UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD DEL CUSCO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA, INFORMÁTICA Y MECÁNICA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

TESIS

PROPUESTA DE UN MODELO MATEMÁTICO EN EL ESPACIO DE ESTADOS MEDIANTE SIMULACIÓN EN MATLAB PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO DEL TRANSFORMADOR TRIFÁSICO DE DISTRIBUCIÓN

PRESENTADO POR:
Br. NINO ELMER YUCRA TOLEDO

Br. CHARLES CESAR YUCRA TOLEDO

PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE INGENIERO ELECTRICISTA

ASESOR:
Dr. Ing. WILBERT JULIO LOAIZA CUBA

CUSCO – PERÚ
2024

INFORME DE ORIGINALIDAD

(Aprobado por Resolución Nro.CU-303-2020-UNSAAC)

El que suscribe, **Asesor** del trabajo de investigación/tesis titulada: PROPUESTA DE UN MODELO MATEMÁTICO EN EL ESPACIO DE ESTADOS MEDIANTE SIMULACIÓN EN MATLAB PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO DEL TRANSFORMADOR TRIFASICO DE DISTRIBUCIÓN

Presentado por: Br. NINO ELMER YUCRA TOLEDO DNI N° 46622093
presentado por: Br. CHARLES CESAR YUCRA TOLEDO DNI N°: 42817619
Para optar el título profesional/grado académico de INGENIERO ELECTRICISTA

Informo que el trabajo de investigación ha sido sometido a revisión por 2 veces, mediante el Software Antiplagio, conforme al Art. 6° del ***Reglamento para Uso de Sistema Antiplagio de la UNSAAC*** y de la evaluación de originalidad se tiene un porcentaje de 7 **%.**

Evaluación y acciones del reporte de coincidencia para trabajos de investigación conducentes a grado académico o título profesional, tesis

Porcentaje	**Evaluación y Acciones**	**Marque con una (X)**
Del 1 al 10%	No se considera plagio.	X
Del 11 al 30 %	Devolver al usuario para las correcciones.	
Mayor a 31%	El responsable de la revisión del documento emite un informe al inmediato jerárquico, quien a su vez eleva el informe a la autoridad académica para que tome las acciones correspondientes. Sin perjuicio de las sanciones administrativas que correspondan de acuerdo a Ley.	

Por tanto, en mi condición de asesor, firmo el presente informe en señal de conformidad y **adjunto** las primeras páginas del reporte del Sistema Antiplagio.

Cusco, 21 de ABRIL de 2025

Firma

Post firma WILBERT JULIO LOAIZA CUBA

Nro. de DNI 23829491

ORCID del Asesor 0000-0003-3901-3178

Se adjunta:

1. Reporte generado por el Sistema Antiplagio.
2. Enlace del Reporte Generado por el Sistema Antiplagio: **oid:**
https://unsaac.turnitin.com/viewer/submissions/oid:27259:451157967?locale=es-MX

CESAR_NINO YUCRA TOLEDO

PROPUESTA DE UN MODELO MATEMÁTICO EN EL ESPACIO DE ESTADOS MEDIANTE SIMULACIÓN EN MATLAB PARA EVALUA

Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

Detalles del documento

Identificador de la entrega

trn:oid:::27259:451157967

Fecha de entrega

21 abr 2025, 2:02 p.m. GMT-5

Fecha de descarga

21 abr 2025, 2:23 p.m. GMT-5

Nombre de archivo

Tesis Yucra - Toledo Final.pdf

Tamaño de archivo

5.8 MB

239 Páginas

40.344 Palabras

225.511 Caracteres

7% Overall Similarity

The combined total of all matches, including overlapping sources, for each database.

Filtered from the Report

- Bibliography
- Quoted Text
- Cited Text
- Small Matches (less than 15 words)

Exclusions

- 29 Excluded Matches

Top Sources

7% Internet sources
0% Publications
3% Submitted works (Student Papers)

Integrity Flags

2 Integrity Flags for Review

Replaced Characters
99 suspect characters on 33 pages
Letters are swapped with similar characters from another alphabet.

Hidden Text
1367 suspect characters on 87 pages
Text is altered to blend into the white background of the document.

Our system's algorithms look deeply at a document for any inconsistencies that would set it apart from a normal submission. If we notice something strange, we flag it for you to review.

A Flag is not necessarily an indicator of a problem. However, we'd recommend you focus your attention there for further review.

DEDICATORIA

A mis padres. Este trabajo de tesis es el resultado final de todo el esfuerzo que pusieron sobre nosotros, ese sacrificio, amor incondicional que nos brindaron en todo momento para poder desarrollarnos académica y profesionalmente, este éxito académico es de ustedes.

AGRADECIMIENTO

Quisiéramos expresar nuestro más profundo agradecimiento a nuestro tutor y asesor de tesis, Dr. Ing. Wilber Julio Loaiza Cuba. Que con su paciencia y experiencia fue un apoyo fundamental para el desarrollo del trabajo de tesis, que con su confianza y motivación puesta en nosotros nos impulsó a seguir adelante ante cualquier adversidad.

A nuestra Universidad San Antonio Abad del Cusco. Gracias por acogernos y brindarnos la oportunidad de crecer académica y profesionalmente, nuestro agradecimiento también va a todo el departamento académico, a la plana docente que con su guía y enseñanza nos impulsaron a ser grandes profesionales con valores, y estar a la vanguardia de las circunstancias.

A nuestra familia, muy en especial a nuestros padres, agradecemos profundamente por todo el amor y apoyo incondicional que nos brindaron en todo el proceso de nuestra crecimiento académico y profesional, que, con su fe, sus consejos y enseñanzas de valores nos alentaron a seguir adelante y no detenernos hasta cumplir ese bonito sueño, el de ser profesionales, muchas gracias por darnos ese pequeño empujón que faltaba para poder completar este difícil y bonito camino.

A todos gracias por ser parte de este bonito proceso.

PRESENTACIÓN

Señor: Decano de la facultad de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, Informática y Mecánica.

Señores: Miembros del dictamen de tesis:

De acuerdo con las normas vigentes para grados y títulos de la Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco y para optar al Título Profesional de Ingeniero Electricista, presentamos a vuestra consideración la tesis titulada:

PROPUESTA DE UN MODELO MATEMÁTICO EN EL ESPACIO DE ESTADOS MEDIANTE SIMULACIÓN EN MATLAB PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO DEL TRANSFORMADOR TRIFÁSICO DE DISTRIBUCIÓN.

La tesis tiene como aporte desarrollar el diagrama de bloques en Simulink y el lenguaje de programación en el Script del Matlab del transformador trifásico en su conexión delta – estrella a partir de la propuesta de implementación del modelo matemático en el espacio de estados previa formulación de sus ecuaciones diferenciales existentes; de manera que, implementado el código script, es capaz de llamar al diagrama de bloques implementado en Simulink para obtener los resultados como la corriente en el primario, la corriente en el secundario, tanto los de línea como los de fase, la existencia de los fenómenos transitorios, desfases, distorsiones de la onda de señal para diferentes resistencias de cargas (Rc) en el secundario del transformador considerando que el material ferromagnético tenga un comportamiento lineal. Y a su vez, apoye con la enseñanza y el aprendizaje para el estudio de las máquinas eléctricas estáticas en forma teórica y práctica.

RESUMEN EJECUTIVO

Con base en la existencia de las ecuación diferenciales, se implementa el modelo matemático en el espacio de estados del transformador trifásico de distribución, así como el desarrollo del diagrama de bloques en Simulink y el lenguaje de programación en el Script del Matlab, de tal manera que implementado el código script, será capaz de llamar al diagrama implementado en Simulink para obtener los resultados como la corriente en el primario, la corriente en el secundario, tanto los de línea como los de fase, la existencia de los fenómenos transitorios, desfases, distorsiones de la onda de señal para diferentes valores de carga en el secundario del transformador.

Descrito el problema nuestro propósito es efectivamente a partir de la existencia de las ecuaciones diferenciales implementar el modelo matemático en el espacio de estados y a su vez desarrollar el diagrama de bloques en Simulink y el lenguaje de programación en el script del Matlab, para obtener la curva de las corrientes del primario y secundario y en ella ver si existe transitorios, desfases o distorsiones considerando diferentes valores de carga en el secundario del transformador ya que Matlab/Simulink es un software que posibilita su uso para este fin en cuanto a las simulaciones y permitiéndonos utilizar sus herramientas de forma interactiva.

Al ser una tesis de ingeniería, la metodología empleada para nuestra tesis tiene un nivel netamente descriptivo, explicativo y propositivo.

Concluyendo que se logra implementar el modelo matemático en el espacio de estados del transformador de distribución, así como su diagrama de bloques a partir de su circuito monofásico equivalente en el Simulink y el lenguaje de programación en el script del Matlab. De modo tal que se obtiene, se comprende e interpreta de manera interactiva los resultados de los diferentes parámetros eléctricos del transformador previa simulación como es el caso de las corrientes del primario y secundario tanto de línea como de fase, en algunos casos existiendo fenómenos transitorios, desfases y distorsiones en la onda de señal para diferentes valores de resistencias de cargas en el secundario del transformador.

Palabras clave:

Transformador, electromagnetismo, impedancia, Matlab.

ATENTAMENTE.

Br. Nino Elmer Yucra Toledo

Br. Charles Cesar Yucra Toledo

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la presente tesis muestra la importancia de aplicar el software Matlab, así como la herramienta (toolbox) Simulink para estudiar fenómenos instantáneos que ocurren en las maquinas estáticas. En nuestro caso; estudiaremos primero al transformador monofásico para luego analizar un banco trifásico en conexión Delta – Estrella, siendo una de las conexiones más utilizadas y fundamentadas como tamaño muestral; además también se implementa el diagrama de bloque en Simulink y el lenguaje de programación en el script en el Matlab a partir de los modelos matemáticos existentes.

La tesis consta de 5 capítulos, siendo el capítulo 1, referente a los aspectos generales, seguida del capítulo 2 referente al marco teórico, el capítulo 3 trata de la formulación de propuesta, los capítulos 4 y 5 de la implementación del modelo y los resultados obtenidos respectivamente, por lo que:

En el capítulo I: trata de la formulación del problema, desde el planteamiento del problema, los objetivos, alcances, limitaciones, estados del arte, población y muestra para finalmente concluir con la matriz de consistencia.

En el capítulo II: se desarrolla la teoría de la maquina estática monofásica y trifásica.

En el capítulo III: se desarrollan los distintos modelos matemáticos mediante ecuaciones diferenciales que puede tener la maquina estática, como: Modelo del transformador en ecuaciones diferenciales listos para la implementación de su diagrama de bloques en el Simulink y el lenguaje de programación en el script del Matlab, y previa simulación obtener los resultados de los parámetros eléctricos. Seguidamente, se desarrollan los distintos modelos matemáticos mediante ecuaciones en el espacio de estado que puede tener la maquina estática, como: Modelo del transformador en espacio de estado listos para la implementación de su diagrama de bloques en el Simulink y el lenguaje de programación en el script del Matlab, y previa simulación obtener los resultados de los parámetros eléctricos.

En el capítulo IV: a partir del capítulo III y como aporte de nuestra tesis, se implementa el diagrama de bloques en Simulink y el lenguaje de programación en el script del Matlab de la maquina estática monofásica y trifásica con carga balanceada y desbalanceada, es decir, un banco trifásico en la conexión Delta – Estrella (Δ – Y), para los modelos matemáticos en ecuaciones diferenciales y ecuaciones en el espacio de estado del transformador trifásico a partir del modelo del transformador monofásico.

En el capítulo V: de la misma manera que los desarrollados en el capítulo IV, Se implementa el diagrama de bloques y el lenguaje de programación en el script del Matlab para 4 casos distintos o valores en cuanto a la resistencia de carga en el secundario del transformador trifásico en su conexión delta – estrella, para luego comparar los resultados obtenidos concluyendo con un cuadro comparativo resumen. Para finalizar con:

Las conclusiones, sugerencias y/o comentarios, la bibliografía y los anexos de la tesis.

CONTENIDO DE LA TESIS

ÍNDICE DE FIGURAS.

ÍNDICE DE TABLAS.

ÍNDICE DE CUADROS.

ÍNDICE DE GRÁFICOS.

ÍNDICE DE ANEXOS.

TERMINOLOGÍA USADA

Editor Matlab: Permite escribir los códigos de manera script para que Matlab lo lea y ejecute.

Command Windows Matlab: Permite ejecutar códigos de líneas de comandos secuenciales, también sirve para prueba de funciones sencillas mostrando los resultados correspondientes.

Command History Matlab: Todos los comandos ingresados al Command Window son guardados en esta ventana, incluyendo los comandos de sesiones pasadas.

Workspace Matlab: Espacio de trabajo donde se guarda todo el conjunto de variables y funciones de usuario y de la función que se están ejecutando.

Variables Matlab: Permite ver los valores de los elementos de cualquier matriz o vector definido en el programa y también modificarlas.

Current Folder Matlab: En el directorio activo, se encuentran los programas de MATLAB en ficheros con la extensión .m Permite ordenar los ficheros por tamaño etc.

Help Matlab: Permite disponer de la información que se deseé.

Run and Time Matlab: Permite saber cómo se emplea el tiempo de la CPU en la ejecución de un determinado programa.

Script del Matlab: Son archivos cuyo contenido disponen varias líneas consecutivas en cuanto a los comandos y llamadas a funciones, siendo útiles para automatizar series de comandos en Matlab.

Simulink: Es un entorno de diagrama de bloques utilizados para diseñar sistemas con modelos multidominio visual y que funciona con el entorno Matlab.

