

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS, FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



TESIS

**ESTUDIO DE LAS GEODÉSICAS DE
AGUJEROS NEGROS CON PELO ESCALAR**

PRESENTADA POR:

Bach. WEYNER EDIN CCUIRO
MONTALVO

**PARA OPTAR AL TÍTULO
PROFESIONAL DE FÍSICO**

ASESOR:

Lic. RICARDO ADÁN CÁCERES SÁENZ

CO-ASESOR:

Dr. DAVID CHOQUE QUISPE

CUSCO – PERÚ

2024

INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, Asesor del trabajo de investigación/tesis titulada: Estudio de las geodésicas de Agujeros Negros con Pelo Escalar

Presentado por: Weyner Edin Cuervo Montalvo DNI N° 73510983

presentado por: DNI N°:

Para optar el título profesional/grado académico de Físico

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por 01 veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del **Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC** y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 07%.

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	Evaluación y Acciones	Marque con una (X)
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y adjunto las primeras páginas del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, 09 de Junio de 2025

Firma

Post firma Ricardo Adán Cáceres Sáenz

Nro. de DNI 24702670

ORCID del Asesor 0000 0003 3186 8892

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio: oid: 27259:461166518

Weyner Edin Ccuiro Montalvo

ESTUDIO DE LAS GEODÉSICAS DE AGUJEROS NEGROS CON PELO ESCALAR

 Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::27259:461166518

Fecha de entrega

21 may 2025, 5:24 p.m. GMT+2

Fecha de descarga

21 may 2025, 5:33 p.m. GMT+2

Nombre de archivo

Tesis-1.pdf

Tamaño de archivo

1.5 MB

77 Páginas

15.126 Palabras

69.393 Caracteres

7% Overall Similarity

The combined total of all matches, including overlapping sources, for each database.

Filtered from the Report

- ▶ Bibliography
- ▶ Cited Text
- ▶ Submitted works

Exclusions

- ▶ 1 Excluded Source
- ▶ 4 Excluded Matches

Top Sources

- 7%  Internet sources
- 1%  Publications
- 0%  Submitted works (Student Papers)

Integrity Flags

1 Integrity Flag for Review

-  **Replaced Characters**
200 suspect characters on 37 pages
Letters are swapped with similar characters from another alphabet.

Our system's algorithms look deeply at a document for any inconsistencies that would set it apart from a normal submission. If we notice something strange, we flag it for you to review.

A Flag is not necessarily an indicator of a problem. However, we'd recommend you focus your attention there for further review.

© 2022, Weyner E. Ccuiro M.

Ninguna parte de esta tesis puede reproducirse o transmitirse bajo ninguna forma o por ningún medio o procedimiento, sin permiso por escrito del autor.

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento

A mis padres y hermana

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer primeramente a mis padres y a mi hermana por haberme apoyado en el desarrollo de mi carrera universitaria, a todos mis compañeros y todas las interminables conversaciones que tuvimos. A todos esos grandes amigos que hice en estos años estudiando, trabajando y aprendiendo. Agradezco también a mis profesores y su paciencia con todas mis preguntas. A todos ellos por apoyarme en mi desarrollo académico que ahora se ve concretado en la escritura de esta tesis.

Resumen

El estudio de los agujeros negros representa una de las líneas más relevantes en la investigación contemporánea en física teórica, debido a su capacidad para poner a prueba los fundamentos de la relatividad general y explorar la posible incorporación de efectos cuánticos en escenarios de curvatura extrema. Estos objetos astrofísicos concentran densidades de materia y energía tan elevadas que generan campos gravitatorios intensos, donde la estructura del espacio-tiempo se ve fuertemente distorsionada. En tales condiciones, las teorías clásicas de la gravedad alcanzan sus límites de aplicabilidad, lo que hace de los agujeros negros un entorno propicio para examinar posibles extensiones o modificaciones del marco teórico actual.

En este trabajo se analiza una clase particular de soluciones de agujeros negros caracterizadas por la presencia de un campo escalar no trivial con acoplamiento fuerte. Estos objetos, conocidos como *agujeros negros con pelo* (*hairy black holes*), difieren de las soluciones tradicionales —que solo dependen de masa, carga y momento angular— al incorporar estructuras adicionales fuera del horizonte de eventos, asociadas al comportamiento del campo escalar.

El propósito de este estudio es examinar las geodésicas en estos espacios-tiempo modificados, es decir, las trayectorias que siguen las partículas y los rayos de luz bajo la influencia conjunta del campo gravitacional y del campo escalar. Mediante este análisis se busca entender cómo la presencia del campo escalar afecta la dinámica gravitacional y qué implicaciones físicas y observacionales podrían derivarse de estas modificaciones.

Abstract

The study of black holes represents one of the most significant areas in contemporary theoretical physics, due to its potential to test the foundations of general relativity and to explore the possible inclusion of quantum effects in regimes of extreme curvature. These astrophysical objects concentrate such high densities of matter and energy that they generate intense gravitational fields, in which the structure of spacetime becomes highly distorted. Under these conditions, classical theories of gravity reach their limits of applicability, making black holes a suitable environment for examining possible extensions or modifications to the current theoretical framework.

This work analyzes a particular class of black hole solutions characterized by the presence of a nontrivial scalar field with strong coupling. These objects, known as hairy black holes, differ from traditional solutions—which depend only on mass, charge, and angular momentum—by incorporating additional structures outside the event horizon, associated with the behavior of the scalar field.

The purpose of this study is to examine geodesics in these modified spacetimes; that is, the trajectories followed by particles and light rays under the joint influence of the gravitational field and the scalar field. Through this analysis, we aim to understand how the presence of the scalar field affects gravitational dynamics and what physical or observational implications may result from these modifications.

Keywords – Geodesics, Black Holes, General Relativity,

Índice general

AGRADECIMIENTOS	I
Resumen	II
Abstract	III
1. Matrices de Investigación	1
1.1. Matriz de Consistencia	2
1.2. Matriz de Instrumentos	3
1.3. Matriz de Operacionalización de Variables	4
2. Introducción	5
2.1. Planteamiento del Problema	5
2.2. Formulación del Problema	6
2.3. Objetivo	6
2.4. Justificación	6
2.5. Limitaciones	6
2.6. Delimitaciones	6
3. Marco Teórico	8
3.1. Relatividad General	8
3.1.1. Geometría Diferencial	9
3.1.1.1. Variedades	9
3.1.1.2. Curvatura	11
3.1.1.3. Geodésicas	13
3.2. Acción de Hilbert Einstein	14
3.3. Agujeros Negros	15
3.3.1. Solución de Schwarzschild	16
3.3.2. Potencial efectivo de Schwarzschild	18
3.3.3. Geodésicas de Schwarzschild	21
3.4. Agujeros Negros con Pelo	30
3.4.1. Evadiendo el teorema de no pelo	33
4. Geodésicas	36
4.1. Geodésicas tipo tiempo (<i>Time-like</i>)	36

4.2. Geodésicas nulas (<i>null</i>)	37
4.3. Geodésicas cerca al horizonte del agujero negro con pelo	40
4.3.1. Geodésicas tipo tiempo (<i>time-like</i>) cerca al horizonte	42
4.3.2. Geodésicas nulas (<i>null</i>) cerca al horizonte	44
5. Resultados	47
6. Discusión	49
7. Conclusiones	51
Referencias	52
Apéndices	55
A.	55
A1. Notación, convención de suma de Einstein	55
A2. Simetría axial y estacionaria	56
A3. Tensores covariante y contravariante, métrica	56
A4. Problema de Kepler	57
A5. Vectores de Killing	59
A6. Unidades	62
A7. Runge-Kutta para Schwarzschild	62

Índice de cuadros

2.6.1. Tipos de Agujeros Negros	7
4.1.1. Aquí consideramos $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}/mc^2$, y $\bar{\mathcal{J}} = \mathcal{J}/mc^2$. En la figura (4.1.1) podemos ver los extremos del potencial efectivo U_{eff}	37
4.2.1. Estos son los parámetros con los que se realizaron las gráficas para las geodésicas tipo null.	41

Índice de figuras

3.3.1. Fijando $M = 10^6 M_\odot$ y $J^2 = \frac{24M^2 G_N^2}{c^6}$ podemos identificar 3 regiones. Cada región define un tipo distinto de geodésica.	19
3.3.2. E_1 corresponde al valor mínimo del potencial efectivo (punto de equilibrio estable), por este motivo corresponde a una órbita circular estable. E_2 pertenece a la Región III. E_3 pertenece a la Región II. E_4 corresponde al valor máximo del potencial efectivo (punto de equilibrio inestable), por este motivo corresponde a una órbita circular inestable. E_5 pertenece a la Región I.	20
3.3.3. Fijando $M = 10^6 M_\odot$ podemos identificar 2 regiones. Cada región define un tipo distinto de geodésica.	20
3.3.4. E_1 pertenece a la Región II. E_2 corresponde al valor máximo del potencial efectivo (punto de equilibrio inestables), por este motivo corresponde a una órbita circular inestable. E_3 pertenece a la Región I.	21
3.3.5. Podemos ver las 2 órbitas circulares, en rojo la órbita estable y en azul la órbita inestable. Son las únicas órbitas circulares que existen. Y en gris el agujero negro. Condiciones iniciales (curva roja): $r_0 = r_*^+$ y $\dot{r}_0 = 0$. Condiciones iniciales (curva azul): $r_0 = r_*^-$ and $\dot{r}_0 = 0$	23
3.3.6. Podemos ver una geodésicas que cae dentro del agujero negro (Región - I), algo a notar es que su caída no es perpendicular al horizonte de eventos. Y en gris el agujero negro. Condiciones iniciales: $r_0 \rightarrow \infty$ y $\dot{r}_0 = \sqrt{Ec^2}$	24
3.3.7. Podemos observar una geodésica que solo se acerca al agujero (curva azul), mas no lo orbita (Región - II). Agrego la curva roja para referencia, $r = 0,04613484978865398 AU$. Condiciones iniciales: $r_0 \rightarrow \infty$ y $\dot{r}_0 = \sqrt{Ec^2}$	25
3.3.8. Podemos observar una geodésica orbita al agujero (curva azul) esto quiere decir que se ubica en la Región - III. Agrego la curva roja para referencia, $r_p = 0,12158224399382238 AU$ y $r_h = r_g$. Condiciones iniciales: $r_0 = 0,5106936776245934 AU$ y $E' = -0,03$	26
3.3.9. Podemos observar una geodésica que solo se acerca al agujero (curva azul), mas no lo orbita (Región - II). Condiciones iniciales: $E = E_1 = 10^{21} AU^2 yr^{-4}$ y $r_0 \rightarrow \infty$	28

3.3.1	Podemos ver la única órbitas circular inestable. Y en gris el agujero negro. Condiciones iniciales: $E = E_2 = \mathcal{V}_{eff}^{max} = \mathcal{V}_{eff}(r_*)$ y $r_0 = r_*$.	29
3.3.1	Podemos ver una geodésicas que cae dentro del agujero negro (Región - I), algo a notar es que su caída no es perpendicular al horizonte de eventos. Y en gris el agujero negro. Condiciones iniciales: $E = E_1 = 7,5 \times 10^{21} AU^2 yr^{-4}$ y $r_0 \rightarrow \infty$.	30
3.4.1.	Rama negativa. Gráfico de la izquierda: $\frac{\kappa}{\alpha} V(\phi)$ vs $\sqrt{\kappa}\phi$. y en el gráfico de la derecha $-g_{tt}/c^2$ vs $\sqrt{\Omega}$: Consideramos el parámetro de pelo $\nu = 1,52$, $\alpha = 1 AU^{-2}$ y el rango de masas para el agujero negro $0,04 AU \leq \frac{GM_N}{c^2} \leq 4,00 AU$.	33
3.4.2.	Rama Positiva. Gráfico de la izquierda: $\frac{\kappa}{\alpha} V(\phi)$ vs $\sqrt{\kappa}\phi$. Y el gráfico de la derecha $-g_{tt}/c^2$ vs $\sqrt{\Omega}$: Consideramos el parámetro de pelo $\nu = 1,76$, $\alpha = -40 AU^{-2}$ y el rango de masas para el agujero negro $0,04 AU \leq \frac{GM_N}{c^2} \leq 4,00 AU$.	34
4.1.1.	Tenemos gráficos de la rama positiva (gráfico de la derecha) y la rama negativa (gráfica de la izquierda) del potencial efectivo U_{eff} . Los parámetros están descritos en la tabla (4.1.1). Aparentemente no hay ningún nuevo comportamiento en comparación a la solución de Schwarzschild, pero veremos que hay un comportamiento interesante en la geodésica debido al campo escalar en al región-I.	38
4.1.2.	Rama negativa (<i>time-like</i>) Para poder comparar también colocamos el horizonte del agujero negro de Schwarzschild $r_h = \frac{2G_N M}{c^2} = 0,08 AU$ (circulo exterior gris) y el horizonte del agujero negro con pelo $\sqrt{\Omega(x_h)} = 0,009 AU$ (circulo interior negro). Las otras constantes están fijadas a $\bar{\mathcal{J}} = 2,6 \times 10^{-6} yr$, $\alpha = 1$, $\nu = 1,52$, $E = \bar{\mathcal{E}}^2 - 1$. En ambos casos el horizonte del caso con pelo es mucho más pequeño, porque el campo escalar permite la existencia de objetos mas compactos. Figura izquierda: Es una orbita abierta, una observación importante es que para la energía $E = \bar{\mathcal{E}}^2 - 1 = 0$ en el caso de Schwarzschild la orbita es parabólica y en el caso con pelo no hay este comportamiento. Figura derecha: Podemos observar una orbita periódica, es importante notar que las desviaciones por periodo no son constantes.	39

- 4.1.3. **Rama Negativa tipo tiempo (*time-like*)** En ambas figuras las partículas caen dentro del agujero negro. El horizonte del agujero negro con pelo es representado por el disco negro de radio $\sqrt{\Omega(x_h)} = 0,009 AU$, y para comparar representamos el agujero negro Schwarzschild por un disco gris de radio $r_h = \frac{2G_N M}{c^2} = 0,08 AU$. Observamos que las orbitas ingresan tangencialmente a el *hipotético* horizonte del agujero negro de Schwarzschild y de manera perpendicular al horizonte del agujero negro con pelo. Las constantes y parámetros son fijados a $\bar{J} = 2,6 \times 10^{-6} yr$, $\alpha = 1$, $\nu = 1,52$, $\eta = 12,527 AU^{-1}$, $E = \bar{\mathcal{E}}^2 - 1$. En ambas figuras encontramos un nuevo fenómeno muy interesante, en al región $\sqrt{\Omega} < r < r_h$ la geodésica cambia súbitamente cambiando su dirección a la de una caída libre dentro del agujero negro con pelo. Claramente la región de pelo denso $\sqrt{\Omega} < r < r_h$ es un lugar donde el campo escalar tiene una alta reacción de retroceso y podría ser la causa de este fenómeno. Este fenómeno no existe en el modelo de Schwarzschild. 40
- 4.1.4. **Rama positiva tipo tiempo (*time-like*)** En ambas gráficas el horizonte del agujero negro con pelo es representada por un disco negro de radio $\sqrt{\Omega(x_h)} = 0,006 AU$, y para comparar con el agujero negro de Schwarzschild esta representado por un agujero gris de radio $r_h = 2G_N M/c^2 = 0,08 AU$. Las constantes y parámetros están fijadas a $\bar{J} = 7 \times 10^{-7} yr$, $\alpha = -40$, $MG_N/c^2 = 0,04$, $\nu = 1,76$, $E = \bar{\mathcal{E}}^2 - 1$. En esta rama existe una orbita parabólica en $E = 0$ y las orbitas son cualitativamente similares a las de Kepler. 41
- 4.1.5. **Rama positiva tipo tiempo (*time-like*)** En ambas figuras hay partículas que caen dentro del agujero negro. El agujero negro con pelo esta representado por un disco negro de radio $\sqrt{\Omega(x_h)} = 0,006 AU$, y para poder comparar el agujero negro de Schwarzschild esta representado por un disco gris de radio $r_h = 2G_N M/c^2 = 0,08 AU$. Ambas figuras son partículas que caen dentro del agujero negro, observamos que las orbitas ingresan rápidamente al *e* horizonte agujero negro de Schwarzschild y casi de manera tangencial al horizonte del agujero negro con pelo. Las otras constante están fijadas a $\bar{J} = 7 \times 10^{-7} yr$, $\alpha = -40$, $MG_N/c^2 = 0,04$, $\nu = 1,76$, $E = \bar{\mathcal{E}}^2 - 1$, horizonte de Schwarzschild (gris), horizonte del caso con pelo (negro). 42
- 4.2.1. Tenemos la rama positiva (Gráfico izquierda) y la rama negativa (Gráfico derecha) del potencial efectivo V_{eff} . Los parámetros son descritos en la tabla (4.2.1). 43

4.2.2.Rama negativa nulas(*null*). Asumimos que el horizonte del agujero negro de Schwarzschild es $r_h = \frac{2G_N M}{c^2}$ (disco gris) y el horizonte del agujero negro con pelo es $\sqrt{\Omega(x_h)}$ (disco negro). Las otras constantes son fijadas a $\alpha = 1$, $M G_N / c^2 = 0,04$, $\nu = 1,52$. Figura izquierda: De acuerdo con la tabla (4.1.1) las geodésicas nulas *null* están definidas en la región-I, ver figura (a) (4.2.1), donde $\frac{c^2}{b^2} = 4,10496 \cdot 10^{11} \text{ yr}^{-2} > \mathcal{V}(x_0)$. Una partícula nula *null* cae dentro del agujero negro, observamos que la órbita es perpendicular al horizonte del agujero negro con pelo. Figura derecha: De acuerdo con la tabla (4.1.1) las geodésicas nulas *null* están definidas en la región-II, ver figura (a) (4.2.1), donde $\frac{c^2}{b^2} = 0,45611 \cdot 10^{11} \text{ yr}^{-2} < \mathcal{V}(x_0)$. Una partícula *null* es deflectada por el agujero negro con pelo. 44

