcantarillado	21	0	0.00	4.82	205,59	0,36
Tapa para buson con anillo	12	0	0.00	4.82	199,65	0,01
Tubo negro de seccion rectangular de 3mm	10	0	0.00	7.23	295,61	0,08
Pala tipo cuchara	15	1	0.00	2.41	148,69	0,29

Tubo de pvc 1 1/2"	110	12	0.00	7.23	395,16	11,4
Aplicador para adhesivo de calafateo	16	0	0.00	2.41	79,7	0,38
Sellador plastico y adhesivo	160	16	0.00	2.41	128,17	21,12
Casco tipo jockey para personal obrero	27	1	0.00	4.82	397,7	0,55
Guantes de jeve calibre 35	47	1	0.00	4.82	394,62	2,21
Poncho impermeable de pvc	16	0	0.00	4.82	296,02	0,73
Ropa de trabajo de dos cuerpos	4	0	0.00	4.82	393,64	0,03
Zapato de seguridad con punta de acero	4	0	0.00	4.82	394,58	0,04
Arpillera doble ancho	3	0	0.00	2.41	36,35	0,07
Visagra de 4"	10	1	0.00	9.64	309,14	0,12
Broca de 1/2"	5	0	0.00	7.23	296,15	0,03
Broca de 3/4" para madera	6	0	0.00	7.23	297,71	0,04
Broca de 3/8" para madera	5	0	0.00	7.23	296,15	0,03
Calamina ondulada galvanizada	6	0	0.00	12.05	738,88	0,15
Carretilla tipo bugui	3	0	0.00	2.41	207,86	0,2
Cinta teflon	15	1	0.00	4.82	82,96	0,01
Clavo de 1" con cabeza para madera	6	0	0.00	4.82	164,18	0,2
Clavo de 2" con cabeza para madera	11	1	0.00	4.82	188,46	0,68
Clavo de 3" con cabeza para madera	24	6	0.00	4.82	173,09	9,12
Disco de cortede 7" para concreto	9	1	0.00	7.23	101,84	0,14
Foco led de 20 watt	4	0	0.00	2.41	32,87	0
Hoja de sierra	13	2	0.00	12.05	263,34	0
Interruptor	8	0	0.00	4.82	69,02	0,04
Lubricante de tuberia para pvc	5	0	0.00	7.23	116,77	0,15
Platina de 2"x5mmx9m	7	1	0.00	4.82	428,55	1,2
Cilindro metalico	2	0	0.00	7.23	472,08	0,4
Teknopor de 1"	12	3	0.00	9.64	869,85	7,5
Lubricante de tuberia para pvc	3	0	0.00	2.41	98,73	1,6
Regular gasohol 90	10	2	0.00	7.23	120,31	6,15
Cemento portland tipo ip	223	57	0.00	19.28	8.465,26	50,5
Yeso bolsa 28kg	64	5	0.00	16.87	6.983,9	4,43
Ocre	32	1	0.00	4.82	341,01	0,02

Concreto premesclado f`c=210 kg/cm2 con piedra chancada	23	120	0.00	2.41	8.317,37	385,2
Servicio de bomba para concreto	5	1	0.00	2.41	865,95	0,5
Tapa de fierro fundido para buzon	37	4	0.00	2.41	272,11	3,06
Caja de concreto prefabricado de agua	16	3	0.00	2.41	314,84	1,59
Cordon de respaldo backer rod 3/8"	5	1	0.00	2.41	263,5	0,01
Pegamento para pvc	12	2	0.00	4.82	92,34	0,01
Sellador elastico de poliuretano	12	1	0.00	2.41	49,53	0,03
Aditivo curador de concreto	11	1	0.00	4.82	32,51	0,16
Rollizo de eucalipto 4"x5m	25	2	0.00	4.82	401,7	1,25
Triplay de 1.20x2.40m x6	39	12	0.00	7.23	527,2	6
Triplay de 1.20x2.40mx18mm	39	12	0.00	7.23	527,2	6
Madera para encofrado	117	85	0.00	12.05	3.269,37	160,46
Pintura esmalte	50	14	0.00	12.05	757,49	5,6
Pintura de trafico	25	4	0.00	9.64	480,45	1,4
Sovente de pintura de trafico	22	3	0.00	2.41	116,96	0,03
Cinta teflon	38	2	0.00	2.41	27,02	0,02
Cinta señalizacion 400mt amarillo rfx	28	1	0.00	2.41	21,69	0,28
Soldadura electrica cellocord p 1/8"	95	12	0.00	12.05	667,42	5,4
Tubo de fierro negro de 2"x6.4 m	156	94	0.00	7.23	2.592,23	61,1
Casco de seguridad	31	2	0.00	4.82	234,34	0,35
Audifonos antiruidos	62	1	0.00	2.41	18,95	0,01
Guantes de cuero reforzado	67	1	0.00	4.82	37,54	0,01
Visor tipo antiparra	86	2	0.00	2.41	21,33	0,02
Respirador de dos vias	131	5	0.00	2.41	19,41	0,05
Filtro para respirador de dos vias	61	2	0.00	2.41	18,28	0,05
Mascarilla quirurgica desechable 3 pliegues	271	2	0.00	7.23	17,86	0
Guantes de jebe p/albañil de 1ra	96	6	0.00	9.64	80,49	1,16
Cortaviento para casco	141	12	0.00	4.82	68,5	2,4
Losa1	346	120	0.00	4.82	712,1	60
Losa 2	207	90	0.55	3.30	634,55	90

Tabla 3 Tabla de costos

Nombre	Demanda Anual	Costo Pedido (s/)	Costo Mantenimiento (s/)	Costo Faltante (s/)	Costo Unitario (s/)	Espacio Unidad (m²)	Desviación Diaria	Punto Reorden	Tamaño Lote
Clavo para madera con cabeza marca metalic	30.00	27	3,52	10	7	0,89	5.00	3.0	21.44
Casco de seguridad color rojo	10.00	26	1,3	80	11	0,61	1.00	1.0	19.96
Guantes de cuero con palma reforzada	12.00	26	0,45	80	13	0,97	2.00	1.2	37.32
Botas de jebe con punta de acero caña alta	2.00	26	0,09	80	48	0,41	2.00	0.2	33.81
Yeso bolsa x quintal	2.00	25	3,1	50	12	0,65	4.00	0.2	5.68
Caja de concreto para registro	84.00	26	1,73	40	9,5	0,7	1.00	8.4	50.28
Caja de concreto para para valvula de paso	129.00	25	5,39	40	9,5	0,13	1.00	12.9	34.59
Disco de corte para concreto	12.00	25	2,27	40	20	1,13	3.00	1.2	16.27
Tuberia pvc sal 8"	20.00	25	3,42	40	33	0,5	5.00	2.0	17.11
CODOS DE 45º 8"	8.00	27	3,53	40	12	0,2	6.00	0.8	11.06
Tapones de 8"	12.00	30	3,65	40	30	0,2	5.00	1.2	14.04
Yee pvc alcantarillado	3.00	50	0,7	40	15	1,19	2.00	0.3	20.76
Tapa para buson con anillo	2.00	26	0,7	40	56	0,05	2.00	0.2	12.22
Tubo negro de seccion rectangular de 3mm	1.00	50	1	40	48	0,79	3.00	0.1	10.00
Pala tipo cuchara	9.00	26	2	50	35	0,32	1.00	0.9	15.30
Tubo de pvc 1 1/2"	120.00	50	1	40	14,41	0,95	3.00	12.0	109.54
Aplicador para adhesivo de calafateo	4.00	16	0,5	30	65	0,95	1.00	0.4	16.00
Sellador plastico y adhesivo	160.00	16	0,2	40	46	1,32	1.00	16.0	160.00
Casco tipo jockey para personal obrero	11.00	16	0,5	80	12	0,5	2.00	1.1	26.53
Guantes de jeve calibre 35	14.00	16	0,2	80	10	1,58	2.00	1.4	47.33
Poncho impermeable de pvc	4.00	16	0,5	60	29	1,82	2.00	0.4	16.00
Ropa de trabajo de dos cuerpos	2.00	16	4	80	90	0,17	2.00	0.2	4.00
Zapato de seguridad con punta de acero	2.00	16	5	80	85	0,2	2.00	0.2	3.58
Arpillera doble ancho	1.00	48	12	7	650	0,7	1.00	0.1	2.83
Visagra de 4"	12.00	16	4	30	25	0,1	4.00	1.2	9.80
Broca de 1/2"	2.00	16	3	40	9	0,13	3.00	0.2	4.62