GLOSARIO DE TÉRMINOS USADOS

Símbolo	**Descripción**	**Unidad**
$e_1(t)$, $e_2(t)$,	Fuerza electromotriz inducida	voltios
E_1, E_2	Fuerza electromotriz inducida	voltios
$v_1(t)$	Voltaje del primario en el tiempo	voltios
$v_2(t)$	Voltaje del secundario en el tiempo	voltios
V_1	Voltaje fasorial del primario	voltios
V_2	Voltaje fasorial del secundario	voltios
V_{L1}, V_{L2} V_{L3}	Voltajes de línea del primario del banco	voltios
V_{F1}, V_{F2} V_{F3}	Voltajes de fase del secundario del banco	voltios
$i_1(t)$	Corriente del primario en el tiempo	amperios
$i_2(t)$	Corriente del secundario en el tiempo	amperios
I_1	Corriente fasorial de primario	amperios
I_2	Corriente fasorial del secundario	amperios
Ir	Corriente de perdidas	amperios
Im	Corriente de magnetización	amperios
I_{RS}	Corriente de fase	amperios
I_R	Corriente de línea	amperios
R1	Resistencia del bobinado primario	ohmios
R_2	Resistencia del bobinado secundario	ohmios
R_C	Resistencia de perdidas	ohmios
X_1	Reactancia del bobinado primario	ohmios
X_2	Reactancia del bobinado secundario	ohmios
X_m	Reactancia de magnetizacion	ohmios
Z_1	Impedancia del bobinado primario	ohmios

Z_2	Impedancia del bobinado secundario	ohmios
Z_L	Impedancia de la carga	ohmios
Y	Admitancia	mhos
B	Susceptancia	mhos
φ_{11}	Flujo de dispersión del primario	weber
φ_{22}	Flujo de dispersión del secundario	weber
φ_{12}	Flujo que enlaza primario y secundario	weber
φ_{21}	Flujo que enlaza secundario y primario	weber
φ_1	Flujo total del primario	weber
φ_2	Flujo total del secundario	weber
Ψ	Enlace de flujo	wb*A-V
N_1	Numero de espiras del primario	vueltas
N_2	Numero de espiras del secundario	vueltas
f	Frecuencia	hert
ω	Frecuencia angular	radianes/seg.
L_{11}	Inductancia de dispersión del primario	henrio
L_{22}	Inductancia de dispersión del secundario	henrio
$L_{12} = L_{21}$	Inductancias mutuas	henrio
N_{p1}, N_{p2}, N_{p3}	Numero de espiras del primario del banco	vueltas
N_{s1}, N_{s2}, N_{s3}	Numero de espiras del secundario del banco	vueltas
λ	Flujo por número de espiras	weber*espiras
ρ	Permeancia del material	weber/a-v
Δ	Conexión delta	
Y	Conexión estrella	

CAPÍTULO I

1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

1.1. Introducción.

La evolución científica y tecnológica en el campo académico es siempre el compromiso entre lo deseable y lo posible. De una interacción entre la teoría y la práctica. Las expresiones de necesidades y los requerimientos de la enseñanza y el aprendizaje dinamizan la innovación del conocimiento y recíprocamente el progreso académico que conduce a la manifestación de nuevas necesidades.

En tal sentido, existe un gran interés en aprender las máquinas eléctricas estáticas, saber evaluar el comportamiento bajo diversas circunstancias de operación y funcionamiento de estas máquinas. Por otro lado, para la enseñanza y el aprendizaje se necesita desarrollar de mejor manera el estudio de las máquinas eléctricas en su forma teórica y práctica, y como complemento simularlos de manera interactiva en Matlab/Simulink, ya que este software interactúa con el entorno Windows, cuenta con menús desplegables de fácil acceso y comprensible para las personas que se interesen en el tema de las máquinas eléctricas estáticas.

> Se sabe que el transformador funciona según el principio de la inducción mutua entre dos o más bobinas o circuitos acoplados inductivamente y que, según el grado de acoplamiento magnético entre los dos circuitos, la energía se transfiere del primer circuito al segundo circuito según la ley de Faraday. Sí las dos bobinas o circuitos están devanados sobre un núcleo de hierro común, están fuertemente acoplados. **(Fraile, 2003)**.

En tal caso, casi toda la energía recibida de la alimentación por el primario se transfiere al secundario debido a la acción transformadora. En un transformador real, en el proceso de transferencia de energía se presentan flujos de dispersión que sólo cortan uno de los devanados;

adicionalmente, hay histéresis, corrientes parásitas y pérdidas en el cobre. Estos aspectos los tienen en consideración el circuito equivalente del transformador.

Si se aplican voltajes nominales a sus terminales señalados de entrada, a cada uno de los transformadores, se presentarán todas estas afirmaciones y como características de respuestas tendrán diferentes magnitudes y comportamientos, lo que, en la práctica, no siempre es fácil, determinar los parámetros bajo diferentes condiciones de carga de estos transformadores.

Por tal motivo, y con fines de carácter académico es factible demostrar los parámetros, característicos e internos como la inductancia propia o autoinductancias, las inductancias mutuas entre bobinados, los flujos magnéticos de dispersión, inclusive el efecto piel y efecto de proximidad entre bobinas, la existencia de la saturación magnética del núcleo, histéresis, perdidas por corriente Eddy en el núcleo y efectos capacitivos, los parámetros de tensión, corriente, desfases, etc. Por lo que estas situaciones se podrán realizar mediante el análisis teórico, así como las simulaciones y los cálculos computacionales empleando Matlab/Simulink.

1.2. El problema.

1.2.1. Planteamiento del problema.

En la actualidad existen diversos modelos matemáticos desarrollados para el tema de las maquinas eléctricas estáticas, específicamente hablando para transformadores ya sea monofásicos o trifásicos, conceptos desde el punto de vista ideal, real, incluyendo los circuitos equivalentes, el tipo de conexionados conexión triángulo – triángulo, (Δ - Δ), conexión estrella – estrella, (Y-Y), conexión triángulo – estrella, (Δ -Y) y la conexión estrella – triangulo, (Y-Δ). Modelos matemáticos mediante ecuaciones diferenciales que dependen de resistencias, autoinductancias e inductancias mutuas. Mediante ecuaciones en espacio de estado que necesitan incluir diagramas de bloques a partir de las ecuaciones diferenciales con resolución matricial y la relación de la función de transferencia; por lo que, para su complemento en cuanto al fácil aprendizaje. Se requiere de un análisis desde el punto de vista simulativo. Es decir, que los modelos matemáticos existentes mediante ecuaciones diferenciales y espacios de estado sean implementados en Matlab/Simulink ya que interactúa con el entorno Windows, siendo capaz de implementar algoritmos, análisis de datos, visualización y el cálculo propiamente dicho; a su vez, tiene un entorno gráfico para simulación basados en modelos de sistemas dinámicos como bloques, por ejemplo. Permite construir modelos de manera interactiva, lenguaje de programación script. Con el fin de poder crear gráficos de visualización interactiva. De tal manera, a partir de la introducción de datos, nos permita aprender teóricamente, y a nivel práctico visualizar y comprender interactivamente de mejor manera el comportamiento gráfico y posterior a ello, analizar, evaluar e interpretar los resultados de los de los parámetros eléctricos equivalentes de un transformador trifásico a partir del monofásico; por otra parte, analizar diversos escenarios de funcionamiento ya sea con cargas balanceadas, desbalanceadas.

Dicho de otra manera, a partir de la ecuación diferencial del transformador trifásico, se requiere implementar el diagrama de bloques en Simulink y el lenguaje de programación en el Script del Matlab para diferentes conexionados, de tal manera que implementado el código script, será capaz de llamar al diagrama implementado en Simulink para obtener los resultados como la corriente en el primario, la corriente en el secundario, tanto los de línea como los de fase, la existencia de los fenómenos transitorios, desfases, distorsiones de la onda de señal para diferentes valores de resistencias de cargas (Rc) en el secundario del transformador. Al igual que la implementación en sus ecuaciones en espacio de estado y que nos permita comparar dichos resultados previa simulación. Suponiendo que el material ferromagnético tenga un comportamiento lineal es decir valores no saturados o valores por debajo del codo de saturación (relación entre la corriente de vacío y el voltaje aplicado al primario, ya que en este punto permanecerá constante la inductancia mutua magnetizaste). Ya que Matlab/Simulink es un software que posibilita su uso para estos fines en cuanto a las simulaciones y permitiéndonos utilizar sus herramientas de forma interactiva.

1.2.2. Formulación del problema.

1.2.2.1. Problema general.

¿Sera posible proponer un modelo matemático de espacio de estado en Matlab para evaluar el comportamiento del trasformador trifásico de distribución?

1.2.2.2. Problemas específicos.

1. A partir de las ecuaciones diferenciales existentes, ¿Sera posible formular un modelo matemático en espacios de estados para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución?

2. A partir de la formulación del modelo matemático en espacios de estados, ¿será posible implementar el lenguaje de programación en el script de Matlab y el diagrama de bloques es Simulink para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución?

1.3. Objetivos.

1.3.1. Objetivo general.

Proponer un modelo matemático en el espacio de estado mediante simulación en Matlab para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución.

1.3.2. Objetivos específicos.

1. Formular un modelo matemático en espacio de estados para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución

2. Implementar el lenguaje de programación en el script de Matlab y el diagrama de bloques es Simulink para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución.

1.4. Justificación de la tesis.

1.4.1. Técnica.

La tesis tiene mucha importancia ya que se trata de nuevos aportes al campo de la disciplina en estudio, porque permite implementar el diagrama de bloques en Simulink y el lenguaje de programación en Matlab a partir del modelo matemático del transformador monofásico y trifásico ya sea en ecuaciones diferenciales y ecuaciones de espacio de estado. Posterior a ello simular de manera didáctica y que ayude al estudiante universitario a visualizar, analizar las características internas que representen el comportamiento y su operatividad del transformador, para minimizar el tiempo de desarrollo y estudio de la maquina estática con el fin de su comprensión teórico y práctico.

También es una forma explicativa para que el estudiante pueda interpretar de la mejor manera a partir de las simulaciones gráficas del transformador, los diferentes resultados obtenidos para que finalmente llegue a sus propias conclusiones.

1.4.2. Conveniencia.

La tesis se considera conveniente, debido a su utilidad, respondiendo a la pregunta ¿para qué sirve? siendo esta, un medio de enseñanza y aprendizaje que permita desarrollar de mejor manera el estudio de las máquinas eléctricas estáticas en forma teórica y práctica, basado en la implementación del diagrama de bloque en Simulink y el lenguaje de programación en el script del Matlab a partir del modelamiento matemático de las maquinas eléctricas estáticas, para luego simularlas y más aun refiriéndose a la calidad de la pedagogía de enseñanza universitaria para finalmente obtener algún escalón o grado más en el conocimiento científico humanístico.

1.4.3. Relevancia social.

La tesis de alguna manera, ayudar a resolver los diferentes problemas existentes referidos al tema y que afectan a un grupo social con intereses personales, está ayuda (por ejemplo) al empoderamiento de algunos grupos vulnerables en conocimiento o simplemente al estudio de métodos como el caso de la programación que ayuda bastante a la automatización para desarrollar los modelos matemáticos del transformador monofásico y trifásico, que permita aumentar la satisfacción en la calidad de aprendizaje del estudiante y a su vez para un grupo social o público lector quien lo revise.

1.4.4. Implicancias prácticas.

Se considera práctica, porque la tesis ofrece conceptos de mayor amplitud, ya que nuestro tema cuenta con el desarrollo que ayuda a resolver un problema de entendimiento en cuanto a los parámetros característicos internos, externos que representen la operatividad del transformador monofásico y trifásico y por considerarse un tema complejo fundamentada en nuestro planteamiento del problema. Empleando el aprendizaje teórico practico de manera eficiente para posteriormente implementar estrategias con códigos de lenguaje de programación que al ponerse en práctica contribuyen a la solución práctica. Existiendo así, aportes nuevos al conocimiento del tema.

1.4.5. Utilidad metodológica.

Debido a que nuestra tesis desarrolla, implementa diagramas de bloques y el lenguaje de programación el script de Matlab partir del desarrollo de modelos matemáticos del transformador para posteriormente simularlo y así obtener un conocimiento con resultados válidos o confiables tiene una utilidad metodológica.

Ya que existe gran presión sobre las máquinas eléctricas, en el sentido que la evolución de la técnica y calidad de los materiales magnéticos utilizados están vinculadas estrechamente a los transformadores y las máquinas eléctricas y la evaluación del comportamiento bajo diversas circunstancias de operación y funcionamiento de estas. La tesis con fines de carácter académico pretende incrementar el actual proceso de implementación, actualización y modernización, mediante la aplicación de conceptos, ordenes, comandos, etc. con los sistemas informáticos en los diversos campos y áreas de las diferentes especialidades, así como en el estudio de diferentes temas,

Gracias a la enseñanza impartida por nuestros docentes de la UNSAAC, en el campo de las Máquinas Eléctricas e Informática, se pueden realizar mediante análisis, las evaluaciones teóricas y experimentales, para ello requerimos implementar los diagramas de bloques y el lenguaje de programación en el script del Matlab que nos permita desarrollar, aplicar los conceptos, definiciones teóricas estudiadas; para luego desarrollar un marco experimental y una evaluación de sus parámetros, características internas y externas de funcionamiento, comportamiento etc. A partir de las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones de espacio de estado del transformador eléctrico. Por ende, esta tesis sea un medio de enseñanza y aprendizaje, ya que permite desarrollar de mejor manera el estudio de las maquinas eléctricas en su forma teórica y práctica.

1.4.6. Justificación no doctrinaria.

Ya que, como tesistas desarrollamos un aporte con criterios, técnicos, fiables (revisión con expertos) y pensamientos críticos constructivos en torno al tema y a nuestra postura, dando a entender la existencia de estos modelos matemáticos de la maquina estática y como aporte implementar el diagramas de bloque y el código del lenguaje de programación en Matlab sin la necesidad de una imposición al público lector, ya que ellos son libres de su entendimiento y sus posteriores conclusiones personales al campo de la ciencia en torno al tema de tesis, y puesto que no buscamos modificarlas, sino más bien detallarlas para que los lectores comprendan dicho tema.