4.2.3.Rama positiva (*null*) Asumimos que el horizonte del agujero negro Schwarzschild es $r_h = \frac{2GM}{c^2}$ (disco gris) y el horizonte del agujero negro con pelo es $\sqrt{\Omega(x_h)}$ (disco negro). Las otras constantes están fijadas a $\alpha = -40$, $M G_N / c^2 = 0,04$, $\nu = 1,76$. Figura izquierda: De acuerdo con la tabla (4.1.1) las geodésicas nulas (*null*) están definida en la región-I, ver figura (b) (4.2.1), donde $\frac{c^2}{b^2} = 4,56107 \cdot 10^{12} \text{ yr}^{-2} > \mathcal{V}(x_0)$. Una partícula *null* cae dentro del agujero negro, observamos que la órbita no es perpendicular al horizonte del agujero negro con pelo. Figura derecha: De acuerdo con la tabla (4.1.1) las geodésicas *null* están definida en la región-II, ver figura (b) (4.2.1), donde $\frac{c^2}{b^2} = 2,56560 \cdot 10^{12} \text{ yr}^{-2} < \mathcal{V}(x_0)$. Una partícula nula (*null*) es altamente deflectada. 45

4.3.1.Geodésicas del agujero negro con pelo cerca al horizonte. Aquí graficamos las geodésicas cerca al horizonte de la figura 4.1.3 (b) y la figura 4.2.2 (b), las cuales son nulas (*null*) y tipo tiempo (*time-like*) respectivamente. Aquí consideramos el momento angular por unidad de masa $\bar{\mathcal{J}} = 2,6 \times 10^{-6}$ y la masa del agujero negro $G_N M / c^2 = 0,04$. Para la geodésicas tipo timepo (*time-like*) consideramos $E = 0,1$ y para las geodésicas nulas (*null*) consideramos $b = 0,1$, $E = 0,1$. La línea negra define el horizonte del agujero negro de radio $r_h = 0,0192 \text{ AU}$. El agujero negro Schwarzschild tiene una geodésica que ingresa al agujero negro con cierto ángulo con respecto a la tangente del horizonte. En esta misma sección mostramos el caso con pelo cuyas geodésicas cruzan el horizonte con una forma ortogonal a este. 46

5.0.1.Geodésicas tipo tiempo (Time-Like): A la izquierda, la geodésica correspondiente al agujero negro sin pelo (ver figura 4.1.3) y, a la derecha, la geodésica correspondiente al agujero negro con pelo (ver figura 3.3.6). 47

5.0.2. Geodésicas nulas (Null): A la izquierda, la geodésica correspondiente al agujero negro sin pelo (ver figura 4.2.2) y, a la derecha, la geodésica correspondiente al agujero negro con pelo (ver figura 3.3.11).	48
5.0.3. Comportamiento de la partícula cerca del horizonte. Para más detalles, consultar la sección 4.3.1.	48

Capítulo 1

Matrices de Investigación

1.1. Matriz de Consistencia

Formulación del Problema	Formulación de Objetivos	Formulación de Hipótesis	Justificación	Metodología
¿Cómo afecta la zona de pelo denso de un agujero negro con potencial escalar a las geodésicas de partículas masivas y sin masa?	Calcular y analizar el comportamiento de las geodésicas para partículas masivas y sin masa alrededor de un agujero negro con un potencial escalar (pelo), especialmente en la zona de pelo denso entre el horizonte sin pelo y el horizonte con pelo.	La zona de pelo denso altera significativamente las trayectorias geodésicas, permitiendo inferir características del pelo a partir de las desviaciones observadas en las trayectorias.	Dado que el pelo no es medible experimentalmente, el análisis de las geodésicas permite deducir parámetros del pelo mediante observaciones indirectas de trayectorias geodésicas alrededor de agujeros negros con pelo.	No Experimental, Explicativa, con métodos numéricos para resolver ecuaciones de geodésicas mediante Runge-Kutta de cuarto orden y Newton-Raphson, usando Python y las librerías numpy y matplotlib para visualización.

1.2. Matriz de Instrumentos

Instrumento/Software	Descripción	Propósito en la Investigación	Técnicas Aplicadas
Python con <code>numpy</code> , <code>scipy</code> , <code>matplotlib</code>	Entorno de programación con librerías científicas y de visualización.	Calcular las trayectorias geodésicas mediante métodos numéricos y visualizar resultados.	Método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver ecuaciones diferenciales de las geodésicas; Newton-Raphson para resolver ecuaciones no lineales iterativamente.
Simulación Computacional	Modelado numérico de las trayectorias alrededor de agujeros negros con pelo.	Permitir el análisis de interacciones en la zona de pelo denso y su impacto en las trayectorias de partículas masivas y sin masa.	Simulación de trayectorias y visualización de patrones de desviación.

1.3. Matriz de Operacionalización de Variables

Variable	Definición Conceptual	Definición Operacional	Indicador	Instrumento de Medición
Geodésicas	Trayectorias seguidas por partículas en el espacio-tiempo curvado alrededor de un agujero negro.	Geodésicas para partículas masivas (time-like) y sin masa (null-like) calculadas mediante simulación numérica.	Trayectoria de las partículas en las cercanías del agujero negro, particularmente en la zona de pelo denso.	Simulación en Python con <code>numpy</code> y <code>scipy</code> .
Zona de Pelo Denso	Región entre el horizonte sin pelo y el horizonte de sucesos modificado en presencia de un campo escalar.	Área de análisis entre el horizonte clásico y el horizonte con pelo.	Comportamiento de las geodésicas en esta región.	Simulación computacional de las trayectorias y visualización con <code>matplotlib</code> .
Parámetros del Pelo	Características no observables directamente que afectan la curvatura y las geodésicas en el espacio-tiempo del agujero negro.	Parámetros inferidos a partir de las desviaciones en las trayectorias de las partículas.	Ajustes en las trayectorias que sugieren la presencia de pelo en el agujero negro.	Comparación de patrones en simulaciones con diferentes configuraciones.

Capítulo 2

Introducción

El estudio de muchos cuerpos interactuantes entre sí siempre ha sido difícil. Sin embargo, podemos idear métodos para estudiar estos cuerpos de manera global. Por ejemplo se puede formular un potencial que representa la interacción de todos estos cuerpos. Entonces podemos incluir este potencial a un agujero negro y entender cómo cambiaría el espacio-tiempo con la presencia de este potencial que representa a un campo escalar. Y cómo son las geodésicas en este nuevo espacio-tiempo deformado con el campo escalar y el agujero negro.

2.1. Planteamiento del Problema

Los agujeros negros con pelo fueron extensivamente estudiados en Anabalón and Astefanesei (2013); Aceña et al. (2014). Las soluciones que usaremos pueden evadir el teorema de no pelo Hertog (2006), y la estabilidad de los agujeros negros con pelo presentados esta asegurado por su potencial escalar y sus puntos extremos. Una importante motivación del estudio de estos agujeros negros con pelo es la construcción de modelos de juguete para agujeros negros super masivos, como Sagitarius A. Esta familia de soluciones tiene un radio de horizonte r_h que es completamente diferente del radio de Schwarzschild $2MG_N/c^2$, es más, podemos probar que $r_h \leq 2MG_N/c^2$. Entonces existe una región $\mathcal{D} \equiv 2MG_N/c^2 - r_h$ que llamamos zona de pelo denso. Esta región podría tener un importante efecto sobre las geodésicas dado que afecta notablemente su trayectoria comparada con agujero negro sin pelo.

2.2. Formulación del Problema

¿La zona de pelo denso de un agujero negro afecta a sus geodésicas?

2.3. Objetivo

Realizar gráficas de las geodésicas de los agujeros negros con pelo para el estudio de su comportamiento en la zona de pelo denso. Seguidamente comparar las geodésicas de agujeros negros con pelo con un agujero negro tipo Schwarzschild. Estas gráficas se realizarán usando métodos numéricos y paquetes de Python.

2.4. Justificación

En Nunez et al. (1996) se propone la conjetura de una zona de pelo denso o hairysphera, entonces estudiar estos agujeros negros ayudará a poder resolver esta conjetura y entender cual es el impacto de esta zona sobre las geodésicas de los agujeros negros con pelo.

2.5. Limitaciones

Dado que las ecuaciones son totalmente no lineales podríamos encontrar dificultades en la gráfica de estas geodésicas. Además, los parámetros a fijar son varios, y al fijar cada uno de estos parámetros se obtiene un agujero negro diferente lo cual hace prácticamente imposible estudiar todos los agujeros negros.

2.6. Delimitaciones

Son muchos agujeros negros por lo que no podremos estudiarlos todos y nos centraremos en aquellos en los cuales la presencia de una zona de pelo denso tenga mayor efecto.

Tipo de Agujero Negro	Referencia
Schwarzschild	Schwarzschild (1916)
Reissner–Nordström	Reissner (1916); Weyl (1917); Nordström (1918); Jeffery (1921)
Kerr	Kerr (1963)
Kerr-Newman	Newman and Janis (1965); Newman et al. (1965)
Agujeros Negros con Pelo	Anabalon and Astefanesei (2014); Anabalón et al. (2018); Anabalon and Oliva (2012); Anabalon et al. (2016a)

Cuadro 2.6.1: Tipos de Agujeros Negros

Capítulo 3

Marco Teórico

3.1. Relatividad General

El 5 de Julio de 1687 Isaac Newton publica *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* Newton (1687) en donde publica sus leyes del movimiento y su ley de gravitación universal. Esta ley de gravitación fue la primera descripción matemática a partir de la cuál podíamos tener ecuaciones de movimiento para predecir el movimiento de los planetas. Sin embargo, esta descripción de la naturaleza aún estaba incompleta. Una de las limitantes de la descripción de las interacciones según Newton es la velocidad de interacción infinita. Esto se puede ver claramente en al expresión matemática de la fuerza de interacción gravitacional, esta solo depende de las masas y la distancia entre ellas.

$$\vec{F} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r} \quad (3.1.1)$$

Esta velocidad de interacción infinita rompería la causalidad ya que se propagaría más rápido que la luz. Es así que en 1905 Albert Einstein propone su teoría de la relatividad especial Einstein (1905). En esta nueva teoría se abandona la idea de tiempo absoluto y se adopta la de tiempo propio, es decir que cada observador mide el tiempo de manera diferente, tiene su propio tiempo. Además de que el tiempo y el espacio ya no son entes separados por lo que se les llama en conjunto espacio - tiempo.

Desafortunadamente cuando la interacción gravitaría se vuelve importante la

relatividad especial falla al tratar de describir la realidad Thorne (1994a). Es entonces que para poder describir la gravedad, con las características ya agregadas por la relatividad especial, se necesita de un nuevo conjunto de leyes físicas que llamamos Relatividad General. En esta descripción el espacio - tiempo se curva y esta curvatura es lo que nosotros interpretamos como la interacción gravitacional. Poniendo el ejemplo de un ser bidimensional que vive en la superficie de una esfera y coordina con otro para ubicarse en el ecuador y caminar en línea recta, siempre manteniendo un ángulo de 90 grados sexagesimales entre sus trayectorias, estos notarían que a medida que caminan se van acercando uno al otro. Entonces estos seres bidimensionales interpretarían esto como una fuerza que los atrae, cuando más bien es la geometría en donde viven que les hace seguir esa trayectoria.

Para poder describir todos estos conceptos en espacios curvos necesitamos herramientas matemáticas tales como cálculo tensorial y geometría diferencial.

3.1.1. Geometría Diferencial

3.1.1.1. Variedades

Cuando el ser bidimensional que poníamos en un ejemplo anterior quiere poder mapear toda su superficie este podría pensar en caracterizarlo con 2 números. Sin embargo al hacer esto se perderían características globales y por lo tanto estaría cometiendo una grave equivocación. Es por eso que necesitamos de un objeto matemático que localmente luzca como un espacio \mathbb{R}^n pero que globalmente tenga unas propiedades ligeramente distintas.

Variedad Una variedad real, C^∞ , de n dimensiones \mathcal{M} . Es un conjunto junto con una colección de subconjuntos $\{O_\alpha\}$ que satisfacen las siguientes propiedades.

- Cada punto $p \in \mathcal{M}$ está dentro de al menos un O_α , es decir que $\{O_\alpha\}$ recubre todo \mathcal{M} .
- Para cada α , existe mapa uno a uno $\psi_\alpha : O_\alpha \rightarrow U_\alpha$, donde U_α es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .
- Si dos conjuntos O_α y O_β se superponen, $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, podemos considerar el mapa $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ la cuál toma puntos en $\psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subset$

$$U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ a puntos en } \psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

Vector Un vector es aquel elemento que cumple las propiedades de un espacio vectorial. Los espacios vectoriales que veremos son espacios tangentes a un punto p y cumplen que: Sea \mathcal{M} una variedad n -dimensional, sea $p \in \mathcal{M}$ y denotemos por V_p al espacio tangente en p . Entonces $\dim V_p = n$.

Tensor Un tensor es un mapa multilinear (lineal en cada variable) de vectores (o vectores duales) en números. Es decir que mapeamos todos los vectores en números escalares ordenados (este orden puede ser matricialmente). O de manera mas formal, sea V un espacio vectorial finito dimensional y sea V^* el espacio vectorial dual² de V . Un tensor, T , de tipo (k, l) sobre V es un mapa multilinear.

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.1.2)$$

Métrica Intuitivamente una métrica nos indica la distancia al cuadrado infinitesimal asociado con un desplazamiento infinitesimal. Los desplazamientos infinitesimales están asociados con los vectores del plano tangente por lo que la métrica debe ser un mapa lineal de $V_p \times V_p$ en números, esto es un tensor de tipo $(0, 2)$. Las propiedades que tiene este tensor son:

Simétrico La distancia debe ser simétrica, esto es $g(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = g(\vec{v}_2, \vec{v}_1)$; $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_p$.

No degenerada El valor de la métrica debe ser igual para todo observador, esto es

$$g(\vec{v}, \vec{v}_1) = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_1 = 0 ; \vec{v}_1, \vec{v} \in V_p$$

En otras palabras la métrica es un producto interno del espacio tangente en cada punto, y no está definida positiva necesariamente. En una base coordenada podemos expandir la métrica en términos de sus componentes $g_{\mu\nu}$ (ver A3).

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.1.3)$$

¹Cada mapa ψ_α es generalmente llamado un sistema de coordenadas porque pasas de un plano tangente a otro plano tangente

²Este espacio vectorial dual V^* tiene la característica que sea v_1, \dots, v_n la base de V , y sea v^1, \dots, v^n la base de V^* . Entonces $v^{\mu*}(v_\nu) = \delta_\nu^\mu$, donde $\delta_\nu^\mu = 1$ si $\mu = \nu$ y 0 en los otros casos.

En la escritura de las ecuaciones se ha seguido unas reglas de notación, eso se ve a mayor detalle en A3.

3.1.1.2. Curvatura

Como pudimos ver en 3.1.1.1 los vectores están definidos en los espacios tangentes y cotangentes a la variedad. Entonces para poder relacionar vectores de diferentes espacios tangentes necesitamos de una conexión. En relatividad general se usa la conexión de Levi-Civita. Esta conexión es especial ya que el espacio - tiempo no tendrá torsión y solo presentará curvatura.

La derivada de un vector, en coordenadas cuyos vectores base son constantes, es otro vector. Y el mapeo de las derivadas de sus componentes conforman un tensor. Esto no sucede así para coordenadas curvilíneas o espacios curvos, en este caso necesitamos de un factor extra que compense la curvatura. Este factor extra son los símbolos de Christoffel, por lo tanto, tenemos

$$\nabla_{\nu} A^{\mu} = \partial_{\nu} A^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} A^{\rho} \quad (3.1.4)$$

a esta derivada se le conoce como derivada covariante. También por la conexión de Levi-Civita los símbolos de Christoffel cumple con lo siguiente.

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \Gamma_{\rho\nu}^{\mu} \quad (3.1.5)$$

Y la derivada covariante cumple con

$$\nabla_{\nu} g_{\mu\nu} = 0 \quad (3.1.6)$$

de esta expresión se puede deducir que

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_{\nu} g_{\rho\sigma} + \partial_{\rho} g_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\nu\rho}) \quad (3.1.7)$$

A partir del operador de derivada nosotros podemos introducir la noción de transporte paralelo de un vector sobre la curva C . Para que este transporte paralelo se dé, la variación de este vector debe ser paralela al vector tangente de

la curva C , esto es:

$$t^a \nabla_a v^b = 0 \quad (3.1.8)$$

Ahora el espacio en el que trabajamos normalmente en relatividad general esta libre de torsión, esto quiere decir que si una función escalar f la variamos en cierto orden $\nabla_a \nabla_b f$ esta será igual al hacerlo en orden invertido, esto es:

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f \quad (3.1.9)$$

sin embargo si nosotros hacemos esto para el dual de un campo vectorial esto no sucede, por lo que tenemos que $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c$ no es igual a cero y lo que sucede es que a $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)$ define un mapeo lineal de vectores duales ω_c de tipo (0,1) a un tensor de tipo (0,3). Esto es equivalente a la acción de un tensor (1,3) sobre el tensor (0,1). Este tensor que cumple estas características, es el tensor de *curvatura de Riemann* $R_{abc}{}^d$. Esto es:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d \quad (3.1.10)$$

Ahora veamos las propiedades del tensor de Riemann:

1. Antisimetría en los 2 primeros índices:

$$R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d \quad (3.1.11)$$

2. Propiedad equivalente en formas diferenciales a $d^2 \vec{\omega}$:

$$R_{[abc]}{}^d = 0 \quad (3.1.12)$$

3. Antisimetría de los 2 últimos índices:

$$R_{abcd} = -R_{abdc} \quad (3.1.13)$$

4. Identidad de Bianchi:

$$\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0 \quad (3.1.14)$$

5. De 1 a 3 se puede deducir

$$R_{abcd} = R_{cdab} \quad (3.1.15)$$

Es útil descomponer al tensor de Riemann en la parte con traza y la parte libre de traza. Por (3.1.11) y (3.1.13) la traza sobre los 2 primeros o 2 últimos índices es cero. Sin embargo, la traza sobre el segundo y cuarto índice que es equivalente a la traza sobre el primer y tercer índice (esto también por (3.1.11) y (3.1.13)) define el tensor de *Ricci*, R_{ac} .

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b \quad (3.1.16)$$

de (3.1.15) encontramos la siguiente propiedad para el tensor de Ricci

$$R_{ac} = R_{ca} \quad (3.1.17)$$

Finalmente podemos definir la traza del tensor de Ricci como la *Curvatura Escalar*.

$$R = R_a{}^a \quad (3.1.18)$$

y la parte libre de traza es llamada *tensor de Weyl*.

3.1.1.3. Geodésicas

Usando la descripción Newtoniana de la gravedad se pueden describir las trayectorias de los cuerpos dentro de un campo gravitacional. Estas trayectorias son cónicas, dependiendo de la energía de la partícula serán elípticas, circulares o parabólicas Landau and Lifshitz (1976).