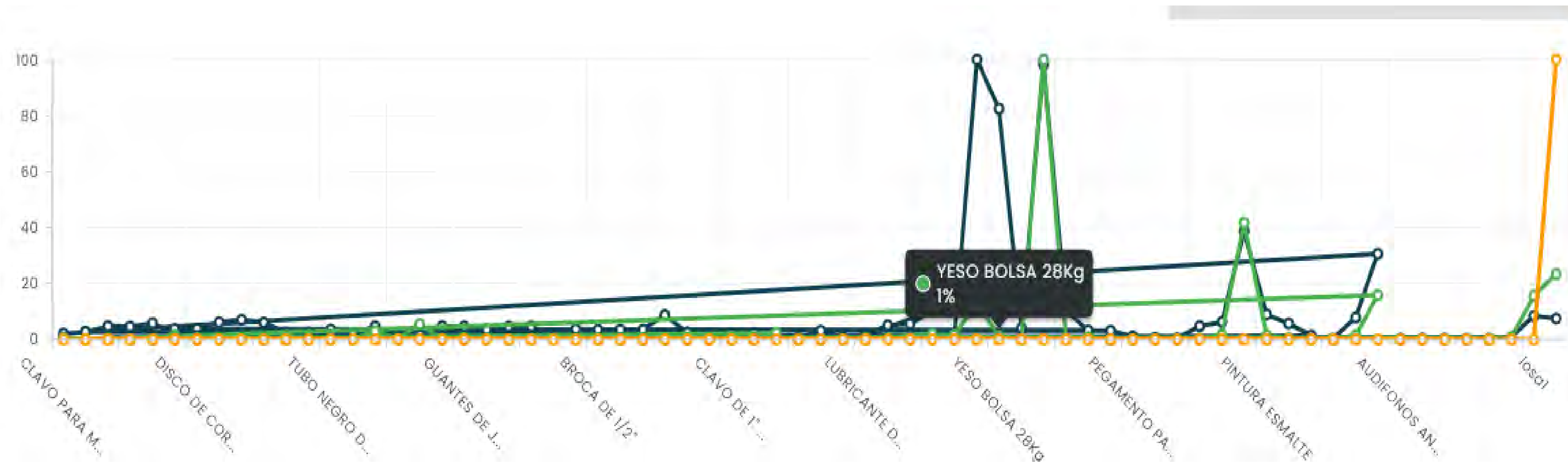
Broca de 3/4" para madera	3.00	16	3	40	28	0,13	3.00	0.3	5.66
Broca de 3/8" para madera	2.00	16	3	40	10	0,13	3.00	0.2	4.62
Calamina ondulada galvanizada	2.00	50	5	60	22	0,74	5.00	0.2	6.32
Carretilla tipo bugui	2.00	50	20	70	160	1	1.00	0.2	3.16
Cinta teflon	14.00	16	2	12	1,5	0,01	2.00	1.4	14.97
Clavo de 1" con cabeza para madera	4.00	25	5	30	9	0,5	2.00	0.4	6.32
Clavo de 2" con cabeza para madera	12.50	25	5	30	7	0,54	2.00	1.3	11.18
Clavo de 3" con cabeza para madera	60.00	25	5	13	7	1,52	2.00	6.0	24.49
Disco de cortede 7" para concreto	7.00	16	3	12	30	0,2	3.00	0.7	8.64
Foco led de 20 watt	2.00	16	4	9	20	0,01	1.00	0.2	4.00
Hoja de sierra	17.00	16	3	20	6,9	0	5.00	1.7	13.47
Interruptor	4.00	16	2	12	7	0,1	2.00	0.4	8.00
Lubricante de tuberia para pvc	3.00	50	12	12	45	0,5	3.00	0.3	5.00
Platina de 2"x5mmx9m	12.00	60	34	60	98	1	2.00	1.2	6.51
Cilindro metalico	2.00	43	34	60	38	2	3.00	0.2	2.25
Teknopor de 1"	25.00	40	13	80	34,6	3	4.00	2.5	12.40
Lubricante de tuberia para pvc	4.00	43	43	12	49	4	1.00	0.4	2.83
Regular gasohol 90	20.50	13	5	12	20	3	3.00	2.1	10.32
Cemento portland tipo ip	570.00	153,95	3,52	400	50	0,89	8.00	57.0	223.13
Yeso bolsa 28kg	50.00	173,28	4,24	400	23	0,89	7.00	5.0	63.93
Ocre	9.00	190,29	3,42	50	10	0,02	2.00	0.9	31.65
Concreto premesclado f`c=210 kg/cm2 con piedra chancada	1200.00	75,03	346,56	346,56	12	3,21	1.00	120.0	22.79
Servicio de bomba para concreto	5.00	148	56,24	267,7	406,51	1	1.00	0.5	5.13
Tapa de fierro fundido para buzon	36.00	100	5,3	34,5	450	0,85	1.00	3.6	36.86
Caja de concreto prefabricado de agua	30.00	50	12,45	56,67	32	0,53	1.00	3.0	15.52
Cordon de respaldo backer rod 3/8"	7.00	87	45,23	34,56	2	0,01	1.00	0.7	5.19
Pegamento para pvc	15.00	16	3,34	12,52	120	0,01	2.00	1.5	11.99
Sellador elastico de poliuretano	9.00	16	2,13	11,34	72	0,03	1.00	0.9	11.63
Aditivo curador de concreto	5.00	16	1,23	4,45	56	0,32	2.00	0.5	11.41
Rollizo de eucalipto 4"x5m	15.00	120	5,76	56,34	38	0,83	2.00	1.5	25.00
Triplay de 1.20x2.40m x6	120.00	50	7,8	34,5	32	0,5	3.00	12.0	39.22
Triplay de 1.20x2.40mx18mm	120.00	50	7,8	34,5	118	0,5	3.00	12.0	39.22