1.5. Alcances de la tesis.

El alcance de la investigación está dado principalmente por la pretensión de formular el diagrama de bloques en Simulink y el código del lenguaje de programación en el script del

Matlab para representar el modelo matemático que contempla la ecuación diferencial y la ecuación de espacio de estado del transformado monofásico y trifásico, guardando en todo instante la relación entre el marco teórico y el proceso, debido a que se entra directamente al desarrollo del mismo proyecto, en cada etapa, dando lugar a la aplicación directa de los conceptos teóricos desarrollados y del objetivo del proyecto. Las fuentes bibliográficas muestran informaciones técnicas, algunos antecedentes relativos, conclusiones y experiencias relacionadas con el proyecto, dado a que una información más específica facilitaría el acceso a la proliferación del sistema y deformación de tecnología. Utilizando fuentes bibliográficas fiables y de la actualidad.

En ese sentido se pretende abordar lo siguiente:

1. El desarrollo del modelo matemático del transformador tanto en ecuaciones diferenciales como en las ecuaciones en espacio de estado para su conexión delta – estrella.

2. El análisis cuidadoso del algoritmo y pruebas de seguimiento en el software utilizado.

3. Implementación de la ecuación diferencial en diagramas de bloques en Simulink.

4. Implementación de la ecuación diferencial en lenguaje de programación en el script del Matlab.

5. Implementación de la ecuación en espacio de estado en diagramas de bloques en Simulink.

6. Implementación de la ecuación en espacio de estado en lenguaje de programación en el script del Matlab.

7. Obtención de los resultados.

8. Comparación de los resultados.

9. Conclusiones

Previa utilización de los siguientes parámetros.

A. Parámetros técnicos.

- Potencia.
- Nivel de tensión del Primario.
- Nivel de tensión del Secundario.
- Corriente de la bobina del Primario.
- Corriente de las bobinas del Secundario.
- Relación de Transformación.
- Frecuencia
- Incluye inductancias magnetizantes, etc.

B. Parámetros computacionales.

- Modelo matemático.
- Diagrama de bloques en Simulink.
- Lenguaje de Programación en el script de Matlab.

1.6. Limitaciones de la tesis.

No importa que formemos un insignificante grano de arena en la ciencia. Ya que es importante su exploración correcta surgiendo así, toda una serie de ramificaciones que lo hacen importante y valioso, en este sentido:

- No incluye modelos matemáticos para los análisis transitorios electromagnéticos en trasformadores, ya que los fenómenos electromagnéticos y su comportamiento de los devanados primarios y secundarios son de causa efecto de nuestra simulación.

- Como muestra, se simula al trasformador trifásico de distribución en su conexión **delta - estrella** para cuatro casos distintos con (Rc) resistencia de carga en el secundario del transformador.

1.7. Hipótesis.

1.7.1. Hipótesis General.

Es posible proponer un modelo matemático de espacio de estado en Matlab para evaluar el comportamiento del trasformador trifásico de distribución.

1.7.2. Hipótesis Especifica específicos.

1. A partir de las ecuaciones diferenciales existentes, Es posible formular un modelo matemático en espacios de estados para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución.

2. A partir de la formulación del modelo matemático en espacios de estados, Es posible implementar el lenguaje de programación en el script de Matlab y el diagrama de bloques es Simulink para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución.

1.8. Variables.

1.8.1. Variable independiente.

Modelo matemático en el espacio de estados

1.8.2. Variable dependiente.

Comportamiento del transformador trifásico de distribución

1.9. Indicadores

1.9.1. Referido a la variable independiente.

- Ecuaciones según tipo (ordinal o parcial)
- Ecuación según orden (1er, 2do…etc)

- Ecuación según grado (Lineales, no lineales)

1.9.2. Referido a la variable dependiente.

- Tensión
- Corriente
- Relación transformación
- Frecuencia
- Transitorios
- Armónicos

1.10. Operacionalización de variables.

Se muestra en el cuadro 1.1:

Cuadro 1.1

Operacionalización de variables.

VARIABLES	DEFINICIÓN CONCEPTUAL	DEFINICIÓN OPERACIONAL	DIMENSIONES	INDICADORES	RESPUESTA	INSTRUMENTOS
MODELO MATEMÁTICO EN EL ESPACIO DE ESTADOS	Es una descripción en lenguaje matemático de un objeto existente en un universo no matemático. (Doxrud, 2013)	Viene a ser la representación de forma matricial y en bloques: es decir, la representación de las ecuaciones diferenciales del trasformador (expresión matemática) en forma de diagrama de bloques, llamado espacios de estado. Esto con el fin de evaluar su comportamiento.	• Ecuaciones diferenciales	• Ecuaciones según tipo (ordinal o parcial) • Ecuación según orden (1er, 2do…etc) • Ecuación según grado (Lineales, no lineales)	• Inductancias (H) • Flujo (Wb)	• Simulink (Expresiones matriciales en diagrama de bloque)
COMPORTAMIENTO DEL TRANSFORMADOR TRIFÁSICO DE DISTRIBUCIÓN	Maquina eléctrica estática que tiene el fin de aumentar o disminuir los niveles de tensión para una señal alterna. (Villanueva, 2013)	Maquina eléctrica que se basa en los principios de inducción electromagnética con el fin de cambiar los niveles detención y corriente en el secundario manteniendo una frecuencia constante.	• Parámetros eléctricos	• Tensión • Corriente • Relación transformación • Frecuencia	• Voltios • Amperios • a=N1/N2 • Hz	• Matlab (códigos de programación, código Script)
			• Perturbaciones	• Transitorios • Armónicos	• kV, Ka, kHZ • THD	

Fuente: Elaboración propia.

1.11. Metodología.

1.11.1. Tipo de investigación.

La tesis tiene un enfoque CUALITATIVO (APLICADO) por lo que proporciona una metodología de investigación que nos permite comprender de mejor manera el complejo tema de las maquinas estáticas como el transformador y su implementación del diagrama de bloques en Simulink y el lenguaje de programación en el script de Matlab a partir de los diferentes modelos matemáticos de los parámetros característicos internos que representa su operatividad, desde nuestro punto de vista, entorno a nuestros pensamientos críticos constructivos. Ya que se caracteriza por ser una investigación que privilegia el análisis profundo y reflexivo de los significados subjetivos e intersubjetivos formando parte de la realidad estudiada.

1.11.2. Nivel de la investigación.

El nivel de investigación es DESCRIPTIVO, EXPLICATIVO y PROPOSITIVO: Esto se debe a que la entidad pública o privada con la ayuda del contenido de la tesis tenga una metodología de enseñanza que repercuten positivamente al aprendizaje del interesado empleando el lenguaje de programación para su simulación a partir del concepto teórico práctico del modelo matemático del transformador.

Por otro lado, permitirá determinar las razones, causas o relaciones principales entre los fenómenos electromagnéticos, el comportamiento de los parámetros eléctricos del primario y secundario del transformador. Y Finalmente PROPOSITIVO ya que se plantea una propuesta de solución.

1.11.3. Método de la investigación.

De acuerdo con las referencias existentes, esta tesis combina los métodos INDUCTIVO y DEDUCTIVO. Es decir, utilizamos un método mixto que puede establecer o guiar una generalización de efectos y resultados por la relación de estos métodos.

Por lo que podemos presumir que, la falta de la implementación de los diagramas de bloques en el Simulink y el lenguaje de programación en el script del Matlab a partir de los modelos matemáticos del transformador, repercuten en el aprendizaje del interesado.

Es decir: existe modelos matemáticos que se desarrollan de manera teórica y hace falta simularlos a partir estos modelos, por lo cual no existe aprendizaje eficiente. Por otro lado, es deductivo por lo que llegaremos a nuestras conclusiones previa consecuencia y la validación de nuestra hipótesis, existiendo así una justificación científica mas no de presunción o supuestos.

1.11.4. Diseño de la investigación.

La tesis tiene un diseño EXPERIMENTAL debido a que se proponen la implementación de los diagramas de bloques y el lenguaje de programación en el script a partir de modelos simplificados que permite identificar y cuantificar las causas de un efecto ya que nuestra causa es la falta códigos de programación para el desarrollo de los modelos matemáticos del transformador, siendo su efecto la repercusión del aprendizaje si no existiese la simulación que implica la práctica para el buen entendimiento del tema. Ya que manipulamos deliberadamente nuestra variable independiente (conexión delta - estrella), vinculadas a las causas, para medir nuestro efecto.

1.12. Población y muestra.

1.12.1. Población.

Población comprende los transformadores de dos devanados, uno de alta y otro de baja (fase – neutro, monofásico), con cuatro devanados, dos de alta y dos de baja (dos fases – neutro, bifásico) y con 6 devanados, tres de alta y tres de baja (3 fases, trifásico), además del transformador zig-zag, etc. Con tipos de conexionados: delta– delta, delta – estrella, estrella – estrella, estrella – delta. Que se encuentra en el sistema eléctrico interconectado nacional y en todas sus conexiones de sus devanados.

1.12.2. Tamaño de la muestra.

De los diferentes tipos de conexiones existentes según descritos como población, y utilizando la técnica de muestreo no probabilístico. Es decir, se ha seccionado con intención, evitando el azar y que cumplan ciertas cualidades tales como las conexiones más utilizadas en el ámbito de la concesión eléctrica existente en nuestro medio, así como el criterio como tesista en la implementación de diagramas de bloques y el lenguaje de programación en el script a partir del modelo matemático del transformador monofásico al trifásico.

Como tamaño muestral se considera la cantidad de (01) un tipo de conexión perteneciente al tipo **Delta – Estrella.**

Respecto al tipo y los valores considerados para la resistencia de carga, se utilizó la técnica del muestreo probabilístico. Es decir, el azar y considerando valores tales como 0 ohms, 50 ohms, 110 ohms, 50000 ohms.

1.13. Técnicas e instrumentos de investigación.

Para obtener la información necesaria de nuestra tesis, se aplican técnicas de observación científica y el análisis de contenido (siendo esta un análisis sistémico de los documentos escritos, artículos, etc); por otro lado, para realizar el análisis de los datos obtenidos, es fundamental aplicar las herramientas computacionales, a través de las cuales se procesan los datos obtenidos para describirlos, organizarlos, analizarlos e interpretarlos adecuadamente. Permitiendo así, proporcionar conocimientos sólidos, nuevas formas de ver e interpretar los hechos una vez recolectada la información y presentada en tablas, gráficos, esquemas, etc. La técnica de observación se realiza de forma sistemática, así:

- Se plantea el problema de investigación.
- Se obtiene la información de la base de datos de los antecedentes bibliográficos existentes referentes al tema.
- Se formula y aplica un plan para buscar soluciones al problema de investigación.

- Se analiza y actualiza la información recogida directamente con la técnica documental y de análisis de contenido.
- Se implementa el modelo matemático de los transformadores al Matlab/Simulink, se simula.
- Se evalúan los reportes y posterior a ello, se compara los diferentes resultados obtenidos de manera adecuada.
- Finalmente, se comprende, interpreta y se explica dichos resultados interactivos desde otra perspectiva diferente al existente.

1.14. Tratamiento de datos.

Se han incluido actividades de clasificación, selección, recopilación, recepción, organización, recuperación, almacenamiento y presentación de información en forma de tablas, cuadros y gráficos.

1.15. Herramientas para el procesamiento de datos.

Se hicieron el uso de los softwares:

- Matlab, Simulink 2021a.
- Microsoft Office 2022.

1.16. Análisis de datos.

Una vez recopilado los datos de primera mano, empleando el conocimiento de ingeniería a partir de la información presentada, se procedió a sacar las conclusiones respectivas de nuestro aporte investigativo.

1.17. Matriz de consistencia.

Se muestra en el cuadro 1.2:

Cuadro 1.2

Matriz de consistencia.

MATRIZ DE CONSISTENCIA PROPUESTA DE UN MODELO MATEMÁTICO EN EL ESPACIO DE ESTADOS MEDIANTE SIMULACIÓN EN MATLAB PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO DEL TRANSFORMADOR TRIFÁSICO DE DISTRIBUCIÓN			
PROBLEMAS	**OBJETIVOS**	**HIPÓTESIS**	**CONCLUSIONES**
PROBLEMA GENERAL	OBJETIVO GENERAL	HIPÓTESIS GENERAL	CONCLUSIÓN GENERAL
¿Sera posible proponer un modelo matemático de espacio de estado en Matlab para evaluar el comportamiento del trasformador trifásico de distribución?	Proponer un modelo matemático en el espacio de estado mediante simulación en Matlab para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución.	Es posible proponer un modelo matemático de espacio de estado en Matlab para evaluar el comportamiento del trasformador trifásico de distribución.	1. Se ha demostrado que: Proponiendo el modelo matemático en el espacio de estados para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución en su conexión delta - estrella a partir del circuito monofásico equivalente mediante simulación en Matlab. Se Compre e interpreta de manera interactiva los resultados de los diferentes parámetros eléctricos del transformador.
PROBLEMAS ESPECÍFICOS	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	HIPÓTESIS ESPECÍFICOS	CONCLUSIONES ESPECÍFICAS
1. A partir de las ecuaciones diferenciales existentes, ¿Sera posible formular un modelo matemático en espacios de estados para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución? 2. A partir de la formulación del modelo matemático en espacios de estados, ¿será posible implementar el lenguaje de programación en el script de Matlab y el diagrama de bloques es Simulink para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución?	1. Formular un modelo matemático en espacio de estados para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución 2. Implementar el lenguaje de programación en el script de Matlab y el diagrama de bloques es Simulink para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución.	1. A partir de las ecuaciones diferenciales existentes, Es posible formular un modelo matemático en espacios de estados para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución. 2. A partir de la formulación del modelo matemático en espacios de estados, Es posible implementar el lenguaje de programación en el script de Matlab y el diagrama de bloques es Simulink para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución.	2. A partir de las ecuaciones diferenciales descritas en el capítulo III, se llegó a implementar el modelo matemático en espacio de estados que consta de 4 matrices siendo estas: Matriz de planta, matriz de control, matriz de salida y la matriz de acople. Así como su implementación en diagrama de bloques. 3. Con la implementación de las ecuaciones en espacio de estados, se desarrolló el diagrama de bloques en Simulink y el lenguaje de programación en el script del Matlab, obteniendo así para una resistencia de carga Rc = 0 ohm en el secundario del transformador previa simulación una corriente máxima de 34.31 A (primario) y 16.64 A (secundario) del transformador; cabe mencionar que, también existe transitorios en las corrientes tanto primario como secundario del transformador. Por otra parte, para un Rc = 50 ohm, Rc = 110 Ohm y Rc = 50000 ohm no existe transitorios, para un Rc = 50000 ohm existe desfase de ondas en el primario mas no en el secundario, aquí las ondas no sufren distorsión.
Variable independiente: Modelo matemático en el espacio de estados Variable dependiente: Comportamiento del transformador trifásico de distribución	Metodología: Tipo: Cualitativo aplicado. Nivel: Descriptivo, explicativo y propositivo. Método: Inductivo deductivo. Diseño: Experimental.	Población: Trasformadores de distribución. Muestra: Transformación distribución conexión delta-estrella Dy5.	Técnica: Análisis documental. Herramientas: MATLAB, Simulink 2021a. Microsoft Office 2022.