En relatividad general a estas trayectorias se les llama geodésicas. Existen 2 tipos de geodésicas, las métricas y las afines. Sin embargo, en la teoría que estudiare ambas son indiferentes. Por lo que de manera general podemos definir a las geodésicas de la siguiente manera.

Geodesicas: La curva que minimiza la distancia entre 2 puntos y cuyo vector tangente se propaga paralelamente sobre si mismo. Esto quiere decir que cumple con la ecuación.

$$T^a \nabla_a T^b = 0 \quad (3.1.19)$$

donde $T^a = \frac{dx^a}{dt}$. Entonces podemos expresar (3.1.19) desarrollando la derivada covariante.

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \sum_{\sigma, \nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0 \quad (3.1.20)$$

Esta ecuación es una ecuación de segundo orden, por lo que para poder resolverla necesitaremos 2 parámetros iniciales. Esta ecuación para la geodésica también puede ser obtenida variando el siguiente lagrangiano.

$$\mathcal{L} = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{dt} \frac{dx^{\nu}}{dt} \quad (3.1.21)$$

Sin embargo podemos encontrar las ecuaciones de movimiento de otra manera. Para las partículas tipo tiempo (“*timelike*”) $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ donde τ es el tiempo propio y para las partículas nulas (“*null*”) $ds^2 = 0$ donde κ es el parámetro afín. Entonces podemos formular la siguiente ecuación para las partículas *timelike*

$$-c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.1.22)$$

y para las partículas nulas (*null*)

$$0 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.1.23)$$

Por lo que reemplazando el valor de la métrica tenemos una ecuación de movimiento para la partícula.

3.2. Acción de Hilbert Einstein

Siguiendo la formulación lagrangiana de la ecuación de Einstein tenemos la acción.

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{c^4}{16\pi G_N} R + \mathcal{L}_M \right) \quad (3.2.1)$$

variando la acción tenemos

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{c^4}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}} d^4x [\delta(\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}\delta R] + \int_{\mathcal{M}} d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) = 0 \\ \delta S &= \frac{c^4}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} \right) R \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{-g}(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) \right] + \int_{\mathcal{M}} d^4x \left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} \right) = 0 \\ \frac{c^4}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}} d^4x \left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu} - \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} &= 0\end{aligned}\quad (3.2.2)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu}\quad (3.2.3)$$

donde hemos definido el tensor de energía momentum como

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}\quad (3.2.4)$$

En (3.2.3) tenemos en total un conjunto de 16 ecuaciones que relacionan al espacio tiempo $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ con la energía y materia $T_{\mu\nu}$.

3.3. Agujeros Negros

La primera idea de un agujero negro fue propuesta en 1783 por John Michell, un filósofo natural británico (como se llamaba entonces a los científicos). Michell sugirió la existencia de un cuerpo tan masivo que, según la teoría corpuscular de la luz de Newton, impediría incluso que la luz escapara de su atracción gravitatoria; a estos objetos los denominó *estrellas oscuras* Thorne (1994b). Esta idea, sin embargo, fue eventualmente olvidada, ya que la teoría ondulatoria de la luz propuesta por Christiaan Huygens se adoptó poco después. La idea de los agujeros negros resurgiría más de un siglo después, con la primera solución a las ecuaciones de campo de Einstein.

3.3.1. Solución de Schwarzschild

Cuando Einstein propuso (3.2.3) las consideró muy difíciles de resolver de manera analítica. Sin embargo en 1916, tan solo un año después, el físico Karl Schwarzschild encontró una solución analítica a la ecuación de Einstein. Esto lo logro igualando el tensor de energía momentum a 0, $T_{\mu\nu} = 0$, encontrando así la siguiente métrica.

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2G_N M}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2G_N M}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.3.1)$$

Donde M es la masa del cuerpo que crea el campo. Esta métrica tiene algunas propiedades como: simetría esférica y estática. Otra cosa que renombrar es que si $r = 2G_N M/c^2$ tenemos una singularidad en la coordenada temporal y en la coordenada espacial la componente se hace infinita. Esto no es un problema del sistema físico, sino que las coordenadas que escogimos no son las adecuadas para este sistema. Esta solución representa a una masa esférica perfectamente simétrica que en las coordenadas que usamos podemos definir un horizonte de sucesos justamente en $r = 2G_N M/c^2$, a este valor especial de r se le llama “*radio de Schwarzschild*” y al cuerpo masivo que genera esta métrica se le llama “*Agujero negro de Schwarzschild*”. Por la simetría esférica podemos escoger $\theta = \pi/2$, sin perdida de generalidad y reemplazando $2G_N M/c^2$ por r_g tenemos

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (3.3.2)$$

reemplazando el valor de la métrica en (3.1.22) tenemos

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (3.3.3)$$

de donde tenemos que

$$1 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{r^2}{c^2} \dot{\varphi}^2$$

Usando las cantidades conservadas gracias a los vectores killing hallados en A5 tenemos

$$1 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right]^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{r^2}{c^2} \left[\frac{\mathcal{J}}{mr^2} \right]^2 \quad (3.3.4)$$

$$1 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{\mathcal{E}^2}{m^2 c^4} - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{r^2 \mathcal{J}^2}{c^2 m^2 r^4} \quad (3.3.5)$$

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) = \frac{\mathcal{E}^2}{m^2 c^4} - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 m^2 r^2} \quad (3.3.6)$$

$$\frac{\mathcal{E}^2}{m^2 c^4} = \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 m^2 r^2}\right) \quad (3.3.7)$$

renombrando algunas variables para hacer la energía por partícula al igual que el momentum angular por partícula.

$$E = \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2 \quad (3.3.8)$$

$$J = \frac{\mathcal{J}}{mc^2} \quad (3.3.9)$$

con estos cambios las unidades también cambian, siendo así E no tiene dimensiones y J unidades de tiempo. También desplazare el valor cero de la energía para que se pueda visualizar mejor en los gráficos $E' = E - 1$. entonces tenemos

$$E' = \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{J^2 c^2}{r^2}\right) - 1 \quad (3.3.10)$$

Para el caso de partículas nulas (*null*) reemplazamos la métrica en (3.1.23) y también usamos los killing de A5 teniendo

$$0 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right]^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{r^2}{c^2} \left[\frac{\mathcal{J}}{mr^2} \right]^2 \quad (3.3.11)$$

$$0 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{\mathcal{E}^2}{m^2 c^4} - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{r^2 \mathcal{J}^2}{c^2 m^2 r^4} \quad (3.3.12)$$

$$0 = \frac{\mathcal{E}^2}{m^2 c^4} - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 m^2 r^2} \quad (3.3.13)$$

$$\frac{\mathcal{E}^2}{m^2 c^4} = \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 m^2 r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad (3.3.14)$$

$$c^2 \frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{J}^2} = \dot{r}^2 \frac{c^4 m^2}{\mathcal{J}^2} + \frac{c^4}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad (3.3.15)$$

quedando entonces la expresión para la energía

$$E = \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{J^2 c^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad (3.3.16)$$

3.3.2. Potencial efectivo de Schwarzschild

Buscando hacer un símil con la mecánica clásica podemos identificar un potencial efectivo para una partícula tipo tiempo (*timelike*) en (3.3.10)

$$U_{eff}^{tl} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{J^2 c^2}{r^2}\right) - 1 \quad (3.3.17)$$

entonces fijando M y J podemos graficar este potencial.

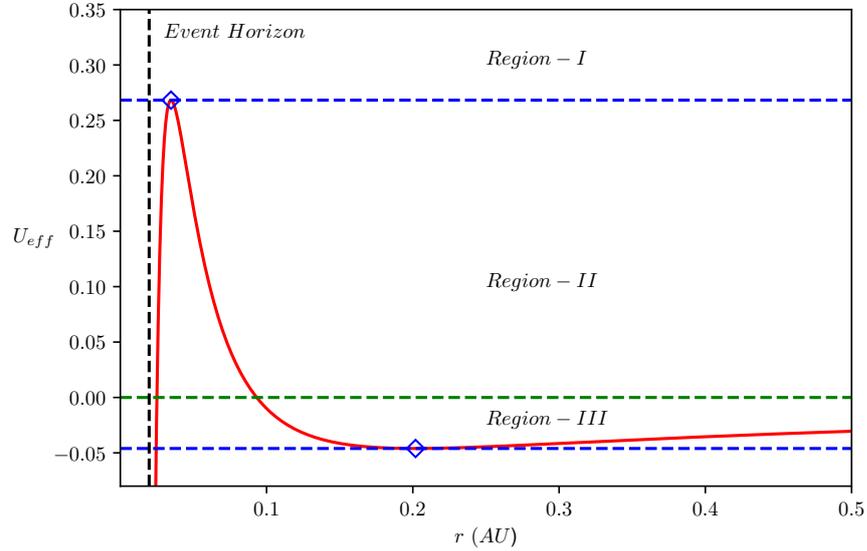
Región I: Donde $E > U_{eff}^{max}$; corresponden a geodésicas cuyas partículas tienen mucha energía por lo que caerán al agujero negro.

Región II: Entre $E = 0$ y $E = U_{eff}^{max}$; corresponden a geodésicas cuyas partículas se encuentran con una barrera de potencial, por lo que se acercaran al agujero negro mas no caerán dentro de él.

Región III: Entre $E = U_{eff}^{min}$ y $E = 0$; corresponden a geodésicas cuyas partículas se encuentran atrapadas por el potencial efectivo, por lo que orbitarán al agujero negro.

De la misma manera que analizamos para una partícula *timelike* podemos realizar un procedimiento similar para una partícula nula (*null*) en la ecuación (3.3.16)

Figura 3.3.1: Fijando $M = 10^6 M_\odot$ y $J^2 = \frac{24M^2 G_N^2}{c^6}$ podemos identificar 3 regiones. Cada región define un tipo distinto de geodésica.



podemos identificar un potencial efectivo nulo (*null*)

$$\mathcal{V}_{eff} = \frac{J^2 c^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad (3.3.18)$$

entonces solamente fijando M podemos graficar el potencial por unidad de J^2 ³.

³Dividimos el potencial por J^2 ya que en la ecuación de la geodésica esta constante es absorbida por el parámetro de impacto.

Figura 3.3.2: E_1 corresponde al valor mínimo del potencial efectivo (punto de equilibrio estable), por este motivo corresponde a una órbita circular estable. E_2 pertenece a la Región III. E_3 pertenece a la Región II. E_4 corresponde al valor máximo del potencial efectivo (punto de equilibrio inestable), por este motivo corresponde a una órbita circular inestable. E_5 pertenece a la Región I.

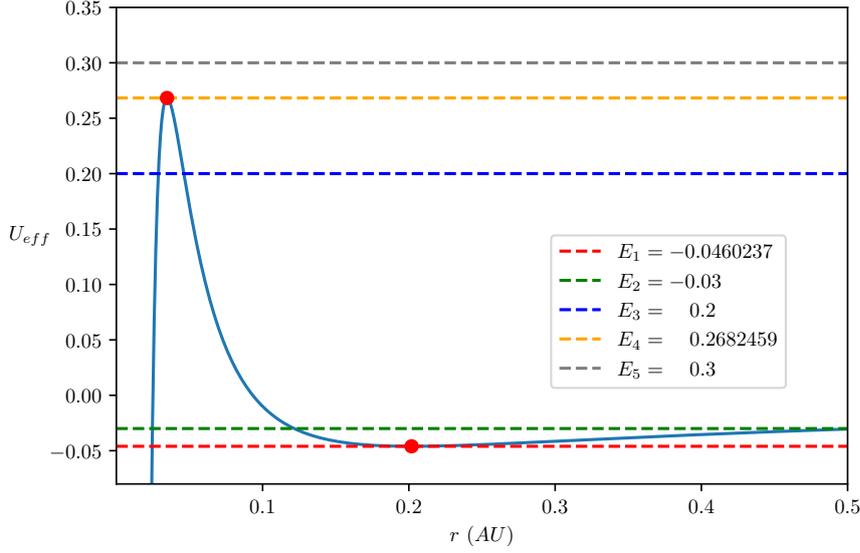
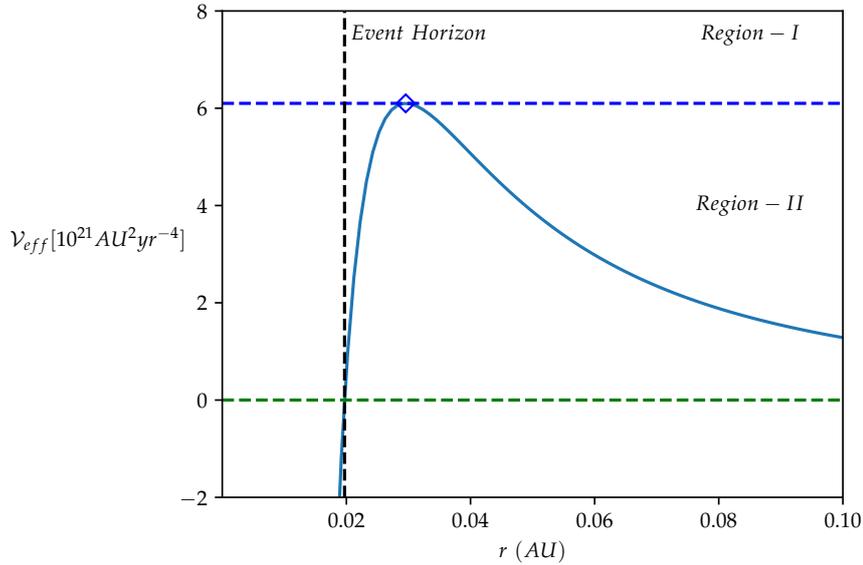


Figura 3.3.3: Fijando $M = 10^6 M_\odot$ podemos identificar 2 regiones. Cada región define un tipo distinto de geodésica.

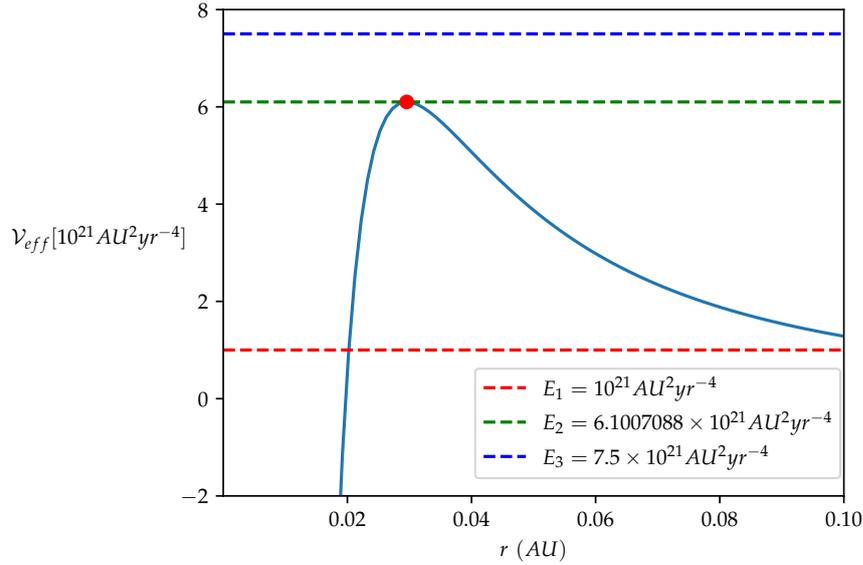


Región I: Donde $E > \mathcal{V}_{eff}^{max}$; corresponden a geodésicas cuyas rayos de luz que tienen mucha energía por lo que caen al agujero negro.

Región II: Entre $E = 0$ y $E = \mathcal{V}_{eff}^{max}$; corresponden a geodésicas cuyas rayos de luz se

encuentran con una barrera de potencial, por lo que se acercan al agujero negro mas no caen dentro de él (deflexión de la luz).

Figura 3.3.4: E_1 pertenece a la Región II. E_2 corresponde al valor máximo del potencial efectivo (punto de equilibrio inestables), por este motivo corresponde a una órbita circular inestable. E_3 pertenece a la Región I.



3.3.3. Geodésicas de Schwarzschild

Para hallar las geodésicas tenemos que retomar (3.3.10), aplicar la regla de la cadena $\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau}$ y tenemos

$$E = \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{c^2} + \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left(1 + \frac{J^2 c^2}{r^2} \right) - 1$$

$$E = \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{J^2 c^2}{r^4} + \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left(1 + \frac{J^2 c^2}{r^2} \right) - 1$$

haciendo un cambio de variable $u(\varphi) = 1/r(\varphi)$, entonces $du/d\varphi = -u^2 dr/d\varphi$, tenemos

$$E = \left(-u^{-2} \frac{du}{d\varphi} \right)^2 J^2 c^2 u^4 + (1 - r_g u) (1 + J^2 c^2 u^2) - 1$$

$$E = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 J^2 c^2 + (1 - r_g u)(1 + J^2 c^2 u^2) - 1 \quad (3.3.19)$$

derivando esta ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= 2\left(\frac{du}{d\varphi}\right) \frac{d^2 u}{d\varphi^2} J^2 c^2 + \left(-r_g \frac{d\varphi}{du}\right) (1 + J^2 c^2 u^2) + (1 - r_g u) \left(2J^2 c^2 u \frac{d\varphi}{du}\right) \\ 0 &= \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \left[2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2} J^2 c^2 - r_g (1 + J^2 c^2 u^2) + 2J^2 c^2 u (1 - r_g u)\right] \\ 0 &= \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \left[2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2} J^2 c^2 - r_g - 3r_g J^2 c^2 u^2 + 2J^2 c^2 u\right] \end{aligned}$$

de donde $du/d\varphi = 0$ es una solución trivial y solo se da en ciertas partes de la geodésica. Por lo que igualar el otro factor a 0 nos da las soluciones más completas.

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2} J^2 c^2 - r_g - 3r_g J^2 c^2 u^2 + 2J^2 c^2 u \\ 0 &= \frac{d^2 u}{d\varphi^2} - \frac{r_g}{2J^2 c^2} - \frac{3}{2} r_g u^2 + u \end{aligned}$$

renombrando las constantes en una sola $\lambda = \frac{2J^2 c^2}{r_g}$, tenemos la ecuación para las geodésicas de Schwarzschild

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} - \frac{3}{2} r_g u^2 + u = \frac{1}{\lambda} \quad (3.3.20)$$

resolviendo esta ecuación mediante Runge-Kutta (ver A7) y con las condiciones iniciales adecuadas obtenemos los siguientes gráficos.