Madera para encofrado	849.00	190	23,5	54,56	4,5	1,89	5.00	84.9	117.17
Pintura esmalte	140.00	75	8,34	32,3	40,5	0,4	5.00	14.0	50.18
Pintura de trafico	35.00	75	8,34	32,3	64,5	0,4	4.00	3.5	25.09
Sovente de pintura de trafico	28.00	36	4,2	12,45	19	0,01	1.00	2.8	21.91
Cinta teflon	23.00	16	0,5	3,5	1,3	0,01	1.00	2.3	38.37
Cinta señalizacion 400mt amarillo rfx	12.00	16	0,5	3,5	45	0,23	1.00	1.2	27.71
Soldadura electrica cellocord p 1/8"	120.00	50	1,34	45,53	15	0,45	5.00	12.0	94.63
TUBO DE FIERRO NEGRO DE 2"X6.4 m	940.00	160	12,32	98,43	48	0,65	3.00	94.0	156.25
Casco de seguridad	15.00	16	0,5	45,65	13	0,23	2.00	1.5	30.98
Audifonos antiruidos	12.00	16	0,1	5,34	35	0,01	1.00	1.2	61.97
Guantes de cuero reforzado	14.00	16	0,1	6,45	10	0,01	2.00	1.4	66.93
Visor tipo antiparra	23.00	16	0,1	5,34	7	0,01	1.00	2.3	85.79
Respirador de dos vias	54.00	16	0,1	2,65	35	0,01	1.00	5.4	131.45
Filtro para respirador de dos vias	23.00	16	0,2	2,65	22	0,02	1.00	2.3	60.66
Mascarilla quirurgica desechable 3 pliegues	23.00	16	0,01	2,1	1,2	0	3.00	2.3	271.29
Guantes de jebe p/albañil de 1ra	58.00	16	0,2	6,45	14	0,2	4.00	5.8	96.33
Cortaviento para casco	120.00	25	0,3	5,56	12	0,2	2.00	12.0	141.42
Losa1	1200.00	100	2	5	20	0,5	2.00	120.0	346.41
Losa 2	800.00	80	3	6	30	1	3.00	90.0	206.56

Tabla 4 Resumen

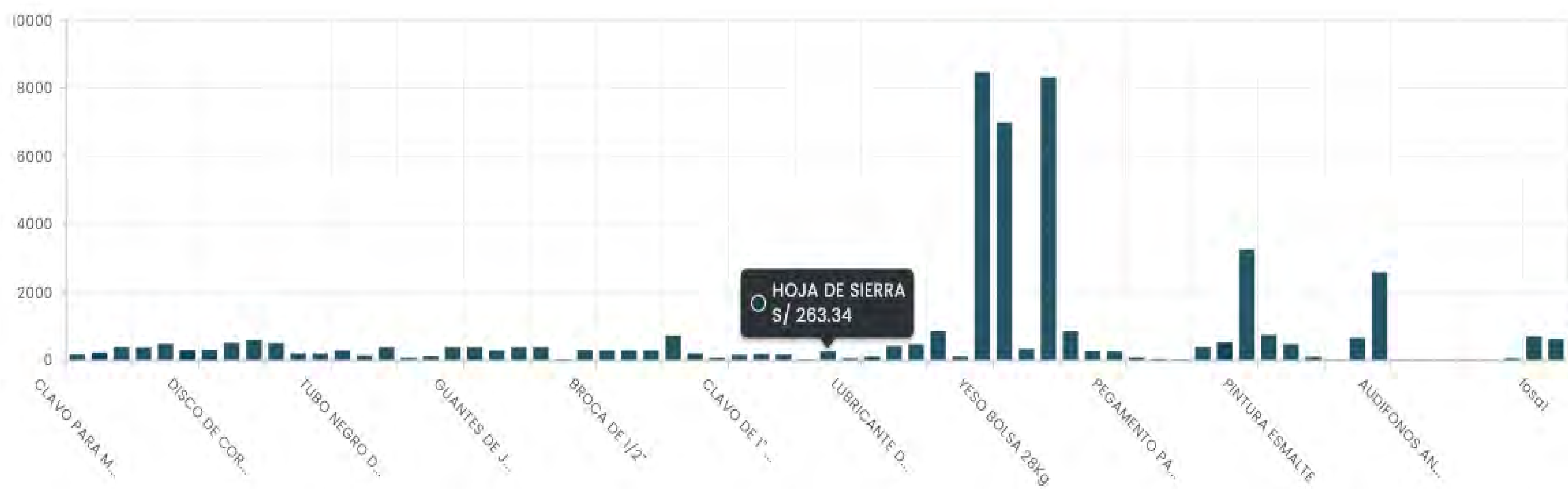
Resumen del Sistema	
Costo Total Sistema:	50.021,29
Espacio Total Usado:	927,06
Presupuesto Total:	22.084,25
Número Total Pedidos:	140

Figura 8 *Línea combinada normalizada*



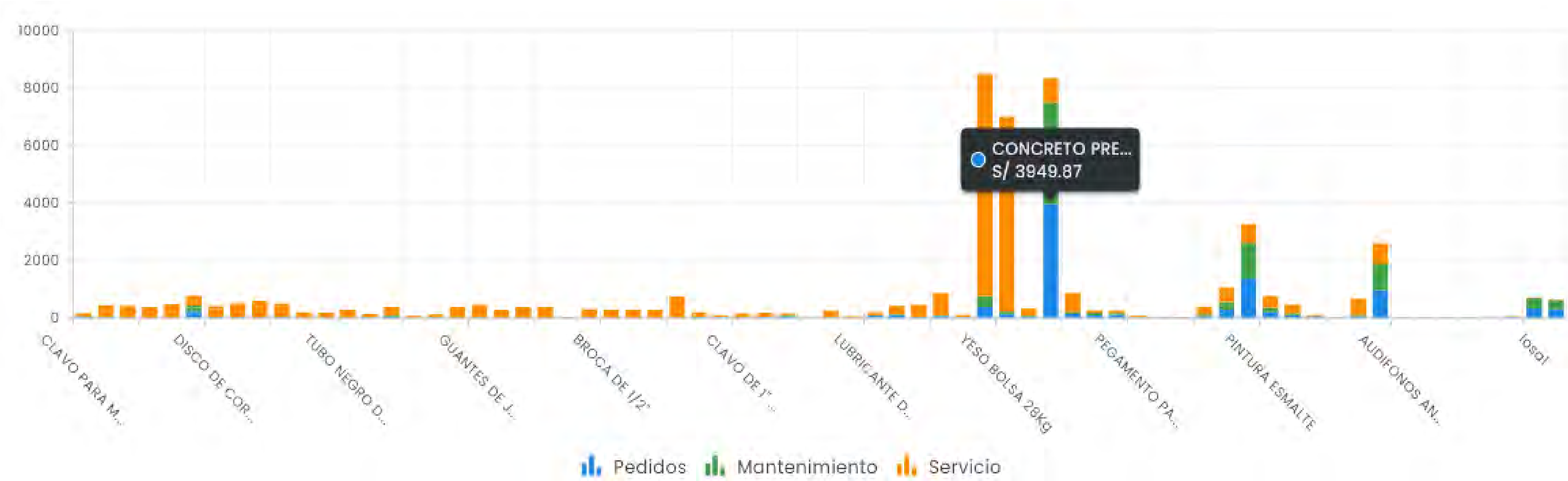
Nota: El gráfico representa la comparación porcentual de distintos productos dentro de un sistema de inventario, mostrando cómo varía su participación relativa en tres escenarios o categorías. Cada línea (verde, azul y naranja) refleja una dimensión distinta del y permite identificar desequilibrios entre productos. Por ejemplo, el pico en “YESO BOLSA 28Kg” sugiere una concentración significativa que podría implicar sobrestock o alta demanda, mientras que otros productos como “CLAVO DE 1” o “BROCA DE 1/2” muestran valores bajos, lo que indicaría subabastecimiento o baja rotación.