Fuente: Elaboración propia.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO.

2.1. Introducción.

En este capítulo se desarrollan los conceptos generales referidos al tema, con el fin de entender posteriormente el desarrollo de los modelos matemáticos del transformados, y a manera de introducción no está de más mencionar la diferencia entre un transformador ideal y real, en ese sentido:

> El transformador se considera una máquina eléctrica, que tienen devanados de entrada y salida, relacionado entre el voltaje de entrada y el voltaje de salida, además de la corriente de entrada y la corriente de salida. Un transformador ideal es una forma idealizada de transformador real, donde el núcleo no tiene pérdidas, la permeabilidad relativa del núcleo es infinita y las capacidades parásitas nulas. Mientras que, un transformador real se puede fabricar para dos o más devanados, se enrollan físicamente alrededor de un núcleo ferromagnético, a diferencia de los transformadores ideales que no se fabrican. En un transformador real no están tan adecuadamente delimitados como en un transformador ideal, pero se aproxima mucho, especialmente en unidades de alta potencia, la impedancia de magnetización es extremadamente baja, ya que esto debe tenerse en cuenta **(Villanueva, 2013)**

A manera de resumen, este capítulo comprende: conceptos de la maquina estática, el transformador ideal, relación de transformación, impedancias equivalentes del transformador, el transformador real, análisis de la curva de histéresis, circuito equivalente del transformador, pruebas en los transformadores como por ejemplo la prueba del circuito abierto, prueba del cortocircuito, el transformador en vacío, el transformador con carga, análisis vectorial del transformador, tipos de conexionados en las bobinas del trasformador, pruebas para determinar los parámetros del circuito equivalente del transformador trifásico por mediciones.

2.2. Estados de arte.

Revisando material documental relacionado con la investigación, se ubicó los siguientes:

A NIVEL NACIONAL:

• **Br. Edward Condori Rivera**, "**ESTUDIO Y ELABORACIÓN DE PROGRAMAS PARA LA OBTENCIÓN DEL PUNTO DE MÁXIMA EFICIENCIA DEL TRASFORMADOR ELÉCTRICO MEDIANTE MATLAB**", tesis para optar el título a Ingeniero electricista en la Universidad Nacional del Centro del Perú, 2021.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Obtener los parámetros del circuito equivalente del transformador con datos obtenidos de las pruebas de vacío y corto circuito del transformador eléctrico los cuales nos servirán para trazar las curvas de eficiencia versus la potencia aparente de la carga con diferentes factores de potencia y en ella encontrar el punto de máxima eficiencia.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A. Trazar las curvas de eficiencia versus la potencia aparente de la carga en base a los parámetros del circuito equivalente del transformador eléctrico.

B. Determinar el punto de máxima eficiencia en las curvas de eficiencia versus la potencia aparente de la carga con diferentes factores de potencia del transformador eléctrico.

CONCLUSIONES

Conclusión 1.

La pérdida en el hierro o en el núcleo depende del voltaje y la pérdida en el cobre o en los bobinados de un transformador dependen de la corriente. Por lo tanto, la pérdida total del transformador depende de los voltios-amperios. No depende del ángulo de fase entre la tensión y la corriente, es decir, la pérdida del transformador es independiente del factor de potencia de carga. Esta es la razón por la que los transformadores están clasificados en kVA.

Conclusión 2.

Las pérdidas del transformador se pueden determinar a través del método preciso de cálculo a partir de las pruebas de cortocircuito y circuito abierto, de manera que nos sirven para encontrar los parámetros del circuito equivalente del transformador, son muy económicas y convenientes porque se realizan sin cargar realmente el transformador.

Conclusión 3.

En el presente estudio, la eficiencia del transformador se determina para una operación en condiciones de voltaje y frecuencia constantes.

Conclusión 4.

De acuerdo a los resultados obtenidos la eficiencia del transformador depende de tres parámetros: la potencia aparente de la carga conectada, el factor de potencia y sus pérdidas (de plena carga y de vacío), varía según los valores de carga, y adquiere su máxima eficiencia en un valor de carga cuando las pérdidas de plena carga y de vacío son iguales. El máximo valor de eficiencia se consigue cuando la potencia aparente de la carga es menor a la potencia aparente nominal del transformador.

Conclusión 5.

En el programa elaborado en Matlab, para encontrar el punto de máxima eficiencia de un transformador de distribución primero se determina los parámetros del circuito equivalente, con los datos de entrada de las pruebas de vacío y cortocircuito practicado al transformador que son introducidos al programa. El programa procesa los valores de los parámetros del circuito equivalente y como resultado nos grafica la familia de curvas de eficiencia versus el porcentaje de la potencia aparente de la carga del transformador y el factor de potencia, en cada curva que representa el cálculo con un factor de potencia elegido nos indica el punto de máxima eficiencia del transformador.

Conclusión 6.

El programa está predeterminado para graficar cinco curvas que corresponde a la eficiencia con valores de factores de potencia de 0,2; 0,4; 0,6; 0;8 y 1, es posible modificar el programa para que pueda graficar menor o mayor cantidad de curvas de eficiencia con otros valores de factores de potencia.

A NIVEL INTERNACIONAL:

• **Br. Juan Pablo Barzallo Paida, "MODELO MATEMÁTICO DE UN TRANSFORMADOR REAL MONOFÁSICO DE DOS DEVANADOS",** tesis para optar el título a Ingeniero electricista en la Universidad Politécnica Salesiana Sede Guayaquil, 2015.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Diseñar un modelo en MATLAB® para desarrollar ecuaciones de una manera más rápida y exacta del funcionamiento de las máquinas estacionarias, aplicando los esquemas gráficos, se percibe su comportamiento y asimila a experimentos prácticos, siendo un aprendizaje muy didáctico a los estudiantes de la Universidad Politécnica Salesiana Sede Guayaquil.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A. Desarrollo y Análisis de las ecuaciones matemáticos del transformador monofásico de dos devanados en simulink.

B. Implementación gráfica en simulink del transformador.

C. Diseño didáctico en MATLAB® del transformador.

CONCLUSIONES

Conclusión 1.

Este modelado matemático es para demostrar el marco conceptual direccionado en la implementación y procesos asociados al comportamiento del inicio en los transformadores. Este método de detección presentado, mostró una buena función, el cual es grato adquirir la advertencia de la temperatura y obviar fallas muy rigurosas como cortocircuitos en los devanados, el cual se necesita los sondeos necesarios para la localización de fallas en donde son la corriente y el voltaje.

Conclusión 2.

Las interacciones y las diferentes variables (corrientes y flujos) describen al transformador eléctrico, donde se utiliza una carga resistiva inferior a 57,69Ω, el cual el transformador deberá aumentar relativamente su capacidad para que el voltaje se mantenga. Si se coloca una carga superior a 1000Ω el transformador reducirá paulatinamente su voltaje, dando así una caída de voltaje, por ende, la potencia aumentará saturando y colapsando sus bobinados,

Conclusión 3.

La implementación de la simulación gráfica del modelado ayudará a analizar paulatinamente las curvas simuladas de corrientes y voltajes, el cual el transformador está diseñado. El transformador tendrá una etapa de saturación debido al crecimiento de la corriente en sus bobinados y el comportamiento del voltaje.

Conclusión 4.

El diseño didáctico en el software de MATLAB® permitirá la interacción con el estudiante de la Universidad Politécnica Salesiana Sede Guayaquil de la carrera de Ingeniería Eléctrica, para poder visualizar el proceso que produce las ecuaciones de un transformador real monofásico y este efecto causa más integración con el aprendizaje teórico en función del desarrollo aplicado.

• **Br. Ricardo López García, "DESARROLLO Y VALIDACIÓN DE MODELOS DE TRANSFORMADORES MONOFÁSICOS Y TRIFÁSICOS CON SATURACIÓN, PARA EL ANÁLISIS DE ARMÓNICOS EN SISTEMAS DE POTENCIA",** tesis para optar el título a Ingeniero electricista en la Universidad Politécnica de Cataluña, 2000.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

El objetivo principal de este trabajo de investigación, es obtener un modelo matemático del transformador trifásico con saturación del núcleo de tres columnas, dos devanados.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A. Desarrollar un algoritmo de resolución directa del régimen permanente del sistema de ecuaciones no lineal del transformador trifásico con saturación del núcleo. El modelo debe ser adecuado para adaptarse a un programa de análisis de flujos de carga con armónicos.
B. Desarrollar ensayos de laboratorio para el estudio del fenómeno de la saturación del transformador trifásico con núcleo de tres columnas.
C. Desarrollar un protocolo de ensayos de laboratorio adecuado para caracterizar el transformador sin necesidad de depender de los parámetros de diseño que solo el fabricante puede proporcionar.
D. Validación de los modelos propuestos con medidas de los ensayos de laboratorio.

CONCLUSIONES

Conclusión 1.

Entre los diferentes modelos de curvas de magnetización estudiados, se ha elegido una curva del tipo an-histéresis para representar la no linealidad de la saturación del núcleo. Esta curva ha permitido un ajuste final del modelo de forma cómoda y sencilla.

Conclusión 2.

Se han desarrollado ensayos en cuatro transformadores trifásicos de tres columnas del tipo seco. Tres de ellos son de una potencia de 7,5 kVA, dos pertenecen al laboratorio del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la UPC y uno al laboratorio de la empresa SALICRU. El cuarto transformador es de una potencia de 60 kVA y las medidas se realizaron en los laboratorios de la empresa MIMAVEN.

• **Br. Dianelis Aberu Almeida, "SIMULACIÓN DINÁMICA DE LOS TRASFORMADORES",** tesis para optar el título a Ingeniero electricista en la Universidad Central Marta Abreu de las Villas, 2010.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Desarrollar la simulación dinámica de los trasformadores.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A. Búsqueda, organización y análisis de la información sobre modelos dinámicos con énfasis en transformadores.

B. Implementación de modelos dinámicos de transformadores, para diferentes estados de operación, empleando las herramientas disponibles en el Simulink del Matlab.

C. Búsqueda de parámetros reales de diferentes transformadores y efectuar simulaciones de los ficheros confeccionados con dichos parámetros.

D. Escritura del Trabajo.

CONCLUSIONES

Conclusión 1.

En el desarrollo de este trabajo se confeccionaron en el Simulink del MATLAB cuatro proyectos, los cuales brindan la posibilidad de hacer un análisis dinámico de transformadores.

Conclusión 2.

Como resultado de la búsqueda bibliográfica se confeccionó un material docente que recoge los aspectos teóricos fundamentales de transformadores.

Conclusión 3.

Los proyectos confeccionados son capaces de modelar satisfactoriamente los diferentes estados de operación de transformadores empleando las herramientas disponibles en el Simulink del MATLAB, así como también devuelven gráficas de gran utilidad que reflejan el comportamiento de las principales variables en el tiempo.

Conclusión 4.

De las simulaciones realizadas se obtuvieron resultados satisfactorios expuestos en el capítulo tres, los cuales se alcanzaron a partir de parámetros reales de transformadores diferentes capacidades.

• **Br. Erik Adrian Paneluisa Cumbajin, "DESARROLLO DE UN ALGORITMO MEDIANTE EL SOFTWARE MATLAB PARA EL ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE LOS TRANSFORMADORES",** tesis para optar el título a Ingeniero electricista en sistemas de potencia en la Universidad Técnica de Cotopaxi -Ecuador, 2019.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Desarrollar un algoritmo matemático mediante el software Matlab que permita analizar el comportamiento de los transformadores eléctricos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A. Desarrollar el modelo matemático del transformador.

B. Incorporar las ecuaciones matemáticas al software Matlab.

C. Analizar el comportamiento de la simulación del transformador incorporando casos prácticos.

CONCLUSIONES

Conclusión 1.

Las ecuaciones de estado del transformador obtenidas arrojan resultados similares a los de un transformador real.

Conclusión 2.

Se puede simular la saturación del transformador colocando la variación de la reactancia mutua del núcleo del transformador.

Conclusión 3.

La corriente primaria cuando el transformador se encuentra saturado no es completamente sinusoidal.

Conclusión 4.

La forma de onda de la corriente primaria cuando el transformador se encuentra saturado, no afecta en nada a la forma de onda de corriente y voltaje senoidal pura secundaria.

Conclusión 5.

El flujo residual pre-existente en el núcleo antes de la energización hace que la corriente primaria se incremente aún más en vacío.