Figura 3.3.5: Podemos ver las 2 órbitas circulares, en rojo la órbita estable y en azul la órbita inestable. Son las únicas órbitas circulares que existen. Y en gris el agujero negro. Condiciones iniciales (curva roja): $r_0 = r_*^+$ y $\dot{r}_0 = 0$. Condiciones iniciales (curva azul): $r_0 = r_*^-$ and $\dot{r}_0 = 0$.

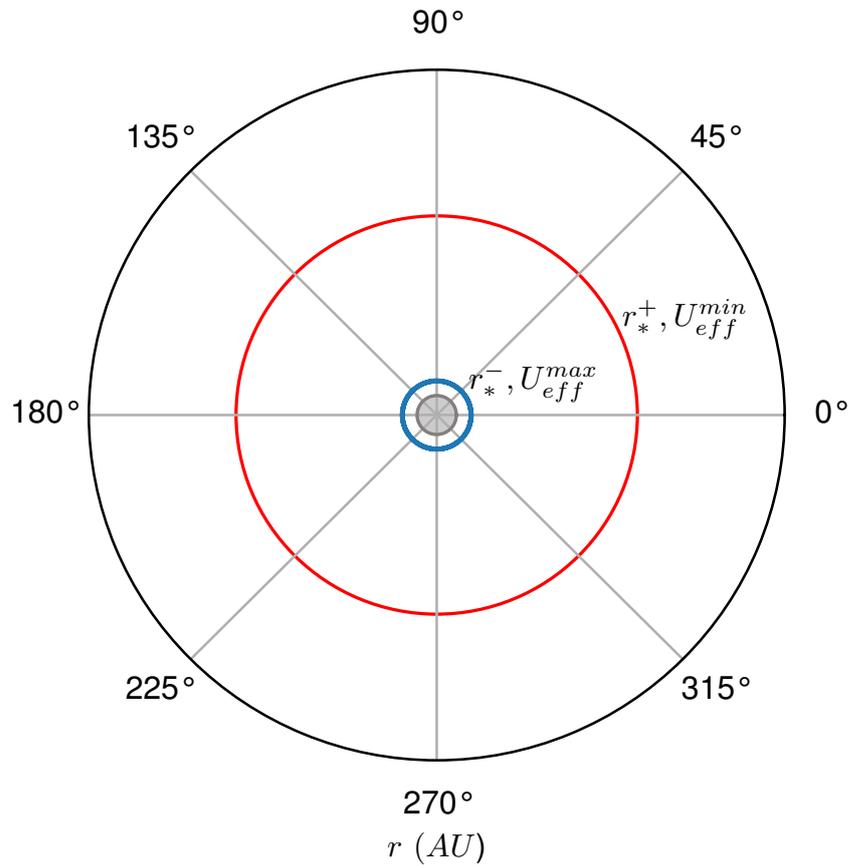


Figura 3.3.6: Podemos ver una geodésicas que cae dentro del agujero negro (Región - I), algo a notar es que su caída no es perpendicular al horizonte de eventos. Y en gris el agujero negro. Condiciones iniciales: $r_0 \rightarrow \infty$ y $\dot{r}_0 = \sqrt{Ec^2}$.

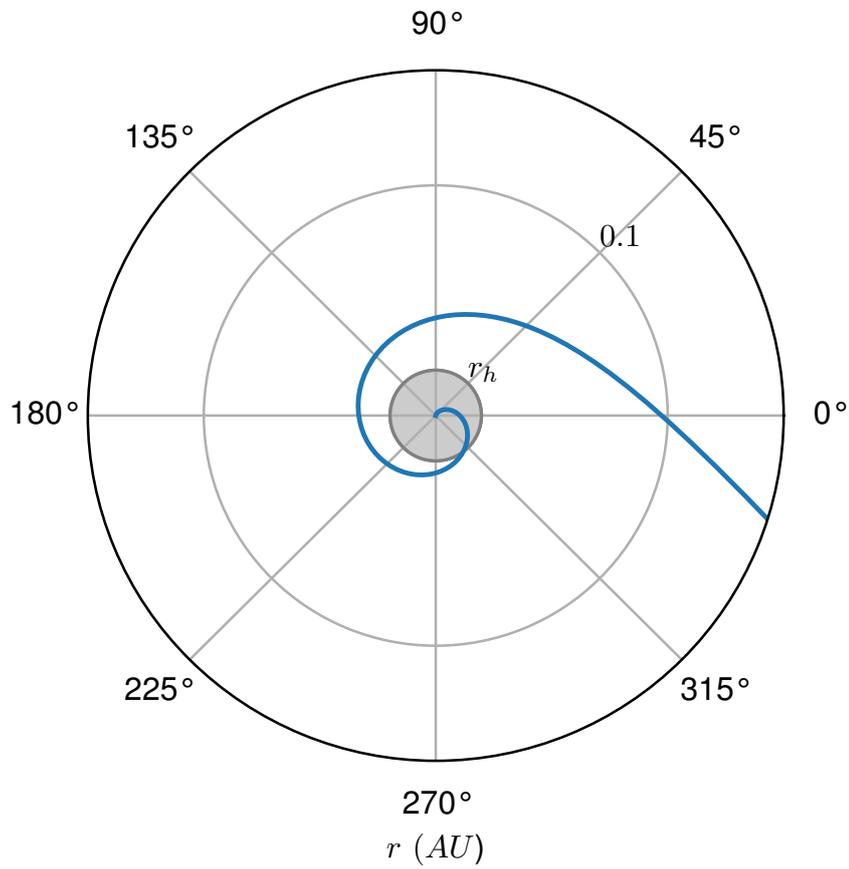


Figura 3.3.7: Podemos observar una geodésica que solo se acerca al agujero (curva azul), mas no lo orbita (Región - II). Agrego la curva roja para referencia, $r = 0,04613484978865398 AU$. Condiciones iniciales: $r_0 \rightarrow \infty$ y $\dot{r}_0 = \sqrt{Ec^2}$

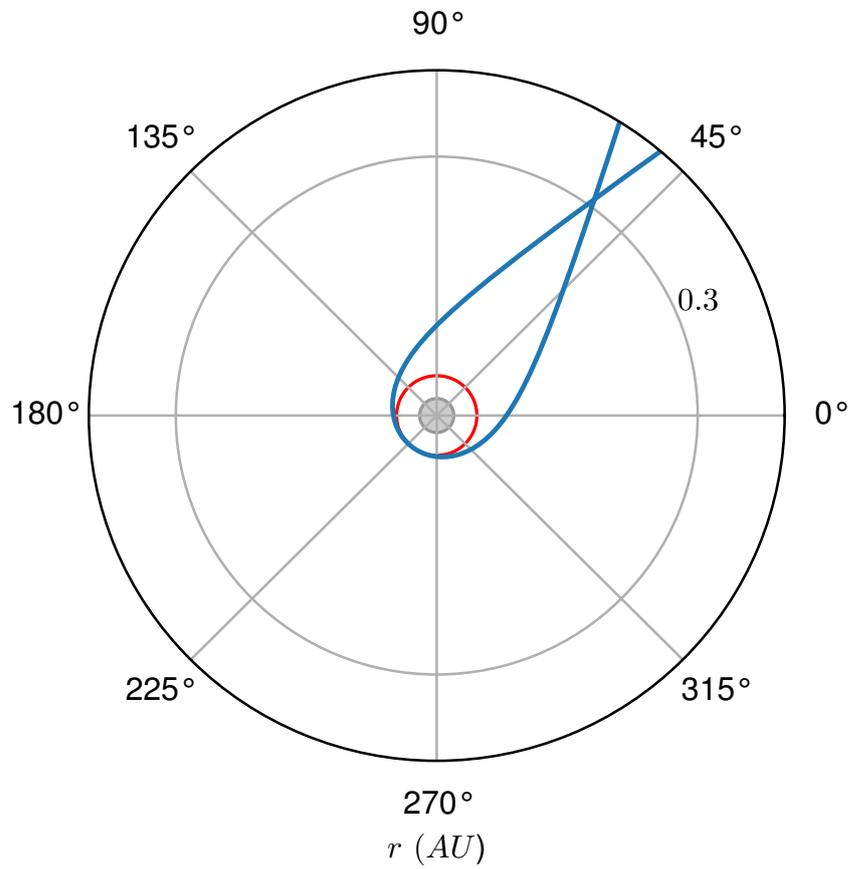
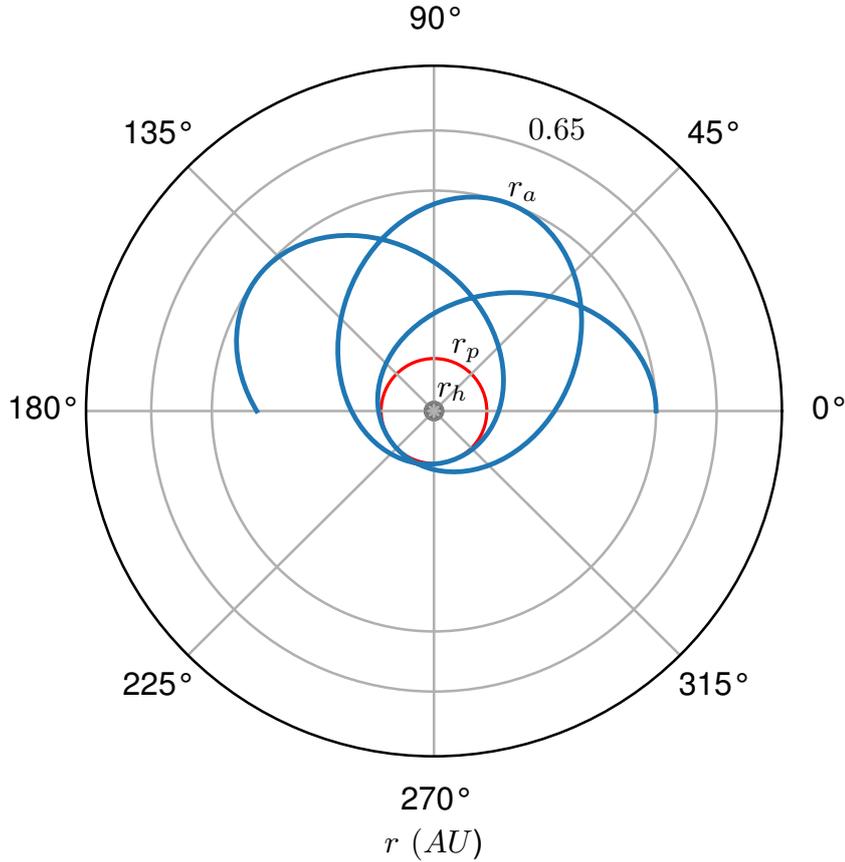


Figura 3.3.8: Podemos observar una geodésica orbital al agujero (curva azul) esto quiere decir que se ubica en la Región - III. Agrego la curva roja para referencia, $r_p = 0,12158224399382238$ AU y $r_h = r_g$. Condiciones iniciales: $r_0 = 0,5106936776245934$ AU y $E' = -0,03$



todos estos gráficos corresponden a partículas tipo tiempo (*timelike*). Ahora de la ecuación (3.3.16) podemos usar la regla de la cadena $\frac{dr}{d\kappa} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\kappa}$ y tenemos

$$c^2 \frac{E^2}{J^2} = \dot{r}^2 + \frac{c^4}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$$

$$c^2 \frac{E^2}{J^2} = \left(\frac{dr}{d\varphi} \frac{c^2}{r^2}\right)^2 + \frac{c^4}{r^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$$

en el caso de partículas nulas (*null*) tenemos que

$$b \equiv \frac{J}{E} \tag{3.3.21}$$

donde b es el parámetro de impacto (esto debido a las definiciones de \mathcal{J} y \mathcal{E}). Con estos cambios tenemos

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^4}{b^2 c^2} - r^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad (3.3.22)$$

haciendo nuevamente el cambio de variable $u(\varphi) = 1/r(\varphi)$ y $du/d\varphi = -u^2 dr/d\varphi$, tenemos

$$\begin{aligned} \left(-\frac{du}{d\varphi} u^{-2}\right)^2 &= \frac{1}{u^4 b^2 c^2} - \frac{1}{u^2} (1 - ur_g) \\ \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 u^{-4} &= \frac{1}{u^4 b^2 c^2} - \frac{1}{u^2} (1 - ur_g) \\ \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{1}{b^2 c^2} - u^2 (1 - ur_g) \\ \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{1}{b^2 c^2} - u^2 + u^3 r_g \end{aligned}$$

derivando esta ecuación

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{du}{d\varphi}\right) \frac{d^2 u}{d\varphi^2} &= -2u \frac{du}{d\varphi} + 3u^2 \frac{du}{d\varphi} r_g \\ 0 &= \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \left[2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + 2u - 3u^2 r_g\right] \end{aligned}$$

al igual que en el caso tipo tiempo (*timelike*) igualamos el segundo factor a 0, esto es

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} - \frac{3}{2} r_g u^2 + u = 0 \quad (3.3.23)$$

resolviendo esta ecuación mediante Runge-Kutta (ver A7) y con las condiciones iniciales adecuadas obtenemos los siguientes gráficos.

Figura 3.3.9: Podemos observar una geodésica que solo se acerca al agujero (curva azul), mas no lo orbita (Región - II). Condiciones iniciales: $E = E_1 = 10^{21} AU^2 yr^{-4}$ y $r_0 \rightarrow \infty$.

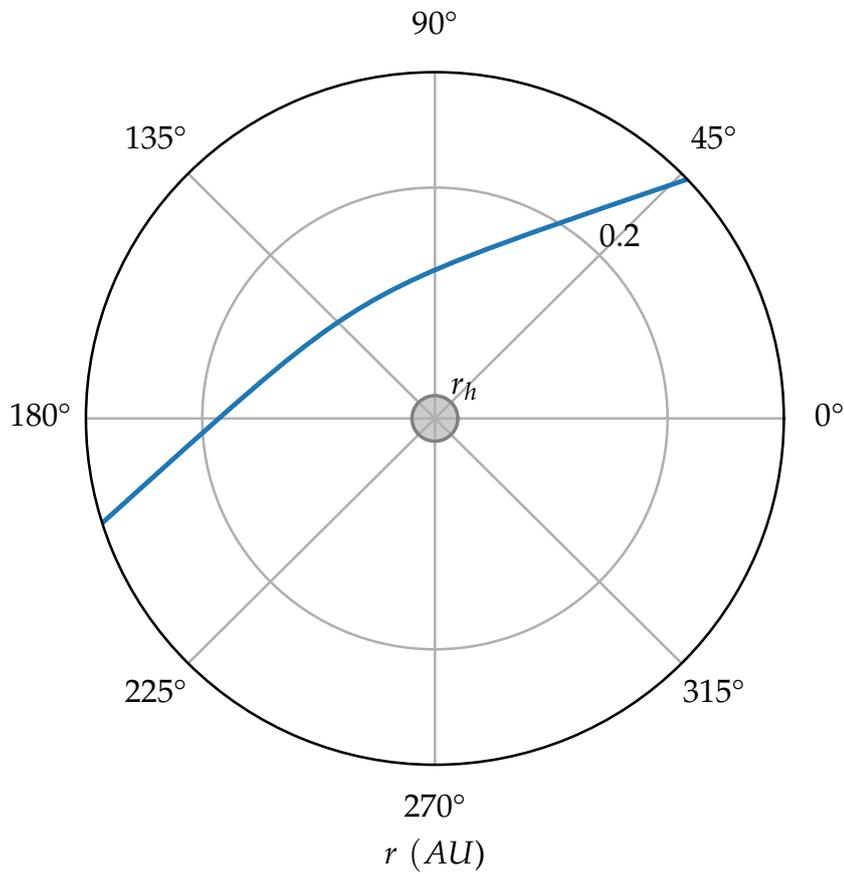


Figura 3.3.10: Podemos ver la única órbitas circular inestable. Y en gris el agujero negro. Condiciones iniciales: $E = E_2 = \mathcal{V}_{eff}^{max} = \mathcal{V}_{eff}(r_*)$ y $r_0 = r_*$.

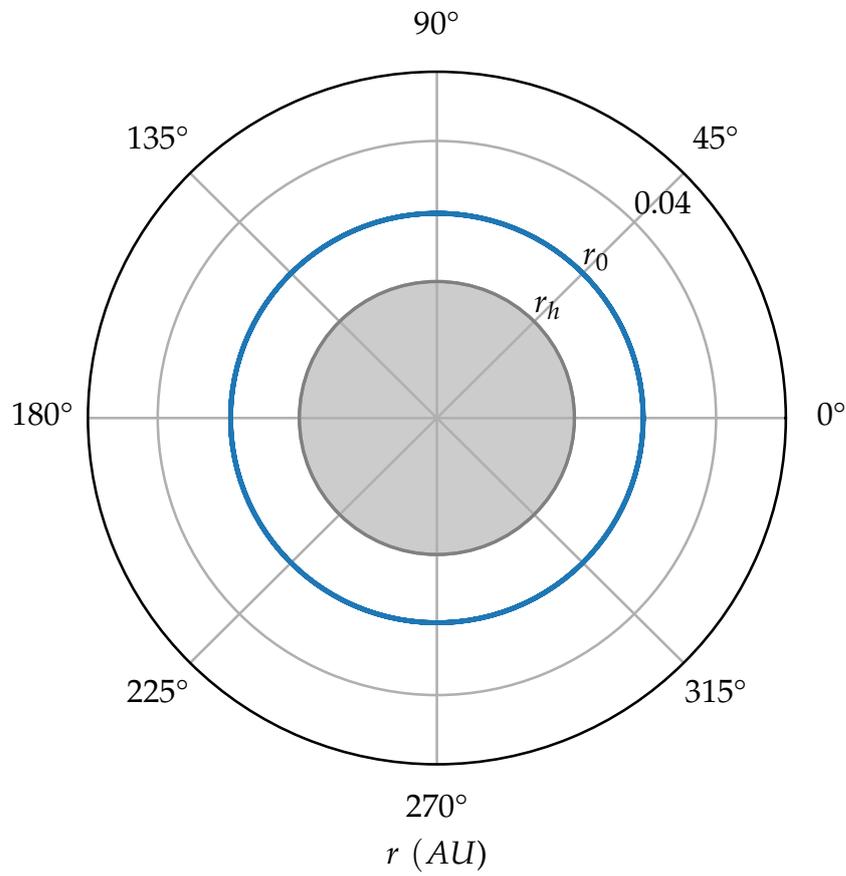
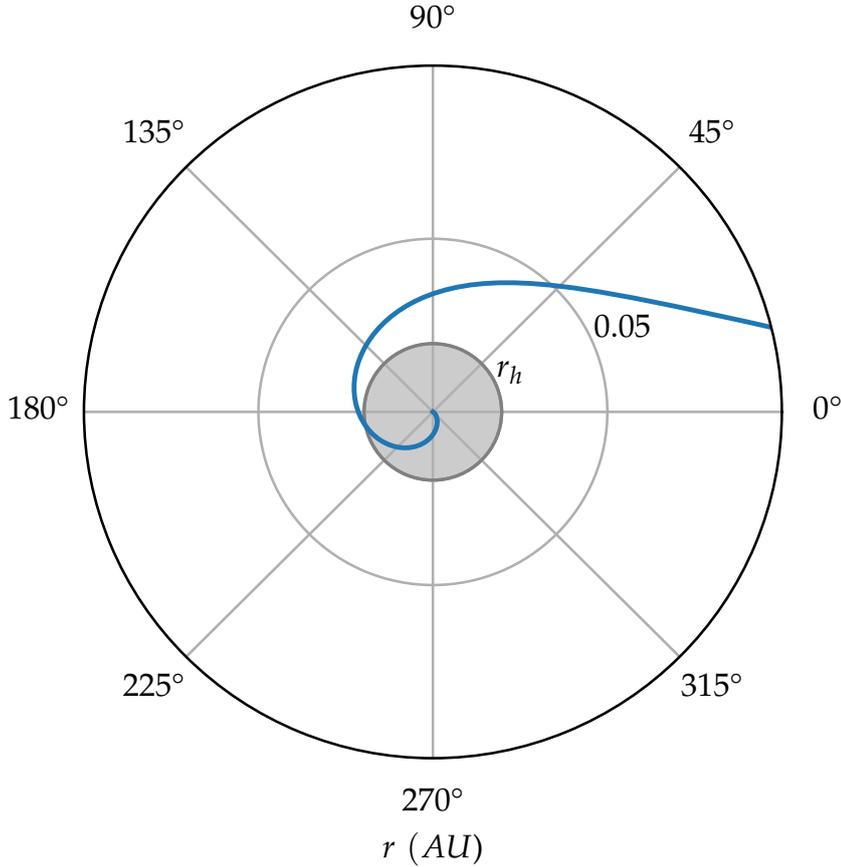


Figura 3.3.11: Podemos ver una geodésicas que cae dentro del agujero negro (Región - I), algo a notar es que su caída no es perpendicular al horizonte de eventos. Y en gris el agujero negro. Condiciones iniciales: $E = E_1 = 7,5 \times 10^{21} AU^2 yr^{-4}$ y $r_0 \rightarrow \infty$.