Figura 9 *Costos por artículos*



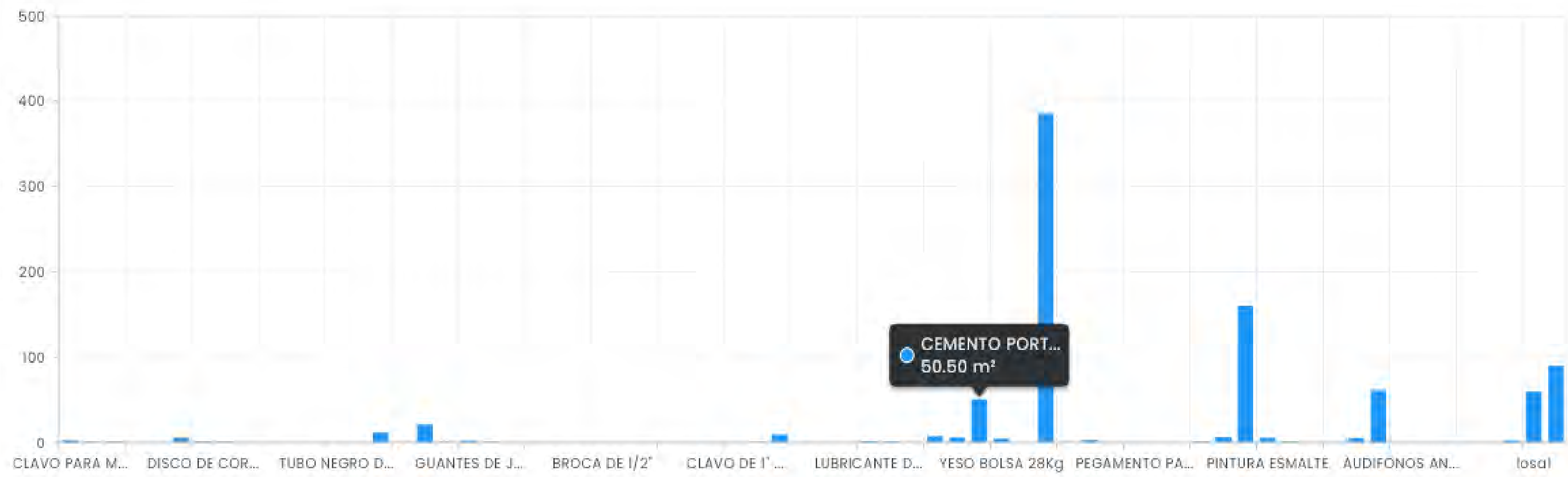
Nota: El gráfico muestra la distribución de los costos asociados a diferentes productos del inventario. Cada barra representa el valor monetario de un artículo específico, lo que permite comparar rápidamente cuáles insumos generan mayor gasto. Por ejemplo, se observa que algunos productos como Cemento Portland Tipo IP tienen un costo mucho más elevado en comparación con otros, mientras que artículos como HOJA DE SIERRA presentan valores más bajos (S/ 283.34).

Figura 10 *Detalles de costos*



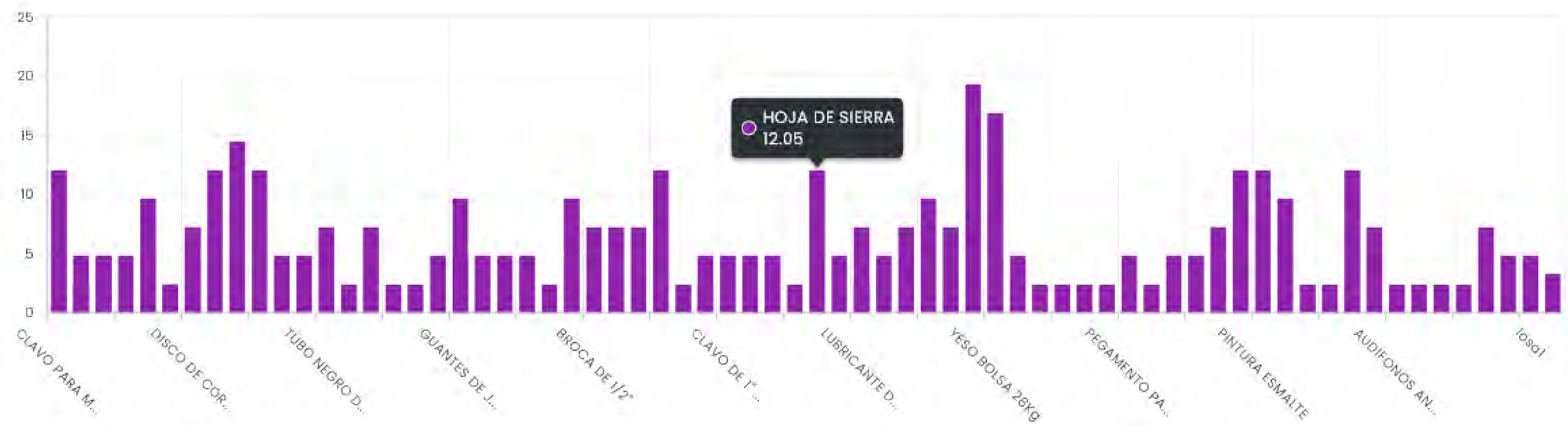
Nota: El gráfico presenta un desglose comparativo de distintos artículos del inventario, mostrando tres componentes clave: Pedidos, Mantenimiento y Servicio. Cada categoría de producto tiene asociadas barras en diferentes colores que permiten visualizar cómo se distribuyen los costos en cada dimensión. Por ejemplo, el artículo YESO Bolsa 25Kg refleja un valor destacado en pedidos (S/ 3949.87), lo que indica un mayor impacto en esa área con respecto a mantenimiento o servicio.

Figura 11 *Espacio usado (m^2)*



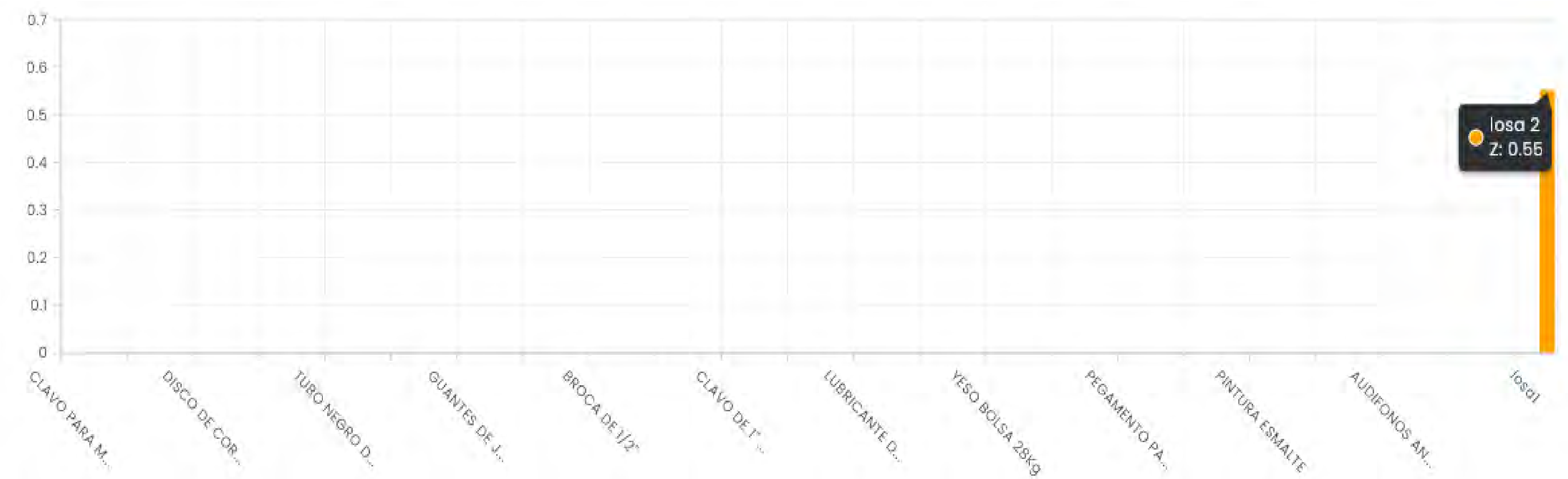
Nota: En el gráfico se refleja la cantidad de materiales o artículos del inventario medidos en función del área ocupada. Cada barra representa el volumen o cantidad de un producto expresado en metros cúbicos, lo que permite estimar el espacio físico que cada insumo requiere dentro del almacén. Por ejemplo, el cemento portland destaca con un valor de 50.50 m^3, siendo uno de los materiales que más espacio ocupa en comparación con otros artículos como clavos, discos o guantes, que apenas registran valores.