Conclusión 6.

Cuando el transformador trabaja en carga el fenómeno inrush desaparece en cierto grado.

Conclusión 7.

Se puede limitar el tiempo de duración de la corriente inrush variando la resistencia interna del devanado primario.

Conclusión 8.

La simulación de un transformador propio del Software Matlab arroja los mismos resultados que el trasformador con las mismas características de nuestro informe.

Conclusión 9.

Es recomendable que los estudiantes que inicien en el ámbito de las maquinas eléctricas revisen la bibliografía al final de este documento.

Conclusión 9.

Es recomendable tener conocimientos básicos en matemáticas avanzadas, Matlab, circuitos eléctricos y sistemas de control para conocer de mejor manera el funcionamiento y modelamiento de la maquina eléctrica.

Conclusión 10.

Se recomienda para la simulación correcta del transformador colocar valores cercanos o aproximados de un transformador real.

Conclusión 11.

Para la simulación de la saturación del transformador es recomendable colocar el valor de la reactancia mutua en la rodilla de la curva de saturación.

Conclusión 12.

Si se desea simular la corriente inrush en el transformador, se puede empezar con el flujo residual existente en el momento de la energización, más no el flujo residual preexistente antes de la energización.

2.3. Bases conceptuales.

2.3.1. Principios generales de las máquinas eléctricas estáticas.

"Las máquinas eléctricas es el resultado de una aplicación de los principios del electromagnetismo y en particular de la ley de Inducción de Faraday". **(Chapman, 2000)**

Las máquinas eléctricas se caracterizan por tener circuitos eléctricos y magnéticos entrelazados. Durante todo el proceso histórico de su desarrollo desempeñaron un papel muy importante, que determinaba el movimiento de toda la Ingeniería Eléctrica, merced a su aplicación en los campos de generación, transporte, distribución y utilización de la energía eléctrica. Las máquinas eléctricas realizan una conversión de energía de una forma a otra, una de las cuales, al menos, es eléctrica. En base a este punto de vista, estrictamente energético, es posible clasificarlas en tres tipos fundamentales.

2.3.1.1. El generador.

Transforma la energía mecánica en eléctrica.

La acción se desarrolla por el movimiento de una bobina en un campo magnético, resultando una f.e.m. inducida que al aplicarla a un circuito externo produce una corriente que interacciona con el campo y desarrolla una fuerza mecánica que se opone al movimiento. En consecuencia, el generador necesita una energía mecánica de entrada para producir la energía eléctrica correspondiente. **(Happoldt, 1974)**

2.3.1.2. El motor.

Que transforma la energía eléctrica en mecánica.

La acción se desarrolla introduciendo una corriente en la máquina por medio de una fuente externa, que interacciona con el campo produciendo un movimiento en la máquina; aparece entonces una f.e.m. inducida que se opone a la corriente y que por ello se denomina fuerza contra electromotriz. En consecuencia, el motor necesita energía eléctrica de entrada para producir la energía mecánica correspondiente. **(Kosow, 1991)**

2.3.1.3. El transformador.

Es una maquina estática encargada de transformar la energía eléctrica de entrada (de c.a.) con determinadas magnitudes de tensión y corriente en otra energía eléctrica de salida (de c.a.) con magnitudes diferentes.

2.3.2. El transformador ideal.

2.3.2.1. Definición.

"Un transformador ideal es un dispositivo sin perdidas con un devanado de entrada y otro de salida. Las relaciones entre los voltajes de entrada y salida, y entre las corrientes de entrada y de salida, están dadas por dos ecuaciones sencillas" **(Chapman, 2000)**. La figura 2.1. muestra un transformador ideal. Esta clase de transformador tiene N_1 espiras de alambre en su primario, y N_2 espiras de alambre en su lado secundario. La relación entre el voltaje $v_1(t)$ aplicado al primario del transformador, y el voltaje $v_2(t)$ inducido en el secundario es:

$$\frac{\mathbf{v_1(t)}}{\mathbf{v_2(t)}} = \frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}} \tag{2.1}$$

Donde "**a**" se define como relación de espiras del transformador.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}} \tag{2.2}$$

La relación entre las corrientes $i_1(t)$ del primario e $i_2(t)$ del secundario del transformador es:

$$\mathbf{N_1 i_1(t) = N_2 i_2(t) = \frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \frac{N_2}{N_2} = \frac{1}{a}} \quad \textbf{(2.3)}$$

En términos de magnitudes fasoriales, estas ecuaciones son:

$$\mathbf{\frac{V_1}{V_2} = a} \quad \textbf{(2.4)}$$

$$\mathbf{\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{a}} \quad \textbf{(2.5)}$$

Debe notarse que el ángulo de fase de V_1 es el mismo de V_2, y que el ángulo de fase de I_1 es el mismo de I_2: La relación de espiras del transformador ideal afecta las magnitudes de los voltajes y de las corrientes, pero no sus ángulos. **(Chapman, 2000)**

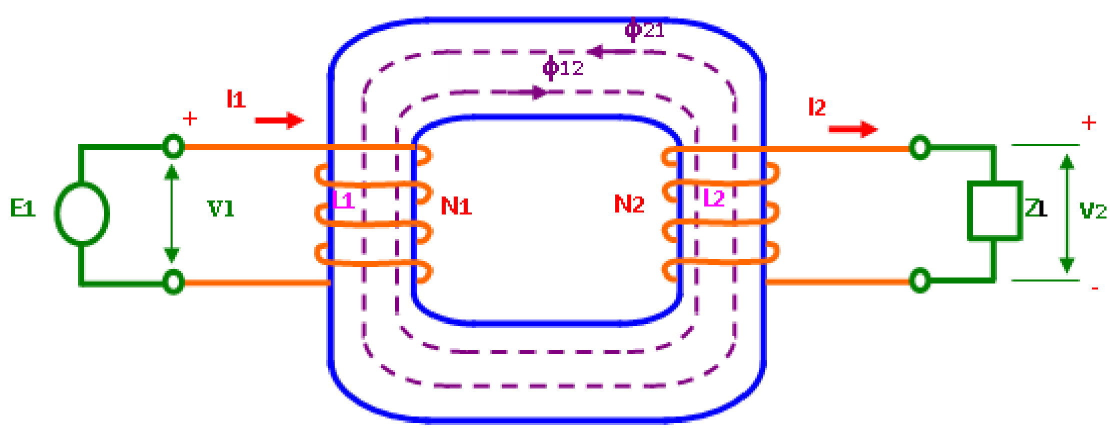
Las ecuaciones 2.1 al 2.4 describen las relaciones entre las magnitudes y los ángulos de voltajes y las corrientes de primario y secundario del transformador.

2.3.2.2. Propiedades del transformador ideal.

De la figura 2.1:

Figura 2.1

Transformador ideal con dos bobinas acopladas magnéticamente.



Nota. Representación de un transformador ideal, $L_{1,2}$ = inductancia, ϕ_{12} = flujo magnético.

Fuente: **(Concha, s.f.)**

Ya que el transformador ideal, es el acoplamiento magnético de dos bobinas (figura 2.1) esta tiene las siguientes propiedades:

- Coeficiente de acoplamiento magnético $K_M = 1$.
- Las resistencias de las bobinas son despreciables ($R_1 = R_2 = 0$).

La permeancia P del núcleo es muy alta como consecuencia L_1 y L_2 tienden a infinito.

- Las pérdidas en el hierro son despreciables.
- Las capacitancias de los arrollamientos son despreciables.

Vamos a ver como aplicando las propiedades anteriores se pueden simplificar las ecuaciones para un transformador con núcleo de aire.

2.3.2.3. Coeficiente de acoplamiento magnético $K_M = 1$:

Tendremos en primer lugar que:

$$\mathbf{M^2 = L_1 L_2} \tag{2.6}$$

Además, no habrá dispersión y:

$$\boldsymbol{\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0} \tag{2.7}$$

y como consecuencia

$$\boldsymbol{\varphi_1 = \varphi_{12} \quad \text{y} \quad \varphi_2 = \varphi_{21}} \tag{2.8}$$

Por otro lado, sabemos que

$$\mathbf{L_1 = \frac{N_1 \boldsymbol{\varphi}_1}{i_1} = \frac{N_1}{i_1}(N_1 i_1 P) = {N_1}^2 P} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{L_2 = \frac{N_2 \boldsymbol{\varphi}_2}{i_2} = \frac{N_2}{i_2}(N_2 i_2 P) = {N_2}^2 P} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{N_2\varphi_{12}}}{\mathbf{i_1}} = \frac{\mathbf{N_1\varphi_1}}{\mathbf{i_1}} = \frac{\mathbf{N_2}}{\mathbf{i_1}}(\mathbf{N_1 i_1 P}) = \mathbf{N_1 N_2 P} \tag{2.11}$$

Dividiendo entre si las ecuaciones 2.9 y la 2.10

$$\frac{\mathbf{L_1}}{\mathbf{L_2}} = (\frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}})^2 \tag{2.12}$$

Dividiendo entre sí las ecuaciones 2.9 y la 2.11

$$\frac{\mathbf{L_1}}{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}} \tag{2.13}$$

Dividiendo entre si las ecuaciones 2.11 y la 2.10

$$\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{L_2}} = \frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}} \tag{2.14}$$

Haciendo:

$$\frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}} = \mathbf{a} \tag{2.15}$$

Podemos finalmente escribir:

$$\frac{\mathbf{L_1}}{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{L_2}} = \sqrt{\frac{\mathbf{L_1}}{\mathbf{L_2}}} = \mathbf{a} \tag{2.16}$$

2.3.2.4. Relación de corrientes.

Se tiene:

$$\frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}} = \mathbf{a} \tag{2.17}$$

Aplicando la propiedad que:

$$\mathbf{L_2} \rightarrow \infty \tag{2.18}$$

Tendremos que:

$$\mathbf{Z_L} \ll \boldsymbol{\omega}\mathbf{L_2} \tag{2.19}$$

y se podrá despreciar Z_L

$$\frac{\mathbf{I_1}}{\mathbf{I_2}} = \frac{\mathbf{j\omega L_2}}{\mathbf{j\omega M}} = \frac{\mathbf{L_2}}{\mathbf{M}} \qquad \textbf{(2.20)}$$

Finalmente, según la ecuación 2.16 podemos escribir:

$$\frac{\mathbf{I_1}}{\mathbf{I_2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{N_2}}{\mathbf{N_1}} \qquad \textbf{(2.21)}$$

Que viene a ser la 1ra ecuación del transformador ideal.

2.3.2.5. Relación de tensiones.

Tenemos lo siguiente:

$$\frac{\mathbf{E_1}}{\mathbf{V_2}} = \frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{V_2}} = \frac{\mathbf{Z_1(Z_2 + Z_L) - X_M^2}}{\mathbf{X_M Z_L}} \qquad \textbf{(2.22)}$$

Considerando $R_1 = R_2 = 0$

$$\frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{V_2}} = \frac{\mathbf{j\omega L_1(j\omega L_2 + Z_L) - (j\omega M)^2}}{\mathbf{j\omega M Z_L}} = \frac{\mathbf{j\omega L_1 Z_L + (j\omega)^2(L_1L_2 - M^2)}}{\mathbf{j\omega M Z_L}} \qquad \textbf{(2.23)}$$

Teniendo presente la ecuación 2.9 el resultado se simplifica en:

$$\frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{V_2}} = \frac{\mathbf{j\omega L_1 Z_L}}{\mathbf{j\omega M Z_L}} = \frac{\mathbf{L_1}}{\mathbf{M}} = \mathbf{a} \qquad \textbf{(2.24)}$$

Es decir:

$$\frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{V_2}} = \mathbf{a} = \frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}} \qquad \textbf{(2.25)}$$

Esta es la 2da ecuación del transformador ideal.

2.3.2.6. Impedancia equivalente de entrada.

La siguiente ecuación se puede simplificar utilizando parte del resultado anterior, pues:

$$\mathbf{Z_{eq_1}} = \frac{\mathbf{Z_1(Z_2 + Z_L) - X_M^2}}{\mathbf{Z_2 + Z_L}} \qquad \textbf{(2.26)}$$

El numerador es el mismo del caso anterior y el denominador teniendo presente que $\omega L_2 >> Z_L$ se reduce a $j\omega L_2$:

$$\mathbf{Z_{eq_1}} = \frac{\mathbf{j\omega Z_L}}{\mathbf{j\omega L_2}} = \frac{\mathbf{L_1}}{\mathbf{L_2}}\mathbf{Z_L} \qquad \textbf{(2.27)}$$

Aplicando la ecuación 2.12 tenemos:

$$\mathbf{Z_{eq_1}} = \mathbf{a^2 Z_L} = (\frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}})^2\mathbf{Z_L} \qquad \textbf{(2.28)}$$

Que viene a ser la 3ra ecuación del transformador ideal.

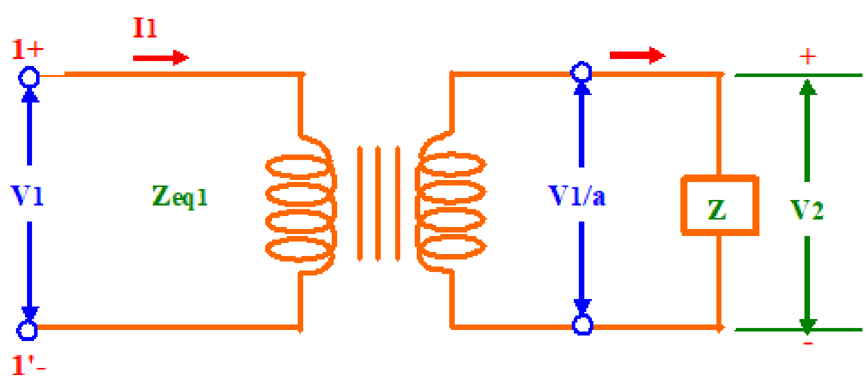
Este resultado también se hubiera podido obtener fácilmente teniendo presente que:

$$\mathbf{Z_{eq_1}} = \frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{I_1}} = \frac{\mathbf{aV_2}}{\frac{\mathbf{I_2}}{\mathbf{a}}} = \mathbf{a^2}\frac{\mathbf{V_2}}{\mathbf{I_2}} = \mathbf{a^2 Z_L} \qquad \textbf{(2.29)}$$

Utilizando la impedancia equivalente de la figura 2.2, se puede eliminar el transformador ideal y reemplazarlo por el valor de su impedancia referida al primario y secundario respectivamente, y así obtener las figuras 2.3 y 2.4.