En el caso Schwarzschild no es necesario usar métodos numéricos; sin embargo, todos los métodos que hemos usado aquí los usaremos para el caso con pelo.

3.4. Agujeros Negros con Pelo

El caso que estudio es una teoría modificada de la acción de Hilbert - Einstein con un campo escalar con acoplamiento minimal.

$$S[\mathbf{g}, \phi] = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi) \right] \quad (3.4.1)$$

aquí la constante de acoplamiento es $\kappa = \frac{8\pi G_N}{c^4}$, donde G_N es la constante de

gravitación y c es la velocidad de la luz, g es la determinante del tensor métrico, $g = \det(g_{\mu\nu})$, R es el escalar de Ricci $V(\phi)$ es el término de auto interacción. Las ecuaciones de movimiento que surgen del principio de mínima acción son

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = \frac{dV}{d\phi} \quad (3.4.2)$$

donde el tensor de Einstein y el tensor de energía - momentum para el campo escalar son, respectivamente

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &:= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \\ T_{\mu\nu} &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + V(\phi) \right] \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Siguiendo a Anabalon and Astefanesei (2014); Anabalón et al. (2018); Anabalon and Oliva (2012); Anabalon et al. (2016a), consideramos el potencial exótico $V(\phi)$, esto presenta una autointeracción no trivial, fue obtenida y presentada primeramente en Anabalon and Astefanesei (2014),

$$\begin{aligned} V(\phi) = \frac{\alpha}{\kappa\nu^2} \left\{ \frac{\nu-1}{\nu+2} \sinh[l_\nu(\nu+1)\phi] - \frac{\nu+1}{\nu-2} \sinh[l_\nu(\nu-1)\phi] \right. \\ \left. + 4 \left(\frac{\nu^2-1}{\nu^2-4} \right) \sinh(l_\nu\phi) \right\} \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

donde $l_\nu \equiv \left(\frac{2\kappa}{\nu^2-1} \right)^{1/2}$. Esta teoría tiene dos nuevos parámetros, α , que tiene un rol importante en la existencia de un horizonte y ν , que puede calibrar el campo escalar ϕ . Considerando el siguiente ansatz para la métrica conformal

$$ds^2 = \Omega(x) \left[-c^2 f(x) dt^2 + \frac{\eta^2 dx^2}{f(x)} + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (3.4.5)$$

se puede integrar las ecuaciones de movimiento para la métrica y el campo escalar, tal que obtenemos la familia de soluciones con pelo Anabalón and Astefanesei (2013); Anabalon et al. (2013); Acena et al. (2013); Aceña et al. (2014),

$$\phi(x) = l_\nu^{-1} \ln x \quad (3.4.6)$$

donde el factor conformal $\Omega(x)$ y la función métrica $f(x)$ están dadas por

$$\begin{aligned}\Omega(x) &= \frac{\nu^2 x^{\nu-1}}{\eta^2 (x^\nu - 1)^2} \\ f(x) &= \alpha \left[\frac{1}{\nu^2 - 4} - \frac{x^2}{\nu^2} \left(1 + \frac{x^{-\nu}}{\nu - 2} - \frac{x^\nu}{\nu + 2} \right) \right] + \frac{x}{\Omega(x)}\end{aligned}\quad (3.4.7)$$

Con esta definición hay dos ramas del espacio-tiempo en las cuáles las dos constantes están bien definidas. La constante η es definida positiva y está relacionada con la masa del agujero negro⁴. La dimensión del parámetro y la constante de integración son $\dim \eta = \text{longitud}^{-1}$, $\dim \alpha = \dim \eta^2 = \text{longitud}^{-2}$ y ν es un parámetro adimensional. Las principales características de cada rama son:

- **Rama Negativa:** Las coordenadas del horizonte del agujero negro x_h es menor a 1, entonces el rango de la coordenada x es $x_h < x < 1$. El límite del espacio tiempo es en $x = 1$ y la singularidad es en $x = 0$. En este caso el campo escalar es definido negativo $\phi < 0$.
- **Rama Positiva:** La coordenada del horizonte del agujero negro x_h es mayor a 1, entonces el rango de la coordenada x es $1 < x < x_h$. El límite del espacio tiempo esta ubicado en $x = 1$ y la singularidad en $x = \infty$. En este caso el campo escalar es definido positivo $\phi > 0$.

La sistema de coordenadas radial es mucho mas intuitivo que la métrica conforme (3.4.5). La ecuación que relaciona ambos sistemas de coordenadas es $r^2 = \Omega(x)$, sin embargo esta no puede ser resulta de manera analítica exacta pero no es complicado obtener una transformación de coordenadas asintótica Anabalon et al. (2016b),

$$x = 1 \pm \frac{1}{\eta r} \mp \frac{\nu^2 - 1}{24\eta^3 r^3} \left[1 \mp \frac{1}{\eta r} \mp \frac{9(\nu^2 - 9)}{80\eta^2 r^2} + \dots \right] + \mathcal{O}(r^{-6}) \quad (3.4.9)$$

En Astefanesei and Radu (2006); Astefanesei et al. (2010a, 2007, 2010b); Anabalon et al. (2016b, 2015) se detalla un formalismo cuasi local para calcular la masa

⁴A lo largo de esta tesis usaremos el sistema de unidades donde las constantes tienen los siguientes valores:

$$G_N \approx 39,409 \text{ AU}^3 M_\odot^{-1} \text{ yr}^{-2}, \quad c \approx 6,324 \cdot 10^4 \text{ AU yr}^{-1}, \quad \kappa \approx 6,192 \cdot 10^{-17} \text{ AU}^{-1} M_\odot^{-1} \text{ yr}^2 \quad (3.4.8)$$

donde M_\odot representa la masa solar, AU es la abreviatura que usaremos para Unidades Astronómicas y yr representa años

(energía) del sistema gravitacional, y para el caso de un espacio tiempo AdS en la presencia de un campo escalar en Astefanesei et al. (2010a). El campo escalar es un pelo secundario; por lo tanto, no hay una constante de integración asociado a el. Por consiguiente, solo tendremos una constante de integración η la cuál esta relacionada con la masa, ver Astefanesei et al. (2019); Kraus et al. (1999)

$$-\frac{1}{c^2}g_{tt} = 1 - \frac{2G_N M}{c^2 r} + \mathcal{O}(r^{-3}) \quad (3.4.10)$$

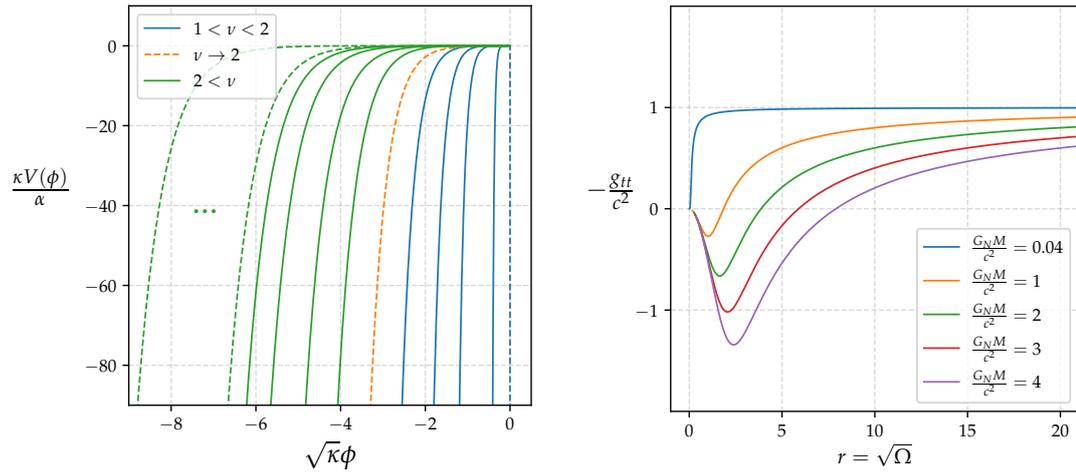
donde las masas para la rama positiva y la rama negativa son respectivamente

$$M = \frac{c^2}{2G_N} \left(\frac{\alpha + 3\eta^2}{3\eta^3} \right), \quad \phi \leq 0 \quad (3.4.11)$$

$$M = -\frac{c^2}{2G_N} \left(\frac{\alpha + 3\eta^2}{3\eta^3} \right), \quad \phi \geq 0 \quad (3.4.12)$$

3.4.1. Evadiendo el teorema de no pelo

Figura 3.4.1: Rama negativa. Gráfico de la izquierda: $\frac{\kappa}{\alpha}V(\phi)$ vs $\sqrt{\kappa}\phi$. y en el gráfico de la derecha $-g_{tt}/c^2$ vs $\sqrt{\Omega}$: Consideramos el parámetro de pelo $\nu = 1,52$, $\alpha = 1 AU^{-2}$ y el rango de masas para el agujero negro $0,04 AU \leq \frac{GM_N}{c^2} \leq 4,00 AU$.

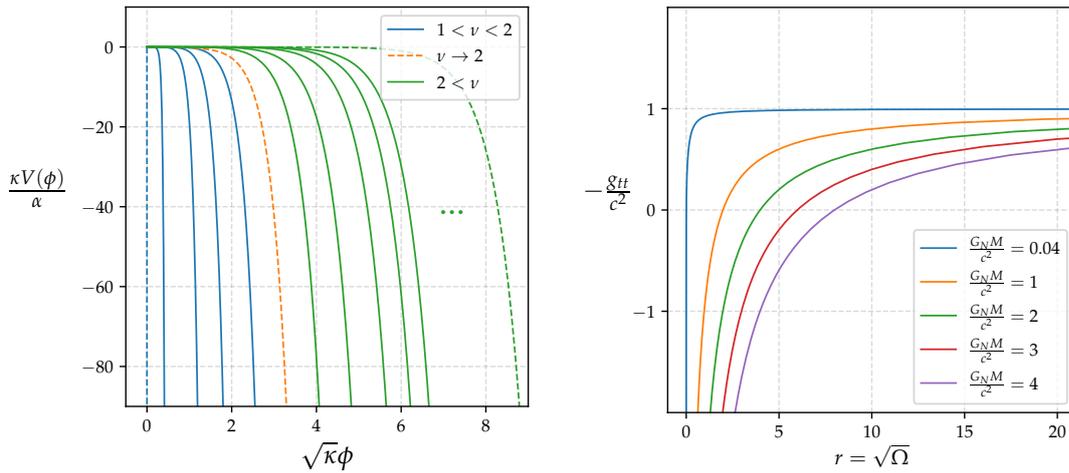


El teorema de no pelo se puede evadir si tenemos un potencial con un máximo global en el límite y un mínimo en el horizonte, esta condición esta asegurada por $d^2V/d\phi^2 \leq 0$. Considerando los siguientes valores de las constantes y para las coordenadas del espacio tiempo $0 \leq x \leq 1$ el cuál es llamado rama negativa $\phi \leq 0$:

- El potencial $V(\phi)$ depende de los parámetros ν , α , del gráfico (3.4.1) podemos confirmar que $d^2V/d\phi^2 \leq 0 \Leftrightarrow \nu > 1$, $\alpha > 0$ y el potencial escalar tiene un mínimo global en el horizonte $V(\phi_h)$
- Del gráfico (3.4.1), la existencia del horizonte, $-g_{tt}/c^2 = 0$, es garantizada si $\alpha > 0$, y hay una condicional adicional para la masa
 - Para: $1 \leq \nu < 2$ no hay restricción en la masa del agujero negro.
 - Para: $2 < \nu$ en Anabalón et al. (2018) ellos mostraron un limite inferior interesante para la masa de los agujeros negros con pelo que son asintóticamente AdS, y aquí presentamos nuestros resultados en el caso de que sean asintóticamente planos. Claramente si el campo escalar aumenta (esto esta dominado por el parámetro de pelo ν) la masa del agujero negro tiene un valor mínimo a partir del cuál ya pierde su horizonte.

$$M > M_{cri} \equiv \frac{c^2}{2G_N} \left(\frac{\nu - 2}{\alpha} \right)^{1/2} \quad (3.4.13)$$

Figura 3.4.2: Rama Positiva. Gráfico de la izquierda: $\frac{\kappa V(\phi)}{\alpha}$ vs $\sqrt{\kappa}\phi$. Y el gráfico de la derecha $-g_{tt}/c^2$ vs $\sqrt{\Omega}$: Consideramos el parámetro de pelo $\nu = 1,76$, $\alpha = -40 AU^{-2}$ y el rango de masas para el agujero negro $0,04 AU \leq \frac{G_N M}{c^2} \leq 4,00 AU$



Y para la coordenada espacio temporal $1 \leq x \leq \infty$ por lo que estamos en la rama positiva $\phi \geq 0$:

- El potencial $V(\phi)$ depende de los parámetros ν , α , del gráfico (3.4.2) confirmamos que $d^2V/d\phi^2 \leq 0 \Leftrightarrow \nu > 1$, $\alpha < 0$ y el potencial escalar tiene

un mínimo en el horizonte $V(\phi_h)$

- Del gráfico (3.4.2), la existencia del horizonte, $-\frac{g_{tt}}{c^2} = 0$, es garantizada si $\alpha < 0$, y para todos los valores $\nu > 1$ existe un valor mínimo para la masa crítica

$$M > M_{cri} \equiv \frac{c^2(\nu - 1)(\nu + 2)}{6G_N\sqrt{-\alpha(\nu + 2)}} \quad (3.4.14)$$

La existencia de una masa mínima dada en (3.4.13) para la rama negativa ($\phi < 0$) y con $\nu > 2$ puede ser interpretada de manera similar para agujeros negros tipo Kerr, en la cual la existencia del horizonte es garantizada por la desigualdad entre la densidad de momento angular y la masa del agujero negro. En el caso con pelo el horizonte es garantizado por la masa crítica que es una función que depende del parámetro de pelo ν y α . Entonces, si la masa M no es lo suficientemente grande el campo escalar implosiona y el horizonte desaparece. La rama positiva tiene la misma interpretación pero en ese caso la condición de masa mínima es para todas las reacción de retroceso del campo escalar (es decir $1 \leq \nu \leq \infty$).

Capítulo 4

Geodésicas

Dividiremos los casos de estudio de las geodésicas para dos tipos de partículas, primero las tipo tiempo (*time-like*) que son aquellas que tienen masa y segundo estudiaremos las tipo nulas (*null*) que son aquellas que no tienen masa.

4.1. Geodésicas tipo tiempo (*Time-like*)

En Ccuero et al. (2022) se demuestra las siguientes ecuaciones para las orbitas tipo tiempo (*time-like*) en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, para agujeros negros con pelo descritos en la sección anterior. La ecuación orbital a primer orden es ¹

$$\bar{\mathcal{E}}^2 - 1 = \left(\frac{\eta\Omega(x)}{c} \right)^2 \dot{x}^2 + U_{\text{eff}}(x), \quad U_{\text{eff}}(x) = \Omega(x)f(x) \left(1 + \frac{\bar{\mathcal{J}}^2 c^2}{\Omega(x)} \right) - 1 \quad (4.1.2)$$

Para obtener la ecuación a segundo orden debemos considerar las siguientes relaciones

$$r = \sqrt{\Omega(x)} = r(x), \quad r(\varphi) = r(x) \Rightarrow x(\varphi), \quad \varphi(\tau) \quad (4.1.3)$$

¹Aquí los vectores de Killing son:

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\Omega(x)f(x)}, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\bar{\mathcal{J}}c^2}{\Omega(x)} \quad (4.1.1)$$

Tomando la derivada de (4.1.2) con respecto a φ obtenemos la ecuación orbital a segundo orden la cual puede ser resuelta numéricamente ²

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + H(x, \bar{\mathcal{J}}, \eta) = 0, \quad H(x, \bar{\mathcal{J}}, \eta) = \frac{1}{2(\eta\bar{\mathcal{J}}c)^2} [(\Omega f)' + (\bar{\mathcal{J}}c)^2 f'] \quad (4.1.5)$$

recordemos que la coordenada radial esta relacionada con la coordenada x de forma exacta por $r(x) = \sqrt{\frac{\nu^2 x^{\nu-1}}{\eta^2 (x^\nu - 1)^2}}$. Podemos graficar en coordenadas polares $r(x)$ vs $\varphi(x)$. Y el potencial efectivo describe las siguientes regiones, para la rama negativa y positiva: Región-I: $\bar{\mathcal{E}}^2 - 1 > U(r_{max})$. Región-II: $U(r_{max}) > \bar{\mathcal{E}}^2 - 1 > 0$ y Región-III: $0 > \bar{\mathcal{E}}^2 - 1 > U_{min}$.