Figura 12 *Backorders esperados*



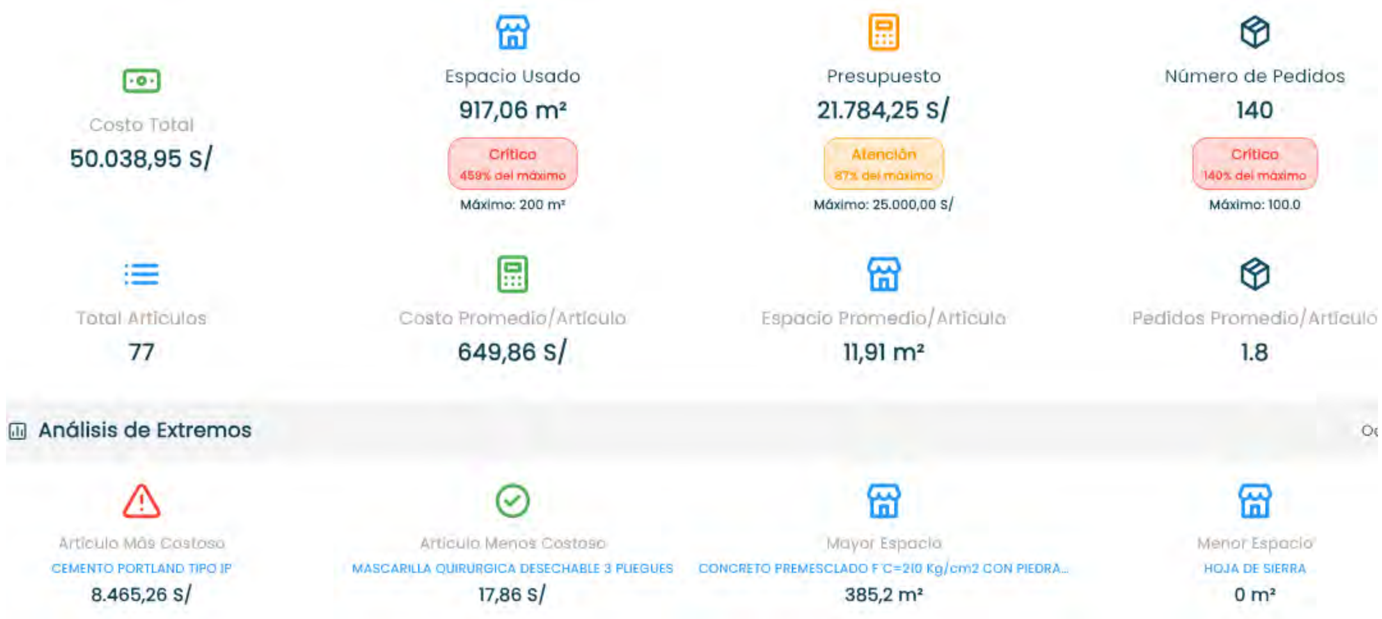
Nota: En el gráfico se representa la cantidad de artículos del inventario que se proyecta quedarán en faltantes o pedidos pendientes de atender. Cada barra muestra el nivel esperado de backorder para un producto específico, lo que permite identificar cuáles insumos tienen mayor riesgo de no estar disponibles cuando se requieran. Por ejemplo, algunos artículos como la Hoja de Sierra alcanzan valores intermedios (12.05), mientras que otros apenas registran niveles bajos o nulos.

Figura 13 *Distribucion Z- Score*



Nota: En el gráfico se muestra cómo se comportan los valores estandarizados de distintos artículos del inventario. El Z-Score mide la desviación de cada dato respecto a la media en unidades de desviación estándar, lo que permite identificar qué elementos se alejan significativamente del promedio. En este caso, la mayoría de los artículos tienen un Z-Score cercano a cero (sin barras visibles), mientras que losa2 alcanza un valor de aproximadamente 0.65, indicando que es el único ítem con una desviación relevante respecto al resto.

Figura 14 *Resumen del sistema*



Nota: La figura 14 muestra que el inventario alcanza un costo total de S/ 50,038.95, con un uso de espacio crítico de 917.06 m² frente a un máximo de 200 m², un presupuesto consumido en 87% (S/ 21,784.25 de S/ 25,000), y un número de pedidos que supera en 40% el límite esperado (140 frente a 100). Se gestionan 77 artículos, con promedios de S/ 649.86 por costo, 11.91 m² por espacio y 1.8 pedidos por artículo. Los extremos destacan al Cemento Portland Tipo IP como el más costoso (S/ 8,465.26), la Mascarilla quirúrgica desechable como la más barata (S/ 17.86), el Concreto premezclado como el de mayor espacio (385.2 m²) y la Hoja de sierra como el de menor (0 m²), evidenciando restricciones críticas de presupuesto, espacio y pedidos que deben considerarse en la optimización mediante programación lineal.

4.5. Análisis de resultados

A partir de los resultados obtenidos con el modelo de programación lineal multiarticular se obtuvo una mejor estimación del punto de reorden de esta manera reducimos los gastos por faltantes lo que nos permitió bajar los costos totales respecto al método actual que se adopta en la municipalidad de san Jerónimo. Puesto que este punto de reorden nos da una buena estimación asegurando que no se produzca faltantes ni sobrantes en exceso lo cual mantiene el nivel de servicio eficiente.

4.6. Interpretación de Resultados

Atreves de los resultados obtenidos con el modelo propuesto utilizando del software flutter para programación se pudo evidenciar que el espacio para almacenar todo el requerimiento es insuficiente superando en un 458.5% de su capacidad total, el gasto presupuestado alcanzo un 87% y el número máximo de pedidos supero en 140%. Esto nos indica que la municipalidad debe hacer un reajuste al momento de hacer requerimientos de materiales

4.7. Discusión de resultados

El propósito central de esta investigación fue aplicar un modelo de gestión de inventarios mediante Programación Lineal (PL) para optimizar la toma de decisiones dentro de la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco. Los hallazgos confirman de manera robusta la hipótesis general al demostrar que la implementación de este modelo contribuye eficientemente a la entidad, logrando una reducción significativa en los costos totales de inventario y, simultáneamente, minimizando la probabilidad de quiebre de stock para insumos críticos en las obras públicas.