Figura 2.2

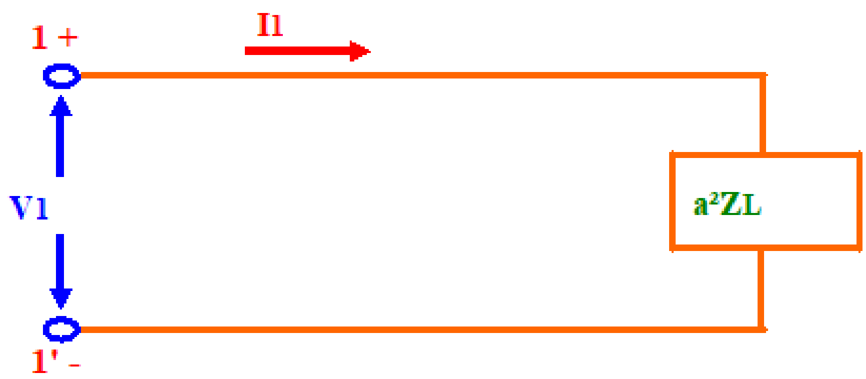
Circuito equivalente del transformador ideal.



Nota. Circuito equivalente del transformador ideal, Z_{eq1} = Impedancia equivalente referido al lado primario. Fuente: **(Concha, s.f.)**

Figura 2.3

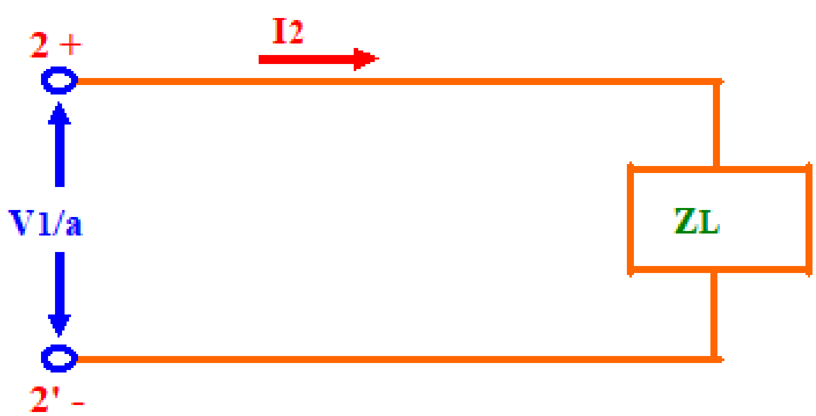
Circuito equivalente del transformador referido al primario.



Nota. Representación de un transformador ideal, Z_L = Impedancia de carga, a = relación de transformación. Fuente: **(Concha, s.f.)**

Figura 2.4

Circuito equivalente del transformador referido al secundario.



Nota. Representación de un transformador ideal, Z_L = Impedancia de carga. Fuente: **(Concha, s.f.)**

Las figuras mostradas, representan los pasos a seguir para su representación equivalente del transformador ideal. Así, se obtiene el circuito equivalente referido al primario. (figura 2.3.)

En general cualquier impedancia puede pasar del secundario al primario, bastará para eso multiplicarla por "a". Está claro que el transformador "Transforma" así el valor de las impedancias conectadas en su secundario, lo cual resulta de mucha utilidad cuando se desea obtener la máxima potencia en un determinado elemento. **(Chapman, 2000)**

También se puede construir un circuito equivalente referido al secundario. Para eso bastará tener presente que $V_{22'} = V1/a$ y construir el circuito de la figura 2.4.

Estos circuitos son de mucha utilidad en la solución de circuitos en los cuales interviene el transformador ideal.

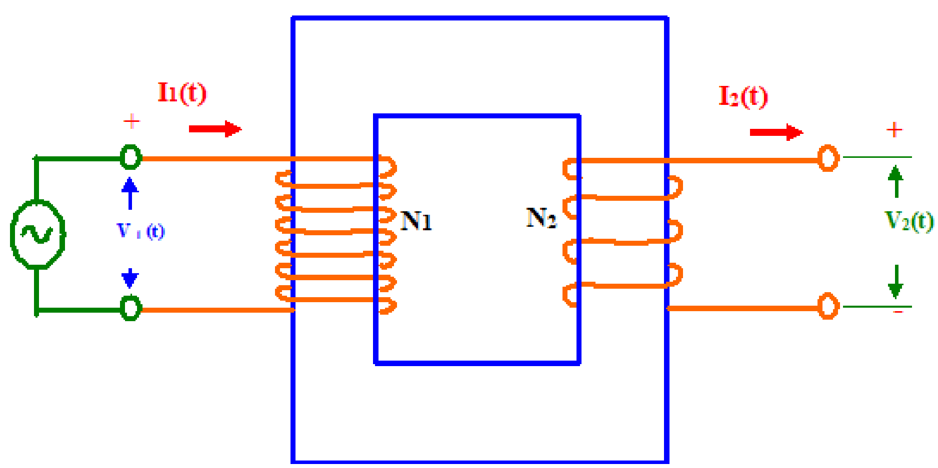
2.3.3. El transformador real.

2.3.3.1. Definición.

En vista que el transformador ideal descrito en la sección anterior, y por el simple hecho de existir diferentes tipos de pérdidas esta hace imposible su fabricación. Los que se construyen son transformadores reales: dos o más bobinas de conductor arrolladas físicamente alrededor de un núcleo ferromagnético. Las características de un transformador real se aproximan a las del transformador ideal, pero hasta cierto grado.

Figura 2.5

Esquema de un Transformador real sin carga en el secundario.



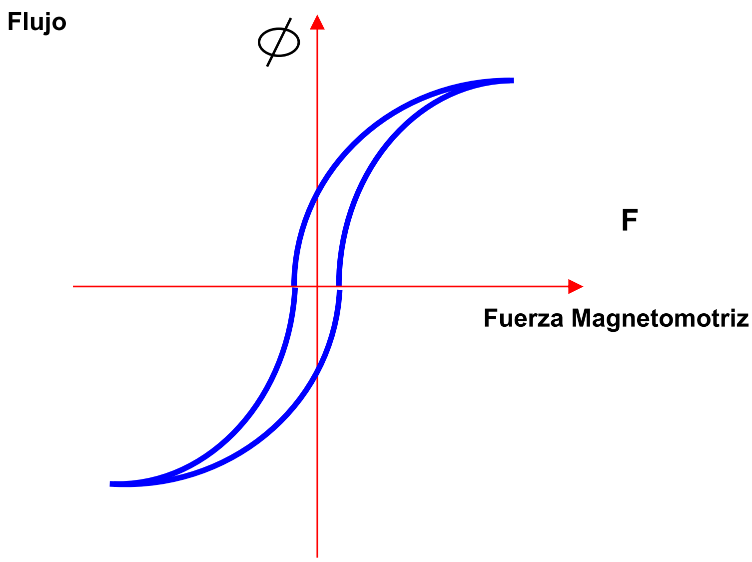
Nota. Representación de un transformador real, $N_{1,2}$ = representa el número de vueltas del bobinado primario y secundario. Fuente: **(Chapman, 2000)**

Para comprender el funcionamiento del transformador real representada en la figura 2.5. Muestra un transformador formado por dos bobinas arrolladas sobre un núcleo. El primario del transformador está conectado a una fuente de c.a. Y el devanado secundario permanece abierto.

La curva de histéresis del transformador se muestra en la figura 2.6.

Figura 2.6

Ciclo de histéresis del transformador.



Nota. El ciclo de histéresis representa a la capacidad o tendencia de un determinado material a mantener una de sus propiedades en ausencia de cualquier tipo de estímulo. Fuente: **(Chapman, 2000)**

La base del funcionamiento del transformador puede derivarse de la ley de Faraday donde λ (lamda) es el flujo ligado de la bobina donde se induce el voltaje. El flujo ligado de la ecuación 2.30:

$$\mathbf{e_{ind} = \frac{d\lambda}{dt}} \qquad \textbf{(2.30)}$$

λ (lamda) es la suma de los flujos que atraviesan todas y cada una de las espiras de la bobina:

El flujo total ligado por una bobina no es Nϕ, en donde N es el número de espiras de la bobina, debido a que el flujo que atraviesa una espira específica es algo diferente del flujo de las otras espiras, dependiendo de su posición dentro de la bobina. **(Kosow, 1991)**

$$\boldsymbol{\lambda = \sum_{i=1}^{N} \varphi_1} \tag{2.31}$$

Sin embargo, es posible definir el flujo promedio por espira en una bobina. Sí λ es el flujo total ligado por todas las espiras de la bobina, y si N es Número de espiras, entonces el flujo promedio por espira está dado por la expresión. **(Kosow, 1991)**

$$\boldsymbol{\Phi = \frac{\lambda}{N}} \tag{2.32}$$

y la ley de Faraday puede escribirse como:

$$\boldsymbol{e_{ind} = N\frac{d\Phi}{dt}} \tag{2.33}$$

2.3.3.2. Ecuaciones del circuito

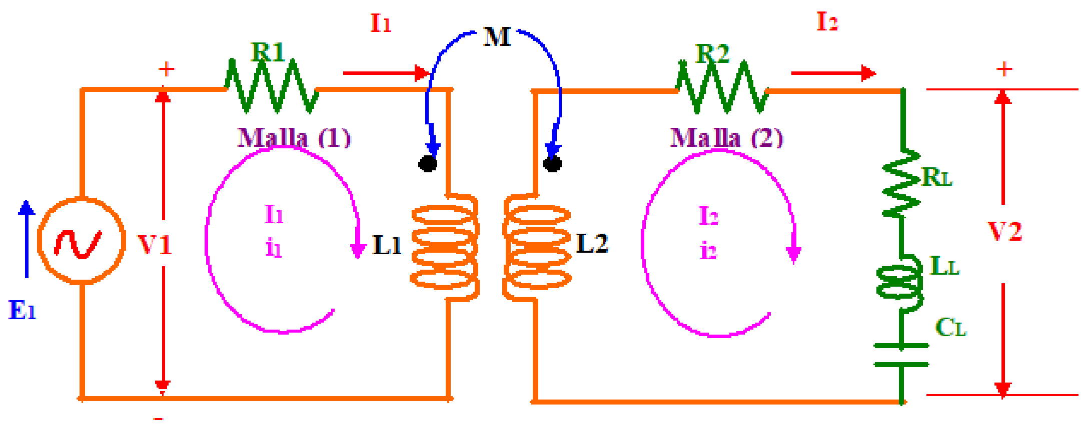
Como se indicó anteriormente, el transformador representa el caso de dos bobinas acopladas magnéticamente sin que tengan ninguna conexión eléctrica común representado en la figura 2.7.

“En general las bobinas se arrollan sobre un núcleo común que para los transformadores de potencia se hace de acero-silicio”. **(Kosow, 1991)**

Para facilitar este análisis inicial del comportamiento del circuito del transformador vamos a suponer que tiene núcleo de aire, con lo cual podemos asumir que $M_{12} = M_{21}$ y que las inductancias L_1 y L_2 son constantes. **(Kosow, 1991)**

Figura 2.7

Transformador con bobinas acopladas magnéticamente.



Nota. Representación de un transformador real, donde M = Inductancia mutua (siendo esta, el efecto de generar una fuerza electromotriz fem en una bobina, debido a un cambio en la corriente en la otra bobina acoplada). Fuente: **(Chapman, 2000)**

De la figura 2.7 las ecuaciones del circuito a partir de la 2° ley de Kirchhoff son:

Malla (1), primario:

$$\mathbf{e_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}} \tag{2.34}$$

Malla (2), secundario:

$$\mathbf{0 = (R_2 + R_L) i_2 + (L_2 + L_L) \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_L} \int i_2 dt - M \frac{di_1}{dt}} \tag{2.35}$$

El último término tendrá signo negativo, ya que i_1 entra por el terminal marcado e i_2 sale, luego los flujos producidos tendrán dirección contraria.