Cuadro 4.1.1: Aquí consideramos $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}/mc^2$, y $\bar{\mathcal{J}} = \mathcal{J}/mc^2$. En la figura (4.1.1) podemos ver los extremos del potencial efectivo U_{eff} .

Parámetros del agujero negro con pelo para las geodésicas tipo tiempo (<i>time-like</i>)	
$x < 1, \alpha = 1 AU^{-2}, \nu = 1,52$	$x > 1, \alpha = -40 AU^{-2}, \nu = 1,76$
$\eta \approx 12,52655373 AU^{-1}, G_N M/c^2 = 0,04 AU$	$\eta \approx 3,252719443 AU^{-1}, G_N M/c^2 = 0,04 AU$
$\bar{\mathcal{J}} = 2,6 \times 10^{-6} yr, \bar{\mathcal{J}}_c \approx 2,1072 \times 10^{-6} yr$	$\bar{\mathcal{J}} = 7 \times 10^{-7} yr, \bar{\mathcal{J}}_c \approx 2,5280 \times 10^{-7} yr$
$U_{max} \approx 0,083747687, U_{min} \approx -0,0668590532$	$U_{max} \approx 0,966450101, U_{min} = -0,3435414897$

4.2. Geodésicas nulas (*null*)

La ecuación paramétrica para las geodésicas nulas (*null*)³ fue construido en [aa](#), y puede ser fácilmente calculado considerando $ds^2 = 0$. Reemplazamos el tiempo propio τ por el parámetro afín λ y lo escalamos $\lambda \rightarrow \lambda/\bar{\mathcal{J}}$

$$\eta^2 \Omega^2 \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \mathcal{V}(x) = \frac{c^2}{b^2}, \quad \mathcal{V}(x) = f(x)c^2 \quad (4.2.2)$$

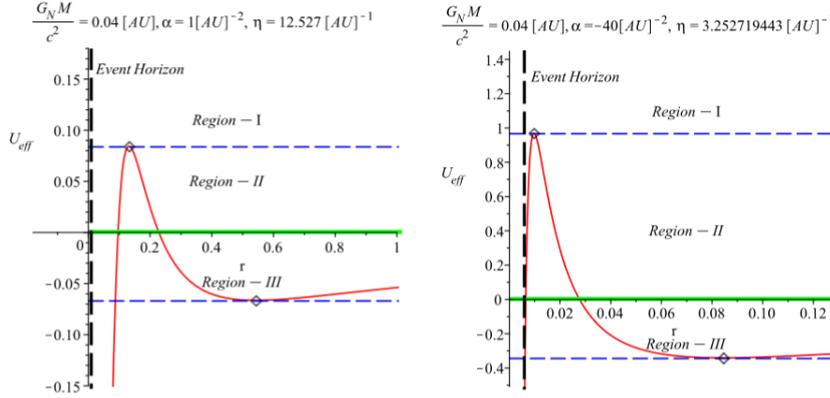
²No es complicado demostrar que con los siguientes cambios podemos obtener la ecuación orbital de Schwarzschild $\nu = 1$, ver (3.3.20)

$$x(\varphi) = 1 - \frac{1}{\eta r(\varphi)}, \quad \alpha = 3\eta^3 r_h - 3\eta^2, \quad r(\varphi) = \frac{1}{u(\varphi)} \quad (4.1.4)$$

³Aquí los vectores de Killing vienen dados por:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{bc \Omega(x)f(x)}, \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{c}{\Omega(x)} \quad (4.2.1)$$

Figura 4.1.1: Tenemos gráficos de la rama positiva (gráfico de la derecha) y la rama negativa (gráfico de la izquierda) del potencial efectivo U_{eff} . Los parámetros están descritos en la tabla (4.1.1). Aparentemente no hay ningún nuevo comportamiento en comparación a la solución de Schwarzschild, pero veremos que hay un comportamiento interesante en la geodésica debido al campo escalar en al región-I



donde el potencial efectivo $\mathcal{V}(x, \alpha, M, \nu)$ es

$$\mathcal{V}(x, \alpha, M, \nu) = c^2 f(x) = \alpha c^2 \left[\frac{1}{\nu^2 - 4} - \frac{x^2}{\nu^2} \left(1 + \frac{x^{-\nu}}{\nu - 2} - \frac{x^\nu}{\nu + 2} \right) \right] + \frac{xc^2}{\Omega(x, M)} \quad (4.2.3)$$

Las geodésicas nulas (*null*) están completamente determinadas por el parámetro de impacto $b^2 \equiv (c\bar{\mathcal{J}})^2/\bar{\mathcal{E}}^2$. Para poder integrar numéricamente la ecuación de la geodésica necesitamos considerar la ecuación orbital de primer orden $x(\varphi)$

$$\left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{\eta^2} \left[\frac{1}{b^2} - f(x) \right] \quad (4.2.4)$$

Cerca a los bordes podemos integrar (4.2.4) y usando $x = 1 - 1/\eta r$ obtenemos $r\varphi = b$, lo que nos da la definición intuitiva del parámetro de impacto. Y tomando la derivada con respecto a φ de (4.2.4) podemos obtener la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + \frac{1}{2\eta^2} \frac{df(x)}{dx} = 0 \quad (4.2.5)$$

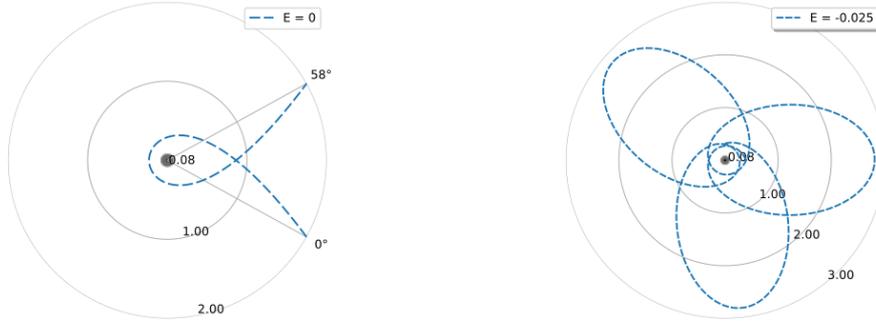
Los puntos extremos del potencial donde la ubicación es x_0

$$\mathcal{V}(x_0) = \frac{c^2}{b_0^2}, \quad \frac{d\mathcal{V}(x_0)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0^\nu = \frac{\alpha + \eta^2(2 - \nu)}{\alpha + \eta^2(2 + \nu)} \quad (4.2.6)$$

Figura 4.1.2: Rama negativa (*time-like*) Para poder comparar también colocamos el horizonte del agujero negro de Schwarzschild $r_h = \frac{2G_N M}{c^2} = 0,08 \text{ AU}$ (círculo exterior gris) y el horizonte del agujero negro con pelo $\sqrt{\Omega(x_h)} = 0,009 \text{ AU}$ (círculo interior negro). Las otras constantes están fijadas a $\bar{J} = 2,6 \times 10^{-6} \text{ yr}$, $\alpha = 1$, $\nu = 1,52$, $E = \bar{\mathcal{E}}^2 - 1$. En ambos casos el horizonte del caso con pelo es mucho más pequeño, porque el campo escalar permite la existencia de objetos mas compactos. Figura izquierda: Es una orbita abierta, una observación importante es que para la energía $E = \bar{\mathcal{E}}^2 - 1 = 0$ en el caso de Schwarzschild la orbita es parabólica y en el caso con pelo no hay este comportamiento. Figura derecha: Podemos observar una orbita periódica, es importante notar que las desviaciones por periodo no son constantes.

(a) $r_0 = 2 \text{ [AU]}$ y $0 < \varphi < 2,5\pi$

(b) $r_0 = 0,4 \text{ [AU]}$ y $0 < \varphi < 8,5\pi$



Y el radio mínimo para una órbita inestable es $r_0 = \sqrt{\Omega(x_0)}$ con su respectivo parámetro de impacto crítico b_0

$$r_0 = \pm \frac{1}{2\eta^3} [\alpha + \eta^2(2-\nu)]^{\frac{\nu-1}{2\nu}} [\alpha + \eta^2(2+\nu)]^{\frac{\nu+1}{2\nu}} \quad x_0 < 1 (+), \quad x_0 > 1 (-) \quad (4.2.7)$$

$$\mathcal{V}(x_0) = \frac{c^2}{b_0^2} \Rightarrow b_0 = \frac{1}{\sqrt{f(x_0)}} \quad (4.2.8)$$

Entonces

- La luz es deflectada si $\Rightarrow \frac{c^2}{b^2} < \mathcal{V}(x_0)$
- La luz ingresa al agujero negro si $\Rightarrow \frac{c^2}{b^2} > \mathcal{V}(x_0)$
- El valor del parámetro de impacto crítico esta definido como un lugar en el cuál las partículas sin masa quedan atrapadas en una orbita circular inestable (ORCI) $\Rightarrow \mathcal{V}(x_0) = \frac{c^2}{b_0^2}$

Figura 4.1.3: Rama Negativa tipo tiempo (*time-like*) En ambas figuras las partículas caen dentro del agujero negro. El horizonte del agujero negro con pelo es representado por el disco negro de radio $\sqrt{\Omega(x_h)} = 0,009 AU$, y para comparar representamos el agujero negro Schwarzschild por un disco gris de radio $r_h = \frac{2G_N M}{c^2} = 0,08 AU$. Observamos que las orbitas ingresan tangencialmente a el *hipotético* horizonte del agujero negro de Schwarzschild y de manera perpendicular al horizonte del agujero negro con pelo. Las constantes y parámetros son fijados a $\bar{J} = 2,6 \times 10^{-6} yr$, $\alpha = 1$, $\nu = 1,52$, $\eta = 12,527 AU^{-1}$, $E = \bar{E}^2 - 1$. En ambas figuras encontramos un nuevo fenómeno muy interesante, en la región $\sqrt{\Omega} < r < r_h$ la geodésica cambia súbitamente cambiando su dirección a la de una caída libre dentro del agujero negro con pelo. Claramente la región de pelo denso $\sqrt{\Omega} < r < r_h$ es un lugar donde el campo escalar tiene una alta reacción de retroceso y podría ser la causa de este fenómeno. Este fenómeno no existe en el modelo de Schwarzschild.

(a) $r_0 = 2 [AU]$ and $0 < \varphi < 2,5\pi$

(b) $r_0 = 2 [AU]$ and $0 < \varphi < 2,5\pi$



- En el límite de no pelo $\nu = 1$ el radio ORCI y el parámetro de impacto son $r_0 = 3MG_N/c^2 = 0,12 AU$, $b_0 = 3\sqrt{3}MG_N/c^2 = 0,207846 AU$.

4.3. Geodésicas cerca al horizonte del agujero negro con pelo

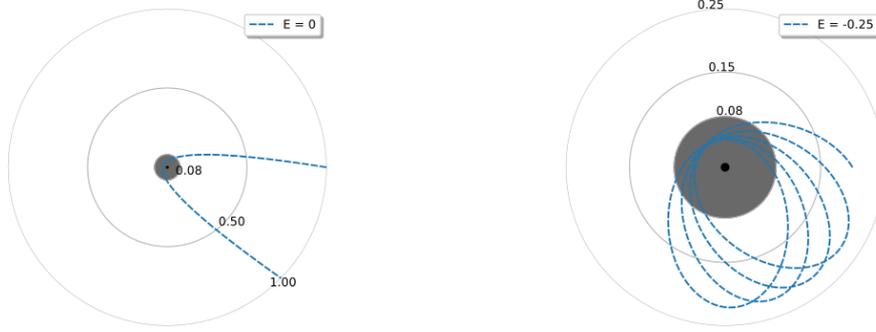
La meta de esta sección es explicar el cambio anómalo en la trayectoria de la geodésicas *time-like* y las geodésicas *null* mostrado en las figuras 4.1.3 y 4.2.2. En las figuras las geodésicas aparentemente ingresan al horizonte del agujero negro de manera ortogonal a la superficie. Aquí verificaremos que esto es verdadero.

Considerando la solución del agujero negro con pelo dada en (3.4). La localización del horizonte x_h es tal que $f(x_h) = 0$ y cerca al horizonte se puede hacer la

Figura 4.1.4: Rama positiva tipo tiempo (*time-like*) En ambas gráficas el horizonte del agujero negro con pelo es representada por un disco negro de radio $\sqrt{\Omega(x_h)} = 0,006 AU$, y para comparar con el agujero negro de Schwarzschild esta representado por un agujero gris de radio $r_h = 2G_N M/c^2 = 0,08 AU$. Las constantes y parámetros están fijadas a $\bar{J} = 7 \times 10^{-7} yr$, $\alpha = -40$, $M G_N/c^2 = 0,04$, $\nu = 1,76$, $E = \bar{\mathcal{E}}^2 - 1$. En esta rama existe una orbita parabólica en $E = 0$ y las orbitas son cualitativamente similares a las de Kepler.

(a) $r_0 = 1 [AU]$ y $0 < \varphi < 1,7\pi$

(b) $r_0 = 0,2 [AU]$ y $0 < \varphi < 8,5\pi$



Parámetros del agujero negro con pelo para las geodésicas <i>null</i>	
$x < 1$, $\alpha = 1 AU^{-2}$, $\nu = 1,52$	$x > 1$, $\alpha = -40 AU^{-2}$, $\nu = 1,76$
$\eta = 12,52655373 AU^{-1}$, $G_N M/c^2 = 0,04 AU$	$\eta = 3,252719443 AU^{-1}$, $G_N M/c^2 = 0,04 AU$
$x_0 = 0,271628$, $r_0 = 0,1003 AU$	$x_0 = 18,5943$, $r_0 = 0,0096397 AU$
$b_0 = 0,192949 AU$	$b_0 = 0,0327298 AU$
$\mathcal{V}(x_0) = 1,07423 \times 10^{11} yr^{-2}$	$\mathcal{V}(x_0) = 3,73333 \times 10^{12} yr^{-2}$

Cuadro 4.2.1: Estos son los parámetros con los que se realizaron las gráficas para las geodésicas tipo null.

siguiente aproximación $x = x_h + \epsilon$ lo cuál nos deja una ecuación para ϵ .

$$f\Omega|_{x_h+\epsilon} \approx (x - x_h)\Omega(x_h)f'(x_h), \quad \left. \frac{f}{\Omega} \right|_{x_h+\epsilon} \approx (x - x_h) \frac{f'(x_h)}{\Omega(x_h)} \quad (4.3.1)$$

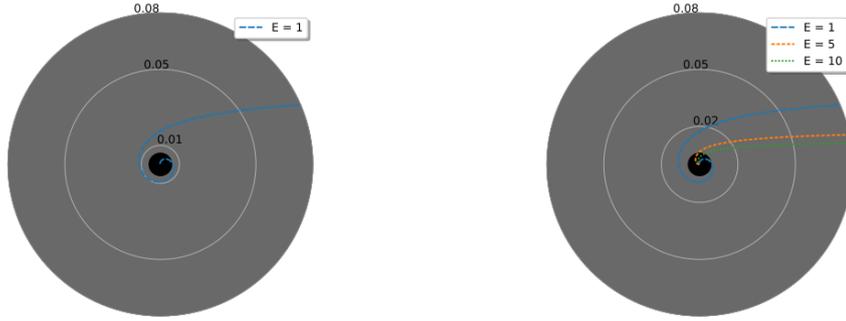
reemplazando en la métrica con pelo (3.4.5)

$$ds^2 = -(x-x_h)\Omega(x_h)f'(x_h)c^2 dt^2 + \frac{\eta^2 dx^2}{(x-x_h) \frac{f'(x_h)}{\Omega(x_h)}} + \Omega(x_h)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.3.2)$$

Figura 4.1.5: Rama positiva tipo tiempo (*time-like*) En ambas figuras hay partículas que caen dentro del agujero negro. El agujero negro con pelo esta representado por un disco negro de radio $\sqrt{\Omega(x_h)} = 0,006 AU$, y para poder comparar el agujero negro de Schwarzschild esta representado por un disco gris de radio $r_h = 2G_N M/c^2 = 0,08 AU$. Ambas figuras son partículas que caen dentro del agujero negro, observamos que las orbitas ingresan rápidamente al horizonte agujero negro de Schwarzschild y casi de manera tangencial al horizonte del agujero negro con pelo. Las otras constante están fijadas a $\bar{\mathcal{J}} = 7 \times 10^{-7} yr$, $\alpha = -40$, $MG_N/c^2 = 0,04$, $\nu = 1,76$, $E = \bar{\mathcal{E}}^2 - 1$, horizonte de Schwarzschild (gris), horizonte del caso con pelo (negro).

(a) $r_0 = 0,25 [AU]$ y $0 < \varphi < 2,5\pi$

(b) $r_0 = 2 [AU]$ y $0 < \varphi < 2,5\pi$



haciendo la transformación usual a la parte radial

$$d\rho^2 = \frac{\eta^2 dx^2}{(x - x_h) \frac{f'(x_h)}{\Omega(x_h)}} \Rightarrow \rho^2 = 4\eta^2 \frac{\Omega(x_h)}{f'(x_h)} (x - x_h) \quad (4.3.3)$$

y para la coordenada temporal $t_R = \frac{f'(x_h)}{2\eta} t$, obtenemos la geometría de Rindler

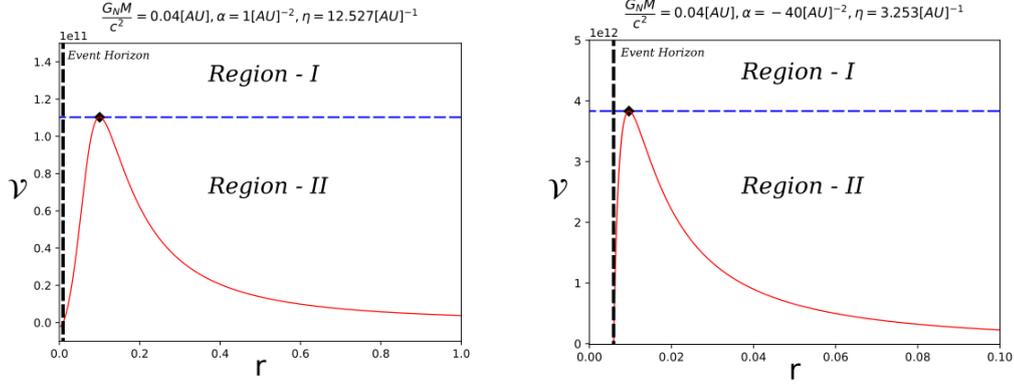
$$ds^2 = -\rho^2 dt_R^2 + d\rho^2 + \frac{\Omega(x_h)}{l^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.3.4)$$

4.3.1. Geodésicas tipo tiempo (*time-like*) cerca al horizonte

La geometría del horizonte (3.4.5) es descrita por la métrica

$$ds^2 = \Omega(x_h) \left(-F(x) c^2 dt^2 + \frac{\eta^2 dx^2}{F(x)} + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right), \quad F(x) = (x - x_h) f'(x_h) \quad (4.3.5)$$

Figura 4.2.1: Tenemos la rama positiva (Gráfico izquierda) y la rama negativa (Gráfico derecha) del potencial efectivo V_{eff} . Los parámetros son descritos en la tabla (4.2.1).