La efectividad del modelo radica en su capacidad de optimizar recursos bajo restricciones, un principio fundamental de la Investigación Operativa sustentado por autores como Taha (2017) y Hillier y Lieberman (2021), quienes establecen que la Programación Lineal es la herramienta más adecuada para la asignación óptima de recursos escasos. En el contexto de la gestión pública, donde el presupuesto es una restricción ineludible, el modelo de PL estocástica propuesto no solo busca el Lote Económico (Q) y el Punto de Reorden (R), sino que los determina de forma que se minimice el costo total sujeto a una restricción de nivel de servicio preestablecido (por ejemplo, 95% de satisfacción de la demanda).

La base de este enfoque es la Teoría de Inventarios bajo Incertidumbre (Modelos Estocásticos), impulsada por autores como Silver, Pyke y Peterson (1998). El estudio refrenda esta teoría al demostrar que en un entorno con fluctuación atípica de la demanda (como es común en proyectos de obra), la adopción de modelos probabilísticos es esencial. El cálculo del Punto de Reorden (R) incorpora un *stock* de seguridad que, a diferencia de los modelos determinísticos puros (como el EOQ tradicional), absorbe la variabilidad de la demanda durante el tiempo de espera, garantizando la continuidad operacional de las obras sin incurrir en los sobrecostos de un inventario excesivo.

Los resultados de esta investigación se fortalecen al contrastarse con los antecedentes y al validar un enfoque metodológico superior atreves del contraste con Pajuelo Abal (2022): El antecedente de Pajuelo Abal proponía un modelo de inventario no experimental, basando sus resultados en un marco teórico. En contraste, la presente tesis da un paso adelante al aplicar el modelo de PL y realizar una simulación con datos reales y referenciales de una obra específica de la municipalidad. Esta metodología aplicada permite no solo validar el modelo teóricamente, sino también obtener resultados reales y medibles de la reducción de costos, lo que confiere un sustento empírico mucho más sólido. Se justifica que, en el sector público, la validación práctica de la optimización (a través de la simulación de un caso real) es crucial para generar confianza y promover la adopción por parte de los tomadores de decisiones.

Encontraste y Alineamiento con Ulises (2018): El trabajo de Ulises (2018) compartía el objetivo de establecer una herramienta que garantizara los procesos de adquisición y evitara el exceso de inventario. Nuestro estudio se alinea con este objetivo, pero lo ejecuta con mayor precisión y fundamentación matemática. Mientras que Ulises buscó establecer una herramienta de gestión general, la presente investigación utiliza el modelo *Q, R* estocástico definido por Programación Lineal para calcular valores óptimos y específicos de Q (Lote Económico) y R (Punto de Reorden). La materialización de este modelo en el software desarrollado con *Flutter* demuestra un avance tecnológico, transformando el concepto teórico en una herramienta tangible y operativa que garantiza la adquisición de insumos justo a tiempo, evitando las pérdidas por obsolescencia o el costo de capital inmovilizado, tal como se propuso.

Dentro del impacto de los Resultados se determina los puntos de reorden (R) y el lote económico (Q) óptimos se erigió como el principal resultado práctico. Estos parámetros son la esencia del control de inventarios. Su correcta determinación, a través de la PL estocástica, mantiene la continuidad de las obras sin interrupciones, ya que el sistema garantiza la disponibilidad de insumos en el momento exacto en que el *stock* alcanza un nivel crítico.

Este logro se traduce en dos beneficios para la gestión presupuestaria:

1. Eficiencia Operativa: Se eliminan los retrasos en las obras causados por la falta de materiales, reduciendo los costos operativos indirectos asociados a la mano de obra inactiva y penalizaciones, tal como lo señalan autores en la gestión de la cadena de suministro como Chopra y Meindl (2020).

2. Gestión Presupuestaria Óptima: Al evitar excesos o déficits, el modelo logra una mejor gestión presupuestaria, ya que el capital se libera de inventarios inmovilizados, pudiendo ser reasignado a otras necesidades de la municipalidad.

A pesar de los resultados positivos, se identificaron limitaciones que resaltan la naturaleza estocástica del problema. La principal limitación recae en la precisión de la data histórica de demanda diaria, ya que las fluctuaciones atípicas (causadas por eventos no planificados o cambios en el cronograma de obras) podrían alterar la exactitud del cálculo de R. De igual forma, el modelo base no contempló variaciones drásticas en los costos de adquisición y transporte (fenómenos inflacionarios), lo que en la práctica podría reducir la eficiencia del Lote Económico (Q) calculado.

No obstante, este estudio realiza una contribución significativa al conocimiento aplicado, demostrando que la adopción de modelos probabilísticos es una necesidad y no un lujo en la gestión de inventarios públicos. Los resultados sirven de base para fortalecer la toma de decisiones al ofrecer una herramienta sistemática y medible para la política de reposición de materiales.

Como recomendación clave, se subraya la necesidad de que la municipalidad implemente un Sistema de Información de Gestión (MIS) integrado con el modelo de Programación Lineal. Esto permitiría actualizar los datos en tiempo real y proyectar escenarios dinámicos ante cambios atípicos en la demanda o costos. Asimismo, se sugiere investigar el impacto del modelo bajo condiciones simuladas de alta variabilidad para fortalecer la robustez de la toma de decisiones y el cálculo de un *stock* de seguridad más resiliente.

CAPITULO V: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

En atención al primer objetivo específico, se concluye que la programación lineal ejerce una influencia significativa en la optimización de los niveles de inventario, al posibilitar la determinación de cantidades óptimas de pedido y niveles adecuados de stock, lo que reduce las distorsiones operativas asociadas al sobreabastecimiento y a los quiebres de inventario, contribuyendo a una gestión más eficiente y sostenible.

En relación con el segundo objetivo específico, se concluye que la programación lineal incide de manera significativa en la reducción de los costos de almacenamiento y reposición, al minimizar los costos totales del sistema de inventarios mediante una planificación óptima de las compras y una utilización eficiente del presupuesto institucional, fortaleciendo la eficiencia económica de la gestión pública.

Respecto al tercer objetivo específico, se concluye que la programación lineal mejora de forma sustantiva la disponibilidad oportuna de los bienes, al asegurar la provisión continua de materiales requeridos por las áreas usuarias, optimizando los tiempos de atención y contribuyendo al cumplimiento eficaz de las funciones administrativas y operativas de la municipalidad.

5.2. Recomendaciones

Se recomienda a la Municipalidad de San Jerónimo institucionalizar el uso de modelos de programación lineal, integrados con el modelo estocástico Q,R, como herramienta permanente para la gestión de inventarios, a fin de fortalecer la toma de decisiones basada en criterios técnicos y cuantitativos, y mejorar el uso eficiente de los recursos públicos.

Se sugiere al área de Logística y Almacén establecer un sistema de planificación en inventarios que considere la inestabilidad de la demanda para tiempos de reposición constantes, incorporando parámetros probabilísticos que permitan actualizar periódicamente los valores de cantidad óptima de pedido y punto de reorden, con el objetivo de reducir los riesgos de desabastecimiento y sobreabastecimiento.