Ahora podemos escribir inmediatamente las ecuaciones vectoriales correspondientes:

$$\mathbf{E_1 = R_1 I_1 + j\omega L_1 - j\omega M I_2} \tag{2.36}$$

$$\mathbf{0 = (R_2 + R_L)I_2 + j\omega(L_2 + L_L)I_2 + \frac{1}{j\omega C}I_2 - j\omega M I_1} \quad \textbf{(2.37)}$$

Haciendo:

$$\mathbf{Z_1 = R_1 + jwL_1; \quad Z_2 = R_2 + jwL_2; \quad X_M = jwM} \quad \textbf{(2.38)}$$

$$\mathbf{Z_L = R_L + j\left(\omega L_L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad \textbf{(2.39)}$$

Obtenemos las ecuaciones:

$$\mathbf{E_1 = Z_1 I_1 - jX_M I_2} \quad \textbf{(2.40)}$$

$$\mathbf{0 = X_M I_1 + (Z_2 + Z_L)I_2} \quad \textbf{(2.41)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 2.40 y 2.41 se obtiene:

La tensión secundaria en los bornes de la impedancia de carga será

$$\mathbf{I_1 = E_1 \frac{Z_2 + Z_L}{Z_1(Z_2 + Z_L) - X_M^2}} \quad \textbf{(2.42)}$$

$$\mathbf{I_2 = E_1 \frac{X_M}{Z_L(Z_2 + Z_L) - X_M^2}} \quad \textbf{(2.43)}$$

$$\mathbf{V_2 = Z_L I_2 = E_1 \frac{X_M Z_L}{Z_1(Z_2 + Z_L) - X_M^2}} \quad \textbf{(2.44)}$$

Finalmente, la impedancia equivalente del transformador referido al lado primario será:

$$\mathbf{Z_{eq_1} = \frac{E_1}{I_1} = \frac{Z_1(Z_2 + Z_L) - X_M^2}{Z_2 + Z_L} = Z_1 - \frac{X_M^2}{Z_2 + Z_L} = Z_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_2 + Z_L}} \quad \textbf{(2.45)}$$

2.3.3.3. Impedancia reflejada.

Se debe considerar el desarrollo en su forma cartesiana de esta última expresión para el caso ideal en que $R_1 = R_2 = 0$. Haciendo:

$$\mathbf{Z_1 = j\omega L_1;\quad Z_2 = j\omega L_2\,;\quad Z_L = R_L + jX_L} \tag{2.46}$$

Obtenemos de la ecuación 2.45:

$$\mathbf{Z_{eq_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j(\omega L_2 + X_L) + R_L}} \tag{2.47}$$

$$\mathbf{Z_r = \frac{\omega^2 M^2 R_L}{R_L^2 + (\omega L_2 + X_L)^2} - j\frac{\omega^2 M^2 (wL_2 + X_L)}{R_L^2 + (\omega L_2 + X_L)^2}} \tag{2.48}$$

Racionalizando el segundo término se tendrá:

$$\mathbf{Z_r = \frac{\omega^2 M^2}{R_L + j(\omega L_2 + X_L)} = \frac{\omega^2 M^2\{R_L - j(\omega L_2 + X_L)\}}{R_L^2 + (\omega L_2 + X_L)^2}} \tag{2.49}$$

Esta impedancia Z_r se denomina impedancia reflejada y sus dos componentes son la resistencia reflejada:

$$\mathbf{r_r = \frac{\omega^2 M^2 R_L}{R_L^2 + (\omega L_2 + X_L)^2}} \tag{2.50}$$

Y la reactancia reflejada es:

$$\mathbf{x_r = -j\frac{\omega^2 M^2 (\omega L_2 + X_L)}{R_L^2 + (\omega L_2 + X_L)^2}} \tag{2.51}$$

La impedancia equivalente toma entonces la forma:

$$\mathbf{Z_{eq_1} = \frac{\omega^2 M^2 R_L}{R_L^2 + (\omega L_2 + X_L)^2} - j\frac{\omega^2 M^2 (wL_2 + X_L)}{R_L^2 + (\omega L_2 + X_L)^2}} \tag{2.52}$$

$$\mathbf{Z_{eq_1} = r_r + (\omega L_1 + X_r)} \tag{2.53}$$

Cuando el secundario está abierto ($Z_L = + \alpha$), la impedancia equivalente está dada por jwL_1 (ecuación 2.48). Cuando en cambio se conecta una carga Z_L en el secundario, esta se "refleja" en el primario modificando la impedancia equivalente e introduciendo en su expresión la resistencia reflejada r_r y la reactancia reflejada X_r. **(Chapman, 2000)**

Esta última será siempre negativa (ecuación 2.51) y hará disminuir la reactancia $j\omega L_1$ del primario, permitiendo así que fluya más corriente en el primario.

2.3.4. Análisis de un transformador con núcleo de hierro.

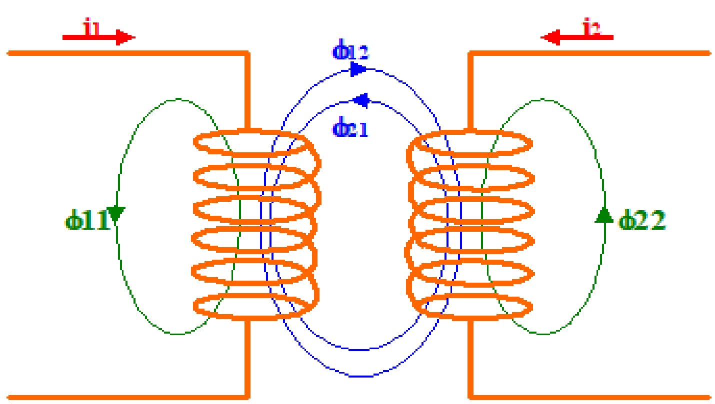
2.3.4.1. Las inductancias de dispersión.

El flujo de dispersión que se presenta cuando el acoplamiento magnético no es perfecto, es decir K < 1 produce unas inductancias denominadas inductancias de dispersión, las cuales tienen una gran importancia en el análisis de los transformadores de potencia. **(Chapman, 2000)**

Sí tenemos dos bobinas acopladas magnéticamente podemos escribir las siguientes relaciones:

Figura 2.8

El flujo de dispersión en un transformador.



Nota. Representación de un transformador real, donde ϕ = Flujos de dispersión. Fuente: **(Chapman, 2000)**

$$\boldsymbol{\varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12}} \qquad \textbf{ECU. (2.54)}$$

$$\boldsymbol{\varphi_2 = \varphi_{22} + \varphi_{21}} \qquad \textbf{(2.55)}$$

$$\mathbf{K_1} = \frac{\boldsymbol{\varphi_{12}}}{\boldsymbol{\varphi_1}} \qquad \textbf{(2.56)}$$

$$\mathbf{K_2} = \frac{\boldsymbol{\varphi_{21}}}{\boldsymbol{\varphi_2}} \qquad \textbf{(2.57)}$$

Además de acuerdo con la definición de una inductancia se puede determinar las correspondientes inductancias de dispersión del primario y secundario de la siguiente forma:

$$\mathbf{L_{11}} = \frac{\mathbf{M_1}\boldsymbol{\varphi_{11}}}{\mathbf{i_1}} \qquad \textbf{(2.58)}$$

$$\mathbf{L_{22}} = \frac{\mathbf{M_2}\boldsymbol{\varphi_{22}}}{\mathbf{i_2}} \qquad \textbf{(2.59)}$$

Además de las ecuaciones 2.54, 2.55, 2.56 y 2.57 podemos deducir que:

$$\boldsymbol{\varphi_{11} = \varphi_1 - \varphi_{12} = \varphi_1 - \mathbf{K_1}\varphi_1 = (1 - \mathbf{K_1})\varphi_1} \qquad \textbf{(2.60)}$$

$$\boldsymbol{\varphi_{22} = \varphi_2 - \varphi_{21} = \varphi_2 - \mathbf{K_2}\varphi_2 = (1 - \mathbf{K_2})\varphi_2} \qquad \textbf{(2.61)}$$

Que reemplazadas en las ecuaciones 2.58 y 2.59 nos dan:

$$\mathbf{L_{11}} = (\mathbf{1} - \mathbf{K_1})\frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{i_1}}\boldsymbol{\varphi_1} = (\mathbf{1} - \mathbf{K_1})\mathbf{L_1} \qquad \textbf{(2.62)}$$

$$\mathbf{L_{22}} = (\mathbf{1} - \mathbf{K_2})\frac{\mathbf{N_2}}{\mathbf{i_2}}\boldsymbol{\varphi_2} = (\mathbf{1} - \mathbf{K_2})\mathbf{L_2} \qquad \textbf{(2.63)}$$

Las ecuaciones 2.62 y 2.63, se pueden transformar eliminando K_1 y K_2 según la ecuación 2.58 y 2.59:

$$\mathbf{L_{11} = L_1 - \frac{N_1}{N_2}\left(\frac{N_2 \varphi_{12}}{i_1}\right) = L_1 - \frac{N_1}{N_2} M} \qquad \textbf{(2.64)}$$

$$\mathbf{L_{11} = L_1 - \frac{\phi_{12}}{\phi_1} L_1 = L_1 - \frac{\phi_{12}}{\phi_1}\frac{N_1 \phi_1}{i_1} = L_1 - \frac{N_1 \phi_{12}}{i_1}} \qquad \textbf{(2.65)}$$

$$\mathbf{L_{22} = L_2 - \frac{\varphi_{21}}{\varphi_2} L_2 = L_2 - \frac{\varphi_{21}}{\varphi_2}\frac{N_2 \varphi_2}{i_2} = L_2 - \frac{N_2 \varphi_{21}}{i_2}} \qquad \textbf{(2.66)}$$

Por otro lado, igualando la ecuación 2.62 y 2.63; 2.64 y 2.66 respectivamente:

$$\mathbf{L_1 - \frac{N_1}{N_2} M = L_1 - K_1 L_1} \qquad \textbf{(2.67)}$$

$$\mathbf{K_1 = \frac{N_1}{N_2}\frac{M}{L_1}} \qquad \textbf{(2.68)}$$

$$\mathbf{L_2 - \frac{N_2}{N_1} M = L_2 - K_2 L_2} \qquad \textbf{(2.69)}$$

$$\mathbf{K_2 = \frac{N_2}{N_1}\frac{M}{L_2}} \qquad \textbf{(2.70)}$$

Las ecuaciones 2.68 y 270 son susceptibles de ser modificadas interiormente utilizando la relación:

$$\mathbf{K\sqrt{L_1 L_2}} \qquad \textbf{(2.71)}$$

Obtenemos así:

$$\mathbf{K_1 = K\frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}} \qquad \textbf{(2.72)}$$

$$\mathbf{K_2 = K\frac{N_2}{N_1}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}} \tag{2.73}$$

Finalmente dividiendo entre sí la ecuación 2.72 y la 2.73, obtenemos:

$$\mathbf{\frac{K_1}{K_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2}\frac{L_2}{L_1}}; \quad \mathbf{\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2}\sqrt{\frac{K_2}{K_1}}} \tag{2.74}$$

Resultando interesante pues al ser en un transformador de potencia $K_1 \cong K_2$, nos indica que:

2.3.4.2. El circuito equivalente exacto.

"Los aspectos más importantes que deben considerarse en la construcción del modelo son" **(Kosow, 1991)**:

$$\mathbf{\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}} \tag{2.75}$$

A. "**Pérdidas en el cobre (I^2R):** Son pérdidas por calentamiento de tipo resistivo en los arrollamientos primario y secundario del transformador. Varían proporcionalmente con el cuadrado de la corriente de los devanados" **(Chapman, 2000)**

B. "**Perdidas en el hierro o pérdidas por corrientes de Foucault:** Son pérdidas por calentamiento de tipo resistivo en el núcleo del transformador" **(Chapman, 2000)**

C. "**Pérdidas por histéresis:** Están asociadas con el reagrupamiento de los dominios magnéticos en el núcleo durante cada semiciclo" **(Chapman, 2000)**

D. **Flujo de dispersión:** Los flujos $\phi 11$ y $\phi 22$ que abandonan el núcleo y ligan sólo a uno de los devanados del transformador son flujos dispersos. Estos originan autoinductancias en los devanados primario y secundario, cuyos efectos deben ser tenidos en cuenta. **(Chapman, 2000)**

Es posible construir un circuito equivalente que contenga las principales imperfecciones del transformador real. Ya que cada una de estas será analizada separadamente, y sus efectos serán incluidos en el modelo del transformador.

"El efecto más fácil de modelar es la pérdida en el cobre, la cual se representa colocando una resistencia R_1 en el circuito primario, y otra resistencia R_2 en el circuito secundario del transformador" **(Kosow, 1991)**

Según lo deducido, el flujo de dispersión del ϕ_1 induce la tensión e_1 de acuerdo con la ecuación 2.76 y el flujo de dispersión del secundario ϕ_2 induce el voltaje e_2 correspondiente a la ecuación 2.77.

$$\mathbf{e_1(t) = N_1 \frac{d\varphi_1}{dt}} \quad \textbf{(2.76)}$$

$$\mathbf{e_2(t) = N_2 \frac{d\varphi_2}{dt}} \quad \textbf{(2.77)}$$

"Como la mayor parte de la trayectoria del flujo disperso está constituida por aire, y en razón a que el aire presenta reluctancia constante y de valor muy superior que la reluctancia del núcleo" **(Chapman, 2000)**, puede aceptarse que los flujos ϕ_1 y ϕ_2 son directamente proporcionales a las corrientes de primario y secundario, Respectivamente:

$$\boldsymbol{\varphi_1 = (\rho N_1) i_1} \quad \textbf{(2.78)}$$

$$\boldsymbol{\varphi_2 = (\rho N_2) i_2} \quad \textbf{(2.79)}$$

Donde :

ρ : Permeancia de la trayectoria del flujo.

N_1 : Número de espiras de la bobina primaria.

N_2 : Número de espiras de la bobina secundaria.