Las ecuaciones de Killing nos dan las siguientes cantidades conservadas

$$\dot{t} = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\Omega(x_h)F(x)}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\bar{\mathcal{J}}c^2}{\Omega(x_h)} \quad (4.3.6)$$

y la ecuación paramétrica

$$\bar{\mathcal{E}}^2 - 1 = \left(\frac{\eta\Omega(x_h)}{c} \right)^2 \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + U_{\text{eff}}(x), \quad U_{\text{eff}}(x) = \Omega(x_h)F(x) \left(1 + \frac{\bar{\mathcal{J}}^2 c^2}{\Omega(x_h)} \right) - 1 \quad (4.3.7)$$

Considerando la siguiente regla de la cadena: $\dot{x} = \frac{dx}{d\varphi}\dot{\varphi}$, podemos obtener la ecuación orbital con $E \equiv \bar{\mathcal{E}}^2 - 1$

$$E = \eta^2 \bar{\mathcal{J}}^2 c^2 \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + U_{\text{eff}}(x) \quad (4.3.8)$$

tomando la derivada con respecto a φ

$$\frac{d^2 x}{d\varphi^2} + H(x_h, \nu, \bar{\mathcal{J}}, \eta) = 0, \quad H(x_h, \nu, \bar{\mathcal{J}}, \eta) = \frac{f'(x_h)}{2(\eta\bar{\mathcal{J}}c)^2} [\Omega(x_h) + (\bar{\mathcal{J}}c)^2] \quad (4.3.9)$$

y la solución es

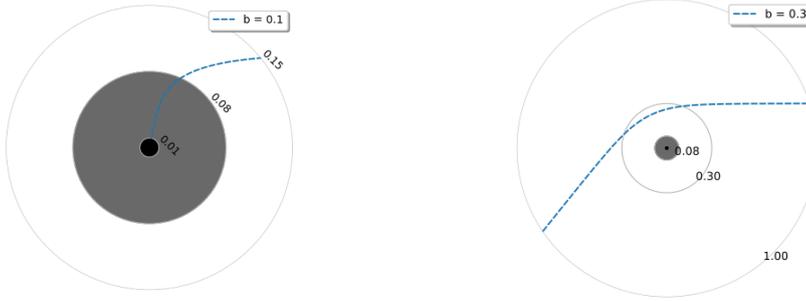
$$x(\varphi) = -\frac{H(x_h, \nu, \bar{\mathcal{J}}, \eta)}{2} \varphi^2 + c_1 \varphi + c_2 \quad (4.3.10)$$

Figura 4.2.2: Rama negativa nulas (*null*). Asumimos que el horizonte del agujero negro de Schwarzschild es $r_h = \frac{2G_N M}{c^2}$ (disco gris) y el horizonte del agujero negro con pelo es $\sqrt{\Omega(x_h)}$ (disco negro). Las otras constantes son fijadas a $\alpha = 1$, $MG_N/c^2 = 0,04$, $\nu = 1,52$.

Figura izquierda: De acuerdo con la tabla (4.1.1) las geodésicas nulas *null* están definidas en la región-I, ver figura (a) (4.2.1), donde $\frac{c^2}{b^2} = 4,10496 \cdot 10^{11} \text{ yr}^{-2} > \mathcal{V}(x_0)$. Una partícula nula *null* cae dentro del agujero negro, observamos que la órbita es perpendicular al horizonte del agujero negro con pelo.

Figura derecha: De acuerdo con la tabla (4.1.1) las geodésicas nulas *null* están definidas en la región-II, ver figura (a) (4.2.1), donde $\frac{c^2}{b^2} = 0,45611 \cdot 10^{11} \text{ yr}^{-2} < \mathcal{V}(x_0)$. Una partícula *null* es deflectada por el agujero negro con pelo.

- (a) $r_0 = 1 [AU]$ y $0,1 < \varphi < 1,2\pi$ (b) $r_0 = 1 [AU]$ y $0,29 < \varphi < 1,2\pi$



Las condiciones iniciales son, ver el ejemplo del caso Schwarzschild 4.3

$$x(0) = x_h \Rightarrow c_2 = x_h, \quad \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{x_h} = \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\eta \bar{\mathcal{J}} c} = c_1 \quad (4.3.11)$$

y cerca al horizonte la solución para las geodésicas tipo tiempo (*time-like*) es

$$x(\varphi) = -\frac{H(x_h, \nu, \bar{\mathcal{J}}, \eta)}{2} \varphi^2 + \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\eta \bar{\mathcal{J}} c} \varphi + x_h \quad (4.3.12)$$

4.3.2. Geodésicas nulas (*null*) cerca al horizonte

Considerando la métrica cerca al horizonte (4.3.2) y el cambio (4.3.6) obtenemos las siguientes expresiones para las cantidades conservadas

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{1}{bc \Omega(x_h) F(x)}, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{c}{\Omega(x_h)} \quad (4.3.13)$$

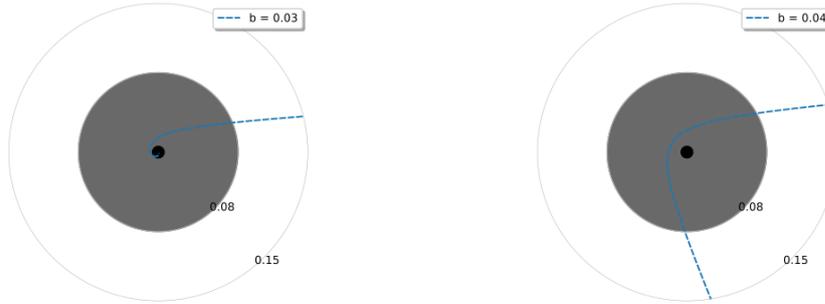
Figura 4.2.3: Rama positiva (*null*) Asumimos que el horizonte del agujero negro Schwarzschild es $r_h = \frac{2GM}{c^2}$ (disco gris) y el horizonte del agujero negro con pelo es $\sqrt{\Omega(x_h)}$ (disco negro). Las otras constantes están fijadas a $\alpha = -40$, $MG_N/c^2 = 0,04$, $\nu = 1,76$.

Figura izquierda: De acuerdo con la tabla (4.1.1) las geodésicas nulas (*null*) están definida en la región-I, ver figura (b) (4.2.1), donde $\frac{c^2}{b^2} = 4,56107 \cdot 10^{12} \text{ yr}^{-2} > \mathcal{V}(x_0)$. Una partícula *null* cae dentro del agujero negro, observamos que la órbita no es perpendicular al horizonte del agujero negro con pelo.

Figura derecha: De acuerdo con la tabla (4.1.1) las geodésicas *null* están definida en la región-II, ver figura (b) (4.2.1), donde $\frac{c^2}{b^2} = 2,56560 \cdot 10^{12} \text{ yr}^{-2} < \mathcal{V}(x_0)$. Una partícula nula (*null*) es altamente deflectada.

(a) $r_0 = 1 [AU]$ y $0,03 < \varphi < 1,7\pi$

(b) $r_0 = 1 [AU]$ y $0,04 < \varphi < 1,6\pi$



la ecuación orbital a primer orden es

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{\eta^2} \left[\frac{1}{b^2} - F(x) \right] \quad (4.3.14)$$

al segundo orden y su solución es

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} + \frac{f'(x_h)}{2\eta^2} = 0 \Rightarrow x(\varphi) = -\frac{f'(x_h)}{4\eta^2} \varphi^2 + c_1 \varphi + c_2 \quad (4.3.15)$$

Las condiciones iniciales son

$$x(0) = x_h \Rightarrow c_2 = x_h, \quad \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)_{x_h} = \frac{1}{\eta b} = c_1 \quad (4.3.16)$$

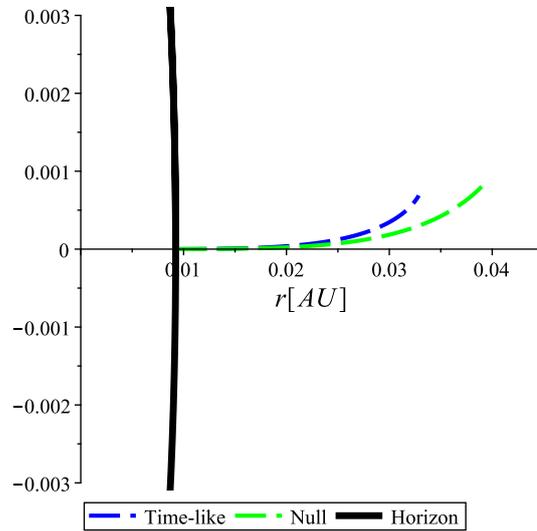
Y la solución cerca al horizonte para una geodésica nulas (*null*) es, aquí nos gustaría resaltar que $x(\varphi) = x(\varphi, \nu)$ depende del parámetro de pelo

$$x(\varphi) = -\frac{f'(x_h)}{4\eta^2}\varphi^2 + \frac{\varphi}{\eta b} + x_h, \quad r(\varphi) = \sqrt{\Omega(x(\varphi))} \quad (4.3.17)$$

la solución anterior es muy similar al caso de Schwarzschild. Sin embargo, las constantes a las que multiplican φ^2 y φ dependen del parámetro de pelo ν la cuál claramente cambia el comportamiento usual del caso Schwarzschild.

Figura 4.3.1: Geodésicas del agujero negro con pelo cerca al horizonte.

Aquí graficamos las geodésicas cerca al horizonte de la figura 4.1.3 (b) y la figura 4.2.2 (b), las cuales son nulas (*null*) y tipo tiempo (*time-like*) respectivamente. Aquí consideramos el momento angular por unidad de masa $\bar{J} = 2,6 \times 10^{-6}$ y la masa del agujero negro $G_N M/c^2 = 0,04$. Para la geodésicas tipo timepo (*time-like*) consideramos $E = 0,1$ y para las geodésicas nulas (*null*) consideramos $b = 0,1$, $E = 0,1$. La línea negra define el horizonte del agujero negro de radio $r_h = 0,0192 AU$. El agujero negro Schwarzschild tiene una geodésica que ingresa al agujero negro con cierto ángulo con respecto a la tangente del horizonte. En esta misma sección mostramos el caso con pelo cuyas geodésicas cruzan el horizonte con una forma ortogonal a este.

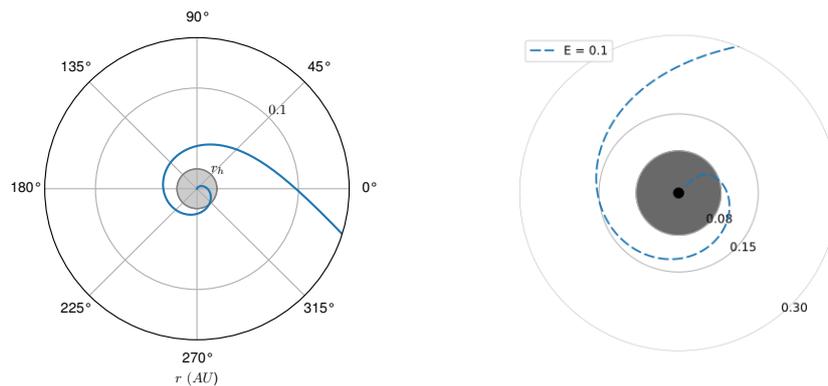


Capítulo 5

Resultados

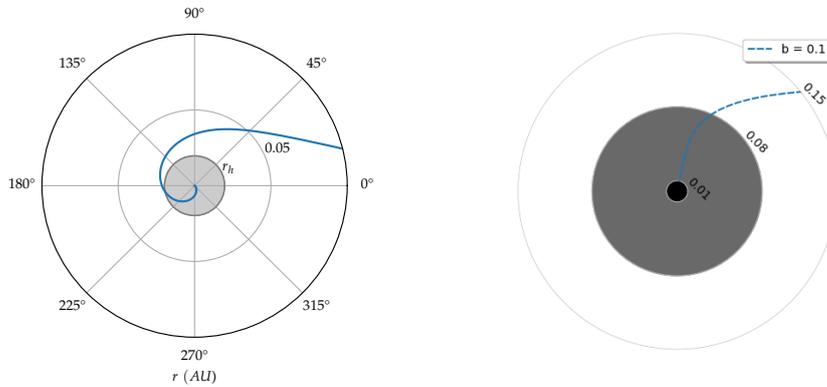
Para evidenciar las diferencias que introduce la presencia de pelo en un agujero negro, se grafican las geodésicas que ingresan en la zona de pelo denso en el caso de un agujero negro con pelo y se comparan con las correspondientes a un agujero negro sin pelo. Esta comparación se puede realizar tanto para las geodésicas *time-like* como para las *null*.

Figura 5.0.1: Geodésicas tipo tiempo (Time-Like): A la izquierda, la geodésica correspondiente al agujero negro sin pelo (ver figura 4.1.3) y, a la derecha, la geodésica correspondiente al agujero negro con pelo (ver figura 3.3.6).



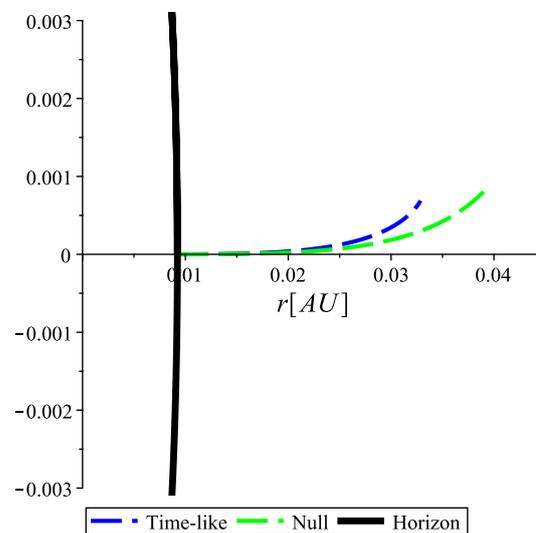
La comparación entre estas dos gráficas sugiere que las geodésicas en el agujero negro con pelo entran perpendicularmente al horizonte de eventos. Además, se observa que el comportamiento de las geodésicas es similar fuera de la zona que hemos denominado pelo denso. Sin embargo, las trayectorias al ingresar a la zona de pelo denso cambian notablemente en comparación con las de un agujero negro sin pelo.

Figura 5.0.2: Geodésicas nulas (Null): A la izquierda, la geodésica correspondiente al agujero negro sin pelo (ver figura 4.2.2) y, a la derecha, la geodésica correspondiente al agujero negro con pelo (ver figura 3.3.11).



A continuación, se puede analizar con mayor detalle cómo se comporta la geodésica en las cercanías del agujero negro. Esto se realizó en la sección 4.3.1.

Figura 5.0.3: Comportamiento de la partícula cerca del horizonte. Para más detalles, consultar la sección 4.3.1.



De este análisis, se puede observar que el comportamiento de la geodésica se aparta significativamente del comportamiento de una geodésica en un agujero negro sin pelo.

Capítulo 6

Discusión

1. En la primera parte de esta tesis mostramos las geodésicas de Schwarzschild para después poder compararlas con el caso con pelo. Nuestros primeros resultados son la existencia de una masa crítica para la rama negativa $0 < x < 1$ con $2 < \nu$ y para la rama positiva $1 < x < \infty$ con $\nu > 1$

$$M_{cri} \equiv \frac{c^2}{2G_N} \left(\frac{\nu - 2}{\alpha} \right)^{1/2}, \quad M_{cri} \equiv \frac{c^2(\nu - 1)(\nu + 2)}{6G_N \sqrt{-\alpha(\nu + 2)}} \quad (6.0.1)$$

y el agujero negro tiene horizonte si $M > M_{cri}$. Este es un interesante resultado que podría tener impacto en el modelamiento del disco de acreción en futuros trabajos.

2. La parte más importante de los resultados esta en la sección 3 la cual es el comportamiento anómalo de las trayectorias de las geodésicas al entrar en la zona de pelo denso (disco gris), ver 4.1.3 y 4.2.2. Ambos tipos de geodésicas ingresan de manera ortogonal a la superficie al agujero negro con pelo. Para clarificar este punto en la sección 4.3 construimos unas geodésicas cerca al horizonte descritas por las figuras 4.1.3 y 4.2.2, cuyos resultados fueron mostrados en 4.3.1. Hay otras configuraciones para el pelo, como en 4.1.4 y 4.2.3, las cuáles no presentan este cambio en las geodésicas y son más similares al agujero negro Schwarzschild. Este fenómeno podría permitir la identificación, desde el punto observacional, si un agujero negro tiene pelo o no.
3. El fenómeno de ingreso perpendicular al agujero negro se observa más

frecuentemente en la rama negativa. Esto podría ayudar a discriminar cuál es la rama más relevante a considerar para un agujero negro.

4. En el potencial del campo escalar existen parámetros libres, como ν , por ejemplo. Estos parámetros podrían fijarse a partir de observaciones experimentales de las órbitas.
5. Un enfoque natural a seguir es considerar el pelo con momento angular, carga eléctrica, entre otros. Incluso antes de eso, podría ser útil cuantizar el campo escalar y analizar cómo esto afecta las geodésicas.