Se sugiere integrar el modelo de programación lineal al sistema informático de gestión logística de la municipalidad, de modo que los procesos de control, reposición y monitoreo de inventarios se realicen de manera automatizada, permitiendo una actualización continua de la información y una mejora en la eficiencia operativa.

Se recomienda que futuras investigaciones amplíen el alcance del estudio incorporando otros modelos de optimización y técnicas de investigación de operaciones, así como la aplicación del modelo en otras municipalidades o entidades públicas, con el propósito de generar evidencia comparativa y contribuir al fortalecimiento de la gestión logística en el sector público.

VI. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abad, N. (2024). *Control Interno y la Gestión de Inventarios en la Municipalidad Distrital Veintiséis de Octubre - Piura, 2024.* Chimbote: Universidad Católica Los Ángeles de Chimbote. Obtenido de https://repositorio.uladech.edu.pe/handle/20.500.13032/40119

Arias, F. (2006). *El proyecto de investigación. Introducción a la metodología de la investigación.* Episteme. Obtenido de http://www.formaciondocente.com.mx/06_RinconInvestigacion/01_Documentos/El%20Proyecto%20de%20Investigacion.pdf

Arnold, J. R. T., & Chapman, S. N. (2007). *Introducción a la administración de la producción y operaciones*. Pearson Educación.

Ballou, R. H. (2004). *Logística: Administración de la cadena de suministro*. Pearson Educación.

Becerra, E. J. (2021). *Aplicación de la Modelación Matemática para la planificación y control de la Empresa Agroindustrial Phoenix Foods.* Polo del Conocimiento. doi:http://dx.doi.org/10.23857/pc.v6i4.2556

Calle, A., & Quimis, S. (2025). *Control presupuestario y la gestión pública Gobierno Autónomo Descentralizado Parroquial La Unión, 2023.* La Unión, Ecuador: Revista Pulso Científico. doi:https://doi.org/10.70577/rps.v3i3.65

Campos, E. (2021). *Modelo de gestión de inventario como estrategia de mejora en la competitividad de la empresa Aromatic del Perú S.A.C. Ate, 2020.* Universidad Científica del Sur. Obtenido de https://acortar.link/MV2VNo

Carranza, D. y. (2019). *Optimización de las Utilidades en la Empresa DM&E S.A.S mediante un Modelo de Programación Lineal que permita mejorar su Rendimiento Operacional.* Universidad Piloto de Colombia. Obtenido de https://acortar.link/wMR2Zx

Chopra, S., & Meindl, P. (2016). *Supply Chain Management: Strategy, Planning, and Operation (6th ed).* Pearson.

Córdova Rojas, I. A. (2022). *La mejora de la rentabilidad mediante el control de inventario.* Revista Colón Ciencias, Tecnología Y Negocios. Obtenido de https://revistas.up.ac.pa/index.php/revista_colon_ctn/article/view/3105

De Los Ríos, J. (2019). *Las tendencias logísticas 2020 que te llevaran a lo más lejos.* Obtenido de https://acortar.link/EiYbV7

Fernández, V. (2020). *Tipos de justificación en la investigación científica.* Espiritud Emprendedor TES. Obtenido de https://acortar.link/DAQvZ2

Fleites, Y. M. (2020). *APPLICATIONS OF LINEAR PROGRAMMING IN CUBAN CHEMICAL PROCESS INDUSTRY EXPERIENCES.* Centro Azúcar. Obtenido de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2223-48612020000400090&lng=es&tlng=en.

Galarza, G. (2024). *Control interno y la gestión de inventarios en la Municipalidad Provincial de Huánuco, 2024.* LIMA: Universidad César Vallejo. Obtenido de https://repositorio.ucv.edu.pe/handle/20.500.12692/155663

Gerrit, J., & M., R. K. (2011). *A linear programming formulation for an inventory management decision problem with a service constraint.* doi:10.1016/j.eswa.2010.12.012

Guevara, D. (2019). *Sistema de gestión de inventario basado en la teoría de inventarios y control de producción utilizando tecnología QR, para mejorar la gestión del inventario en la empresa Ecovive SAC.* Obtenido de https://acortar.link/3rttEy

Heizer, J., Render, B., & Munson, C. (2017). *Operations Management: Sustainability and Supply Chain Management* (12.ª ed.). Pearson.

Hernández, R. &. (2018). *Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* Editorial Mc Graw Hill. Obtenido de http://repositorio.uasb.edu.bo/handle/54000/1292

Janssens, G. K., & Ramaekers, K. M. (2011). *A linear programming formulation for an inventory management decision problem with a service constraint.* Expert Systems with Applications. doi:https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.02.046

Kurt , D., & Lesley, A. (2023). *Quality of inventory management system: Case study of BARMM-Ministry of Public Works-Basilan District Engineering Office.* Philippines: Scintilla Juris – Philippines. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/373326816_Quality_of_Inventory_Management_System_Case_Study_of_BARMM-Ministry_of_Public_Works-Basilan_District_Engineering_Office

López, P. L. (2004). *POBLACIÓN MUESTRA Y MUESTREO.* Punto Cero. Obtenido de http://www.scielo.org.bo/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1815-02762004000100012&lng=es&tlng=es

Medina, U. (2018). *Control de inventario de bienes patrimoniales en la Municipalidad Distrital de Condebamba – 2018.* Universidad Señor de Sipán. Obtenido de https://repositorio.uss.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12802/6704/Medina%20Cortegana%20Ulises%20Eli.pdf?sequence=1

Nalvarte, R. A. (2023). *Sistema web para la gestión de stock en el almacén del área de logística de la Municipalidad Distrital de Pilcomayo.* Repositorio institucional de la Universidad Nacional del Centro del Perú. Obtenido de https://repositorio.uncp.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12894/10010/T010_70054075_T.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Nahmias, S., & Olsen, T. L. (2015). - *Production and Operations Analysis*. Waveland Press.

Pawel, M., & Grazyna, V. (2023). *Implementation of Inventory Policy in Local Government Units.* Scientific Papers of Silesian University of Technology. Obtenido de https://managementpapers.polsl.pl/wp-content/uploads/2023/12/182-Modrzy%C5%84ski-Voss.pdf

Pizzan, N. d. (2022). *Inventory control and profitability in a hardware company in Manantay - Peru. Sapienza: International Journal of Interdisciplinary Studies.* Obtenido de https://doi.org/10.51798/sijis.v3i1.246a

Quintero,M & Torres, A & Boris Pérez, B, & Zaldívar, M.A. (2020). *Optimización de la producción de recursos para el aprendizaje electrónico a través de herramientas matemáticas.* Obtenido de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=586264607008

Sama, H. & Mdemu, R. (2024). *Effects of Inventory Management on Service Delivery in Public Sector: A Case of Office of Registrar of Political Parties.* (Vol. 5(2)). United Republic of Tanzania : International Journal of Business. Obtenido de https://journal.rescollacomm.com/index.php/ijbesd/article/view/1785

Silver, E. A., Pyke, D. F., & Thomas, D. J. (2016). *Inventory and Production Management in Supply Chains*. CRC Press.

Pizzan, N. d. (2022). *Inventory control and profitability in a hardware company in Manantay - Peru. Sapienza: International Journal of Interdisciplinary Studies.* Obtenido de https://doi.org/10.51798/sijis.v3i1.246a

Tañski, N. I. (2022). *La Administración ante los retos de los nuevos escenarios y el Administrador como factor estratégico en la innovación, tecnología y management.* Anales ConLAd. Obtenido de https://hdl.handle.net/20.500.12219/4776

Tersine, R. J. (1994). *Principles of Inventory and Materials Management*. Prentice Hall.

Usca, N., Soto, R., & Ormachea, N. (2022). *ontrol interno y gestión de inventarios de bienes corrientes en la Municipalidad Distrital de Pallpata, Provincia de Espinar, Departamento Cusco – 2021.* LIMA: UNIVERSIDAD PRIVADA TELESUP. Obtenido de https://repositorio.ucv.edu.pe/handle/20.500.12692/153992

Villarreal Stama, F. L., Montenegro Gálvez, D. I., & Nuñez Ribadeneira, J. E. (2021). *Optimización Matemática como Herramienta para la toma de decisiones en la Empresa.* INGENIO. doi:https://doi.org/10.29166/ingenio.v4i1.2738

Wang, A. L., Arbogast, J., Wilson, Z., & Gounaris, C. E. (2024). *A Novel Mixed-Integer Linear Programming Formulation for Continuous-Time Inventory Routing.* Arxiv. doi:https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.11240

Zipkin, P. H. (2000). *Foundations of Inventory Management*. McGraw-Hill.

ANEXOS

Anexo 01.

Tabla 5 Matriz de consistencia

Formulación del problema	Objetivos de la investigación	Hipótesis	Variables	Población y muestra	Tipo / nivel y diseño de investigación	Técnica / instrumento
Problema General: ¿De qué manera la aplicación de la programación lineal puede mejorar la gestión de inventarios en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, 2024? **Problemas Específicos:** ¿Cómo influye la aplicación de la programación lineal en la optimización de los niveles de inventario de bienes y materiales en la Municipalidad de San Jerónimo en el año 2024? ¿En qué medida la programación lineal	**Objetivo General:** Determinar de qué manera la programación lineal mejora la gestión de inventarios de la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, 2024. **Objetivos Específicos:** Analizar el efecto de la programación lineal en la optimización de los niveles de inventario en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, 2024. Evaluar la influencia de la programación lineal en la reducción de costos de almacenamiento y	**Hipótesis General:** La aplicación de la programación lineal mejora significativamente la gestión de inventarios en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, durante el año 2024. **Hipótesis Específicas:** La programación lineal influye significativamente en la optimización de los niveles de inventario en la Municipalidad de San Jerónimo,	**Variable 1:** Programación lineal **Variable 2:** Gestión de inventarios.	**Unidad de Análisis:** Costos de cada producto o bien almacenado en el inventario municipal **Población:** Registros de los costos de todos los productos que se encuentran en el inventario **Muestra** Registros de los costos de inventario del año 2023.	**TIPO:** Aplicada. **NIVEL:** Explicativo. **DISEÑO:** No experimental.	**Instrumento:** Documental. **Métodos de Análisis de Investigación:** Estadística descriptiva e inferencial

contribuye a la reducción de costos de almacenamiento y reposición en la gestión de inventarios de la Municipalidad de San Jerónimo durante el año 2024?	reposición en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, 2024.	provincia del Cusco, durante el año 2024.
		La programación lineal reduce significativamente los costos de almacenamiento y reposición en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, durante el año 2024.
¿Cómo la implementación de un modelo de programación lineal permite mejorar la eficiencia en la distribución y disponibilidad oportuna de los bienes almacenados en la Municipalidad de San Jerónimo en el año 2024?	Determinar cómo la programación lineal optimiza la disponibilidad oportuna de los bienes en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, 2024.	La programación lineal mejora significativamente la disponibilidad oportuna de los bienes en la Municipalidad de San Jerónimo, provincia del Cusco, durante el año 2024.

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 02. Cuadro de operacionalización de variables.

Tabla 6 Operacionalización de variables

Variable	Definición conceptual	Definición operacional	Dimensión	Indicadores	Técnica	Instrumento
Programación lineal	La programación lineal (LP) es un campo de la programación matemática dedicado a maximizar o minimizar (optimizar) una función lineal, denominada función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones expresadas mediante un sistema de ecuaciones o inecuaciones también lineales (Flores, 2023).	Minimizar (optimizar) una función lineal, denominada función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones expresadas mediante un sistema de ecuaciones o inecuaciones también lineales.	Formulación del modelo	Función objetivo definida	Análisis documental	Ficha de análisis documental
				Restricciones del modelo (demanda, capacidad, presupuesto)	Análisis documental	Ficha de análisis documental
			Optimización	Cantidad óptima de pedido	Análisis matemático	Modelo de programación lineal
				Minimización de costos totales	Análisis matemático	Modelo de programación lineal
Gestión de inventarios	La gestión de inventarios es el proceso de planificar, organizar, controlar y monitorear el flujo de bienes y materiales dentro de una empresa. El objetivo de la gestión de inventarios es tener la cantidad adecuada de inventario en el lugar adecuado y en el momento adecuado, para satisfacer la	Es el proceso de planificar, organizar, controlar y monitorear el flujo de bienes y materiales dentro de una empresa.	Aplicación del modelo	Nivel de implementación del modelo	Observación directa	Guía de observación
			Control de inventarios	Nivel de inventario	Observación directa	Lista de cotejo
				Rotación de inventarios	Análisis documental	Ficha de análisis documental
			Costos de inventario	Costos de almacenamiento	Análisis documental	Ficha de análisis documental

	demanda de los clientes sin incurrir en costos excesivos (González, 2020).			Costos de reposición	Análisis documental	Ficha de análisis documental
			Disponibilidad de bienes	Nivel de desabastecimiento	Observación directa	Lista de cotejo
				Oportunidad en la atención de requerimientos	Observación directa	Guía de observación

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 3: Arquitectura del sistema de inventario

Descripción general

El Sistema de Inventario QR implementa el modelo de inventario (Q,R) para múltiples artículos con restricciones. Esta documentación se enfoca en:

a) Declaración de variables en los modelos de datos
b) Implementación de fórmulas matemáticas en MathUtils
c) Conexión entre capas (repositorios → modelos → pantallas)

Variables del modelo

D= demanda anual

K= costo de pedido

h= costo de mantenimiento

p= costo por faltante

Q= tamaño del lote

E[I]=backorders Esperados (calculado)

Anexo 4:

Figura 15 *Implementación del software*

```

class Articulo {

  final String nombre;            // Nombre del artículo

  final double demandaAnual;      // D - Demanda anual en unidades

  final double costoPedido;       // K - Costo por pedido

  final double costoMantenimiento; // h - Costo de mantenimiento por unidad/año

  final double costoFaltante;     // p - Costo por faltante

  final double costoUnitario;     // c - Costo unitario

  final double espacioUnidad;     // s - Espacio por unidad (m²)

  final double desviacionDiaria; // σD - Desviación estándar diaria

  final double puntoReorden;      // R - Punto de reorden

  final double tamanoLote;        // Q - Tamaño de lote

}

```

Anexo 5: Variables del Modelo QR:

D: Demanda anual (unidades/año)

R - Punto de reorden

Q - Tamaño de lote

k: Costo por pedido (moneda/pedido)

h: Costo de mantenimiento (moneda/unidad/año)

p: Costo por faltante (moneda/unidad)

c: Costo unitario (moneda/unidad)

s: Espacio por unidad (m^2/unidad)

σD: Desviación estándar diaria (unidades/día)

R: Punto de reorden (unidades)

Q: Tamaño de lote (unidades)