Capítulo 7

Conclusiones

1. El análisis realizado en este estudio demuestra que las geodésicas en un agujero negro con pelo se ven considerablemente afectadas en la región de pelo denso. Mientras que en zonas alejadas de esta región las trayectorias son prácticamente indistinguibles de las que se obtienen en un agujero negro sin pelo, en la zona de pelo denso se evidencia una desviación sustancial en el comportamiento de las geodésicas. Este fenómeno se atribuye a la intensificación de la interacción entre las geodésicas y el campo escalar, lo que modifica significativamente las propiedades dinámicas en esta región específica.
2. Las aproximaciones desarrolladas en las cercanías del horizonte han permitido validar de forma rigurosa los resultados obtenidos. Estas aproximaciones confirman que las alteraciones observadas en las trayectorias geodésicas responden de manera inherente a la influencia del campo escalar y no a posibles errores computacionales. Dichos hallazgos refuerzan la robustez y fiabilidad de los métodos numéricos empleados, proporcionando una base sólida para futuras investigaciones en la dinámica de geodésicas en sistemas con modificaciones en la geometría del espacio-tiempo.

Bibliografía

- Aceña, A., Anabalón, A., Astefanesei, D., and Mann, R. (2014). Hairy planar black holes in higher dimensions. *JHEP*, 01:153.
- Acena, A., Anabalón, A., and Astefanesei, D. (2013). Exact hairy black brane solutions in AdS_5 and holographic RG flows. *Phys. Rev. D*, 87(12):124033.
- Anabalón, A. and Astefanesei, D. (2013). On attractor mechanism of AdS_4 black holes. *Phys. Lett. B*, 727:568–572.
- Anabalón, A. and Astefanesei, D. (2014). Black holes in ω -deformed gauged $N = 8$ supergravity. *Phys. Lett. B*, 732:137–141.
- Anabalón, A., Astefanesei, D., and Choque, D. (2016a). Hairy AdS Solitons. *Phys. Lett. B*, 762:80–85.
- Anabalón, A., Astefanesei, D., Choque, D., and Martínez, C. (2016b). Trace Anomaly and Counterterms in Designer Gravity. *JHEP*, 03:117.
- Anabalón, A., Astefanesei, D., Gallerati, A., and Trigiante, M. (2018). Hairy Black Holes and Duality in an Extended Supergravity Model. *JHEP*, 04:058.
- Anabalón, A., Astefanesei, D., and Mann, R. (2013). Exact asymptotically flat charged hairy black holes with a dilaton potential. *JHEP*, 10:184.
- Anabalón, A., Astefanesei, D., and Martínez, C. (2015). Mass of asymptotically anti-de Sitter hairy spacetimes. *Phys. Rev. D*, 91(4):041501.
- Anabalón, A. and Oliva, J. (2012). Exact Hairy Black Holes and their Modification to the Universal Law of Gravitation. *Phys. Rev. D*, 86:107501.
- Astefanesei, D., Choque, D., Gómez, F., and Rojas, R. (2019). Thermodynamically stable asymptotically flat hairy black holes with a dilaton potential. *JHEP*, 03:205.
- Astefanesei, D., Mann, R. B., Rodríguez, M. J., and Stelea, C. (2010a). Quasilocal formalism and thermodynamics of asymptotically flat black objects. *Class. Quant. Grav.*, 27:165004.
- Astefanesei, D., Mann, R. B., and Stelea, C. (2007). Note on counterterms in asymptotically flat spacetimes. *Phys. Rev. D*, 75:024007.

- Astefanesei, D. and Radu, E. (2006). Quasilocal formalism and black ring thermodynamics. *Phys. Rev. D*, 73:044014.
- Astefanesei, D., Rodriguez, M. J., and Theisen, S. (2010b). Thermodynamic instability of doubly spinning black objects. *JHEP*, 08:046.
- Ccuiro, W., Choque, D., and Valdivia-Mera, G. (2022). Anomalous changing of geodesics in hairy black holes.
- Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper. (German) [On the electrodynamics of moving bodies]. *Annalen der Physik*, 322(10):891–921.
- Hertog, T. (2006). Towards a Novel no-hair Theorem for Black Holes. *Phys. Rev. D*, 74:084008.
- Jeffery, G. B. (1921). The field of an electron on einstein’s theory of gravitation. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 99(697):123–134.
- Kerr, R. P. (1963). Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*, 11(5):237–238.
- Kraus, P., Larsen, F., and Siebelink, R. (1999). The gravitational action in asymptotically AdS and flat space-times. *Nucl. Phys. B*, 563:259–278.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1976). *Mechanics, Third Edition: Volume 1 (Course of Theoretical Physics)*. Butterworth-Heinemann, 3 edition.
- Newman, E., Couch, E., Chinnapared, K., Exton, A., Prakash, A., and Torrence, R. (1965). Metric of a rotating, charged mass. *Journal of Mathematical Physics*, 6(6):918–919.
- Newman, E. and Janis, A. (1965). Note on the kerr spinning-particle metric. *Journal of Mathematical Physics*, 6(6):915–917.
- Newton, I. (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. apud Sa. Smith, London.
- Nordström, G. (1918). On the energy of the gravitational field in einstein’s theory. *Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen Proceedings*, 20(2):1238–1245.
- Nunez, D., Quevedo, H., and Sudarsky, D. (1996). Black holes have no short hair. *Phys. Rev. Lett.*, 76:571–574.
- Reissner, H. (1916). Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach der einsteinschen theorie. *Annalen der Physik*, 355(9):106–120.
- Schwarzschild, K. (1916). Über das gravitationsfeld einer kugel aus inkompressibler flüssigkeit. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1:424–?

Thorne, K. S. (1994a). *Black holes and time warps: Einstein's outrageous legacy*. W. W. Norton I& Company.

Thorne, K. S. (1994b). *Black holes and time warps: Einstein's outrageous legacy*.

Weyl, H. (1917). Zur gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 359(18):117–145.

Apéndice A

A1. Notación, convención de suma de Einstein

Cuando uno realiza operaciones con tensores, incluso las mas simples manipulaciones pueden resultar en notaciones muy complicadas. Es por eso que necesitamos nuevas convenciones para solucionar estos problemas.

- Usaremos la notación de índices abstractos, según esta notación solo usaremos las componentes. A los tensores con componentes contravariantes (k,0) los denotaremos con índices superiores $T^{a_1 \dots a_k}$ y a los tensores con componentes covariantes (0,l) con índices inferiores $T_{b_1 \dots b_l}$. Así los tensores (k,l) serán denotados con índices superiores y inferiores respectivamente, es decir $T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k}$, también en la multiplicación de tensores obviaremos el símbolo de multiplicación externa \otimes y no repetiremos la letra que indica el índice; esto es

$$T_{lm}^{ijk} \otimes S_j^i \xrightarrow{\text{se convierte en}} T_{lm}^{ijk} S_o^n \quad (\text{A1.1})$$

- Los tensores tienen muchos índices (correspondientes a vectores y vectores duales) y al contraer estos índices aparecen símbolos de suma. Cuando las contracciones son de varios índices aumentan los símbolos de suma, por eso usaremos la convención de suma de Einstein.

$$A^i B_i = \sum_i A^i B_i \quad (\text{A1.2})$$

$$C^{abcdef} D_{abcijkl} = \sum_a \sum_b \sum_c C^{abcdef} D_{abcijkl} \quad (\text{A1.3})$$

Según este convenio para la contracción de índices ya no usaremos el símbolo de suma, sino que esto se vera implícito por la repetición del índice tanto en

la parte superior como en la inferior.

La notación de índices también nos ayuda a expresar las propiedades de los tensores.

- La parte simétrica de un tensor T_{ab} es

$$T_{(ab)} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}) \quad (\text{A1.4})$$

- La parte anti simétrica de un tensor T_{ab} es

$$T_{[ab]} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}) \quad (\text{A1.5})$$

A2. Simetría axial y estacionaria

Asumamos un espacio axiosimétrico y estacionario. En este espacio la métrica se puede expresar de la siguiente manera:

$$ds^2 = -V(\rho, z)(dt - \omega d\phi)^2 + V(\rho, z)^{-1}\rho^2 d\phi^2 + \Omega(\rho, z)^2(d\rho^2 + \Lambda(\rho, z) dz^2) \quad (\text{A2.1})$$

Donde V, Ω, Λ son funciones que solo dependen de ρ y z la cual en el caso especial en que el espacio es vacío, es decir $R_{ab} = 0$ tenemos la siguiente ecuación para ρ :

$$D^a D_a \rho = 0 \quad D_a : \text{derivada covariantes en la 2D atravesada por } \rho z \quad (\text{A2.2})$$

A3. Tensores covariante y contravariante, métrica

Un tensor contravariante es del tipo $(k,0)$ y un tensor covariante es del tipo $(0,l)$. Comúnmente nos referiremos a los vectores que están en el espacio tangente V_p como contravariantes y a los vectores que están en el espacio cotangente V_p^* como covariantes. Es así que, sea el vector \vec{v} podemos descomponerlo en los vectores base de V_p^1 , y $\dim v_p = 3$ ².

$$\vec{v} = v^1 \hat{e}_1 + v^2 \hat{e}_2 + v^3 \hat{e}_3 = v^i \hat{e}_i \quad (\text{A3.1})$$

¹También se puede descomponer en los vectores base de V_p^* .

²Para el ejemplo trabajamos en 3 dimensiones, pero la generalización simple.

y a partir de la proyección de este vector hallaremos las componentes covariantes.

$$v_j = \vec{v} \cdot \hat{e}_j = v^i \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \quad (\text{A3.2})$$

es así que podemos definir los componentes de la métrica.

$$g_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \quad \text{donde } \hat{e}_i, \hat{e}_j \text{ son vectores base de } V_p \quad (\text{A3.3})$$

$$g^{ij} = \hat{e}^i \cdot \hat{e}^j \quad \text{donde } \hat{e}^i, \hat{e}^j \text{ son vectores base de } V_p^* \quad (\text{A3.4})$$

Con esta definición de la métrica tenemos algunas propiedades interesantes

- Subir y bajar índices

$$v_j = v^i g_{ij} \quad (\text{A3.5})$$

$$v^j = v_i g^{ij} \quad (\text{A3.6})$$

- Norma de un vector

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^i \hat{e}_i \cdot v^j \hat{e}_j = v^i v^j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = v^i v^j g_{ij} \quad (\text{A3.7})$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^i v_i \quad (\text{A3.8})$$

A4. Problema de Kepler

Antes de Ley de Gravitación Universal siempre era un problema poder determinar las ecuaciones que rigieran el movimiento de los planetas. Sin embargo con la ley de gravitación universal y la segunda Ley de movimiento de Newton se pueden expresar las ecuaciones de movimiento.

Pero esta no es la única manera de poder llegar a las ecuaciones de movimiento, otra manera de llegar a ellas es mediante la conservación de la energía. Entonces escribamos la ecuación para la energía de un cuerpo dentro de un potencial gravitacional.

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + U(r) \quad (\text{A4.1})$$

existe una simetría con respecto a θ por lo cuál es indiferente el valor que escojamos para esta variable. Por simplicidad escogeremos $\theta = \pi/2$. Entonces la energía es:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) \quad (\text{A4.2})$$

Ahora construyamos el lagrangiano de la partícula.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (\text{A4.3})$$

del lagrangiano podemos deducir que φ es una coordenada cíclica, entonces si vemos la ecuación de Lagrange correspondiente a la coordenada cíclica podemos obtener una constante de movimiento que es el momentum asociado a esa coordenada, *Momentum Angular*.

$$M = mr^2\dot{\varphi} \quad (\text{A4.4})$$

entonces reemplazando en la ecuación de la energía tenemos

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \quad (\text{A4.5})$$

como podemos ver la ecuación de movimiento se redujo a una partícula dentro de el nuevo potencial $\frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$, a este potencial se le llama *potencial efectivo*. Seguidamente haciendo la regla de la cadena $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$ podemos expresar la energía como

$$E = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{M^2}{m^2 r^4} + \frac{M^2}{m^2 r^2} \right] + U(r) \quad (\text{A4.6})$$

despejando $\frac{dr}{d\varphi}$ tenemos que

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{M}{r^2} \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}} \quad (\text{A4.7})$$

separando variables para poder integrar

$$\varphi = \int \frac{M dr / r^2}{\sqrt{2m[E - U(r)] - M^2/r^2}} + cte \quad (\text{A4.8})$$

reemplazando aquí el potencial gravitacional $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ podemos resolver la integral

$$\varphi = \text{arc cos} \left(\frac{M/r - m\alpha/M}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} \right) + cte \quad (\text{A4.9})$$

tomando adecuadamente φ tal que la constante sea 0, y además considerando

$$p = M^2/m\alpha, \quad e = \sqrt{1 + 2EM^2/m\alpha^2} \quad (\text{A4.10})$$

la ecuación de movimiento se puede escribir como

$$p/r = 1 + e \cos \varphi \quad (\text{A4.11})$$

Esta es la ecuación de una sección cónica, con unos de sus focos en el origen; además p y e se llaman respectivamente *parámetro* y *excentricidad*.

A5. Vectores de Killing

Se llama vectores de Killing a aquellos vectores que cumplen que la derivada de Lie de la métrica con respecto a estos es cero, es decir:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{A5.1})$$

esto quiere decir que estos vectores generan un mapa que mantiene invariante a la métrica. Otra forma equivalente de expresar (A5.1) usando la derivada covariante es:

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0 \quad (\text{A5.2})$$

Cuando tu multiplicas un vector de Killing por tangente de una geodésica esta se mantiene constante a lo largo de la geodésica. Esto es

$$\begin{aligned} u^b \nabla_b (\xi_a u^a) &= u^b u^a \nabla_b \xi_a + \xi_a u^b \nabla_b u^a \\ &= u^b u^a \frac{1}{2} (\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a) + \xi_a u^b \nabla_b u^a \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces podemos deducir que

$$\xi_a u^a = cte \quad (\text{A5.3})$$

Ahora calculemos los vectores de Killing para la métrica de Schwarzschild. La métrica es

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2G_N M}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2G_N M}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{A5.4})$$

en donde fijamos $\theta = \pi/2$ y $r_g = 2G_N M/c^2$ obteniendo así

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (\text{A5.5})$$

dada la forma de esta métrica (no hay dependencia temporal y la parte angular es idéntica a Minkowski) podemos deducir los siguientes vectores de Killing:

$$\xi^{ct} = 1 \quad (\text{A5.6})$$

$$\xi^\varphi = 1 \quad (\text{A5.7})$$

introduciendo estos vectores en (A5.3) obtenemos

$$g_{ctct}\xi^{ct}u^{ct} = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(1)(\dot{ct}) = cte \quad (\text{A5.8})$$

$$g_{\varphi\varphi}\xi^\varphi u^\varphi = (r^2)(1)(\dot{\varphi}) = cte \quad (\text{A5.9})$$

para poder determinar estas constantes tenderemos el límite a Minkowski, esto es haciendo $r \rightarrow \infty$, para el caso temporal esto es:

$$-\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)(\dot{ct}) \Rightarrow -\dot{ct} = -\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

desarrollando en series de Taylor tenemos

$$g_{ctct}\xi^{ct}u^{ct} = -\left(c + \frac{1}{2c}v^2\right) = -\frac{E}{mc}$$

donde E es la energía. De la misma manera para $\dot{\varphi}$ podemos encontrar que

$$g_{\varphi\varphi}\xi^\varphi u^\varphi = \frac{J}{m}$$

donde J es el momentum angular. Entonces despejando $\dot{t}, \dot{\varphi}$ tenemos

$$\dot{t} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{E}{mc^2} \quad (\text{A5.10})$$

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{mr^2} \quad (\text{A5.11})$$

A6. Unidades

Las unidades que usare son las siguientes:

$$\text{tiempo} = yr \quad [\text{años}] \quad (\text{A6.1})$$

$$\text{distancia} = AU \quad [\text{Unidades Astronómicas}] \quad (\text{A6.2})$$

$$\text{masa} = M_{\odot} \quad [\text{Masas solares}] \quad (\text{A6.3})$$

en estas nuevas unidades las constantes físicas adoptaran los siguientes valores

$$G_N \approx 39,409 AU^3 M_{\odot}^{-1} yr^{-2}, \quad (\text{A6.4})$$

$$c \approx 6,324 \cdot 10^4 AU yr^{-1}, \quad (\text{A6.5})$$

$$\kappa \approx 6,192 \cdot 10^{-17} AU^{-1} M_{\odot}^{-1} yr^2 \quad (\text{A6.6})$$

A7. Runge-Kutta para Schwarzschild

Usaré el método de Runge-Kutta de 4 orden para resolver la ecuación

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} - \frac{3}{2} r_g u^2 + u = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{A7.1})$$

Runge-Kutta es un método para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, transformaremos esta ecuación de segundo orden en dos ecuaciones de primer orden relacionadas, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{du(\varphi)}{d\varphi} &= y(\varphi) \\ \frac{dy(\varphi)}{d\varphi} &= \frac{1}{\lambda} + \frac{3}{2} r_g u^2(\varphi) + u(\varphi) \end{aligned}$$

de este sistema de ecuaciones encontramos las siguientes relaciones de recurrencias

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(l_0 + 2l_1 + 2l_2 + l_3) \quad (\text{A7.2})$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \quad (\text{A7.3})$$

donde

$$l_0 = h \left(\frac{1}{\lambda} - u_n + \frac{3}{2} r_g u_n^2 \right) \quad k_0 = h y_n \quad (\text{A7.4})$$

$$l_1 = h \left[\frac{1}{\lambda} - u_n - \frac{1}{2} k_0 + \frac{3}{2} r_g \left(u_n + \frac{1}{2} k_0 \right)^2 \right] \quad k_1 = h \left(y_n + \frac{1}{2} l_0 \right) \quad (\text{A7.5})$$

$$l_2 = h \left[\frac{1}{\lambda} - u_n - \frac{1}{2} k_1 + \frac{3}{2} r_g \left(u_n + \frac{1}{2} k_1 \right)^2 \right] \quad k_2 = h \left(y_n + \frac{1}{2} l_1 \right) \quad (\text{A7.6})$$

$$l_3 = h \left[\frac{1}{\lambda} - u_n - k_2 + \frac{3}{2} r_g (u_n + k_2)^2 \right] \quad k_3 = h \left(y_n + \frac{1}{2} l_2 \right) \quad (\text{A7.7})$$

y para los valores iniciales fijaremos la energía y $u(0)$. Fijando la energía podemos hallar $du/d\varphi$ de (3.3.19). Lo que debemos tener cuidado es que nuestro par (posición inicial, energía) debe estar por encima de la curva del potencial efectivo, ya que cualquier punto debajo de esta curva no tiene sentido físico ya que nos daría velocidades imaginarias.

En el caso de geodésicas *null* es similar solamente que la ecuación diferencial es homogénea, esto quiere decir que $1/\lambda = 0$.