Al reemplazar las ecuaciones 2.78 y 2.79 en las ecuaciones 2.76 y 2.77 resulta:

$$\mathbf{e_1(t) = N_1 \frac{d}{dt}(\rho N_1) i_1 = N_1^2 \rho \frac{di_1}{dt}} \tag{2.80}$$

$$\mathbf{e_2(t) = N_2 \frac{d}{dt}(\rho N_2) i_2 = N_2^2 \rho \frac{di_2}{dt}} \tag{2.81}$$

Las constantes de estas ecuaciones pueden agruparse resultado:

$$\mathbf{e_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt}} \tag{2.82}$$

$$\mathbf{e_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt}} \tag{2.83}$$

Por consiguiente, el flujo disperso se representará mediante inductancias en primario y secundario.

$$\mathbf{L_1 = {N^2}_1 \mathfrak{I}\text{ ; autoinductancia de la bobina primaria}} \tag{2.84}$$

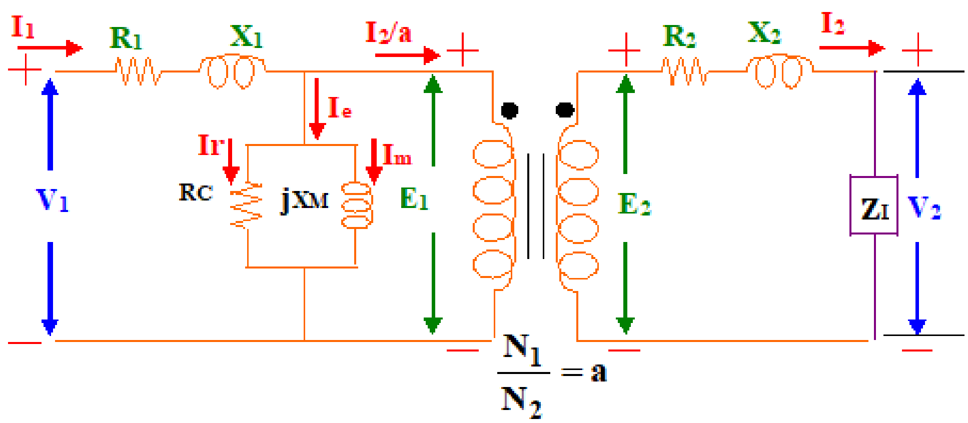
$$\mathbf{L_2 = {N^2}_2 \mathfrak{I}\text{ ; autoinductancia de la bobina Secundaria}} \tag{2.85}$$

Para representar los efectos de la excitación del núcleo. La corriente de magnetización i_m es proporcional (en la región no saturada) el voltaje aplicado, y se atrasa 90° de este; por lo tanto, puede representarse por una reactancia x_m conectada entre los terminales de la fuente de alimentación. La corriente pérdidas en el núcleo I_r es proporcional al voltaje aplicado y está en fase con este, razón por la cual es posible representar por una resistencia R_c entre los terminales de la fuente primaria. (Recuérdese que estas corrientes no son realmente lineales; así que la reactancia x_m y la resistencia R_c constituyen las mejores aproximaciones de los efectos de excitación reales **(Chapman, 2000)**

La figura 2.9, muestra el circuito equivalente resultante. "Nótese que los elementos que conforman la rama de magnetización aparecen ubicados más internamente que la resistencia R_1 y la inductancia L_1 del primario" **(Chapman, 2000)**. Lo anterior se debe a que el voltaje que realmente se aplica al núcleo es igual al aplicado al primario menos las caídas internas en el mismo arrollamiento.

Figura 2.9

Circuito Equivalente del Transformador Real



Nota. Representación del circuito equivalente del transformador real donde se muestran las resistencias, reactancias, relación de transformación, y demás parámetros eléctricos. Fuente: **(Chapman, 2000)**

2.3.4.3. Circuitos equivalentes aproximados - impedancia equivalente.

El circuito equivalente exacto puede ser modificado obteniéndose los circuitos equivalentes aproximados referidos al primario o al secundario.

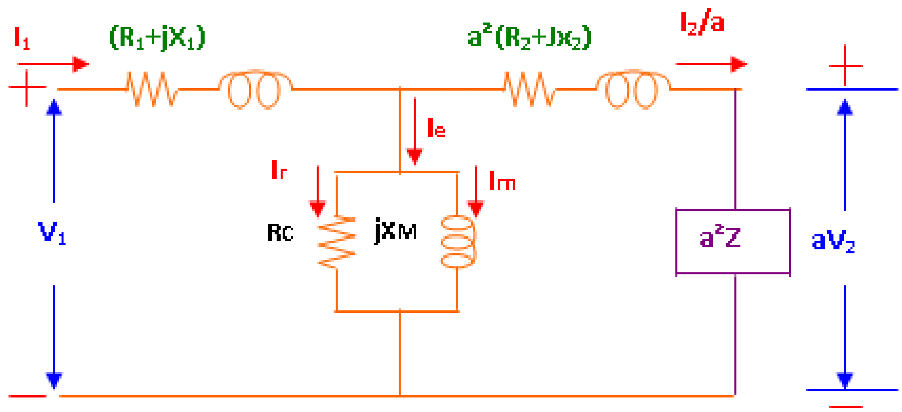
El circuito equivalente exacto referido al primario figura 2.10, puede ser modificado sin error apreciable, trasladando la admitancia de excitación a la entrada.

Se obtiene así un circuito simplificado que se muestra en la figura 2.11 en el cual es posible combinar la impedancia del primario y del secundario obteniéndose la impedancia equivalente del transformador referido al primario.

$$\mathbf{Z_{eq_1} = R_1 + a^2R_2 + j(X_1 + a^2X_2) = R_{eq1} + jX_{eq1} = a^2Z_{eq2}} \qquad \textbf{(2.86)}$$

Figura 2.10

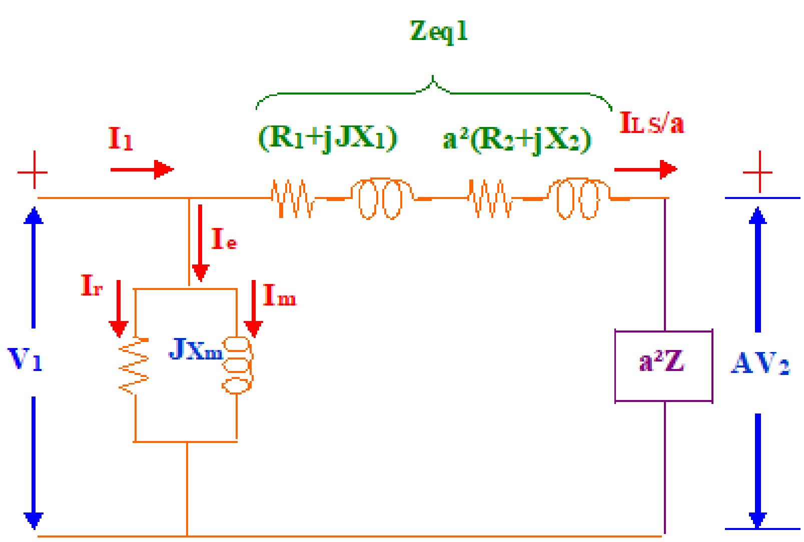
Circuito equivalente exacto referido al primario del transformador real.



Nota. Representación del circuito equivalente exacto, donde se muestran las impedancias características. Fuente: **(Chapman, 2000)**

Figura 2.11

Circuito equivalente simplificado referido al primario del transformador real.



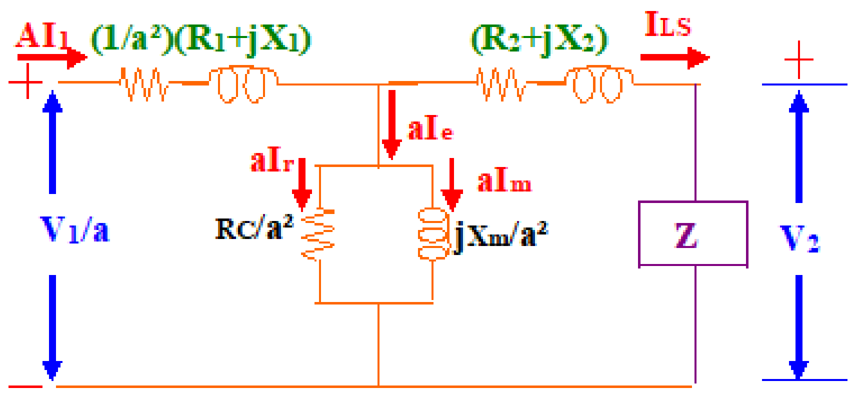
Nota. Representación del circuito equivalente, donde se muestra la impedancia equivalente.

Fuente: **(Chapman, 2000)**

El mismo procedimiento se puede hacer con el circuito equivalente exacto referido al secundario figura 2.12 y se obtiene el circuito de la figura 2.13.

Figura 2.12

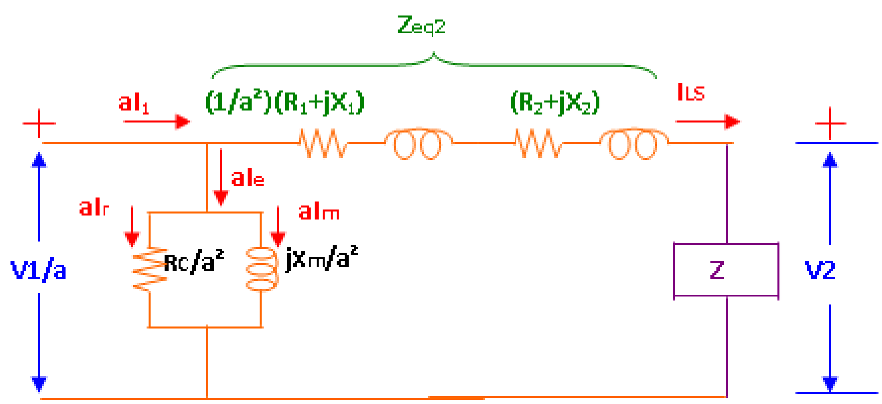
Circuito equivalente exacto referido al secundario del Transformador real.



Nota. Representación del circuito equivalente exacto lado secundario, donde se muestran las impedancias características. Fuente: **(Chapman, 2000)**

Figura 2.13

Circuito equivalente simplificado referido al secundario del Transformador real.



Nota. Representación del circuito equivalente lado secundario, donde se muestra la impedancia equivalente. Fuente: **(Chapman, 2000)**

La impedancia equivalente será en este caso:

$$\mathbf{Z_{eq2} = R_{eq_2} + jX_{eq_2} = \left(\frac{R_1}{a^2} + R_2\right) + j\left(\frac{X_{eq1}}{a^2} + X_{eq_2}\right)} \qquad \textbf{(2.87)}$$

Y comparando con la ecuación 2.87, podemos deducir que:

$$\mathbf{Z_{eq1} = a^2 Z_{eq_2}} \qquad \textbf{(2.88)}$$

Estas impedancias equivalentes son muy importantes y representan con muy buena aproximación las impedancias de cortocircuito del transformador referido al primario o al secundario respectivamente. El circuito equivalente aproximado referido al secundario de la figura 2.13 es muy utilizado y se obtiene con él resultado que difieren muy poco de los obtenidos con el circuito exacto. **(Chapman, 2000)**

Las ecuaciones vectoriales se simplifican notablemente lo mismo que el diagrama vectorial.

2.3.5. Determinación de los parámetros del circuito equivalente del transformador por mediciones.

Los parámetros que deben ser determinados son: La impedancia equivalente referida al primario o al secundario con sus dos componentes, la01 resistencia y la reactancia equivalente, las resistencias y las reactancias de dispersión, la conductancia y la susceptancia de la admitancia de excitación, la relación de transformación.

Además, “es importante conocer las características de excitación o sea la corriente de excitación con sus dos componentes, las pérdidas en el hierro y finalmente las pérdidas en el cobre de las bobinas” **(Kosow, 1991)**

Para obtener todos estos valores se realizan dos tipos de pruebas:

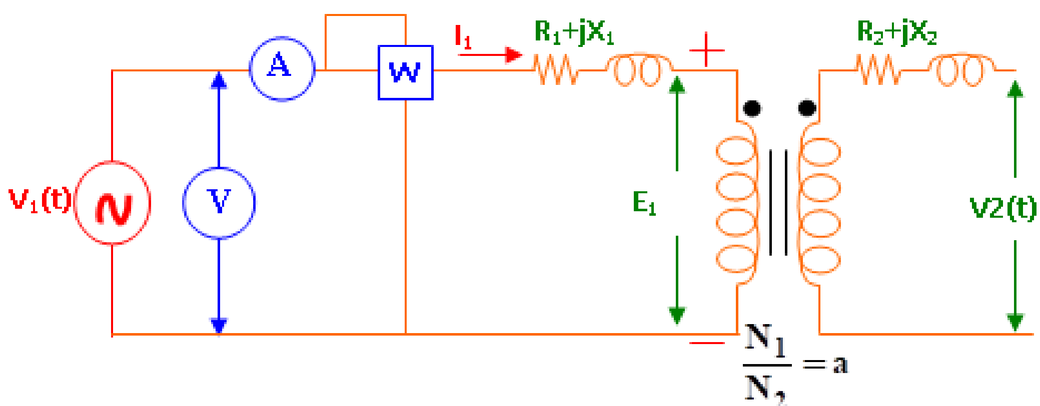
- Prueba en circuito abierto.
- Prueba en cortocircuito.

2.3.5.1. Prueba en circuito abierto.

Se realiza esta prueba manteniendo abierto un lado del transformador y alimentándolo por el otro lado con su tensión nominal, o se deja el arrollamiento secundario del transformador en circuito abierto, mientras le es aplicado al primario el voltaje nominal. Al no haber corriente de carga, fluirá solamente la componente de excitación por la rama de magnetización del transformador y que puede medirse con un amperímetro. "Los elementos en serie R_1 y X_1 son tan pequeños comparados con R_c y X_M que producen unas caídas de voltaje despreciables, así que prácticamente todo el voltaje de alimentación queda aplicado sobre la rama de magnetización" **(Kosow, 1991)**. Finalmente, si se conecta un vatímetro como en la figura 2.14, éste medirá las pérdidas en el hierro ya que las pérdidas por efecto Joule en el cobre serán despreciables. Como el transformador está alimentado con su tensión nominal, estas pérdidas representan con muy buena aproximación las pérdidas en funcionamiento normal.

Figura 2.14

Conexiones para la prueba del transformador en circuito abierto.



Nota. Instalación del vatímetro para prueba en circuito abierto. Fuente: **(Chapman, 2000)**

Las conexiones para efectuar el ensayo en circuito abierto están indicadas en la figura 2.14. Se aplica el voltaje nominal al primario del transformador, y se toman lecturas del voltaje aplicado, la corriente y la potencia consumidas. Con esta información, es posible calcular el factor de potencia de la corriente y, por lo tanto, la magnitud y el ángulo de la impedancia de magnetización. La forma más simple de calcular los valores de R_c y X_M es observar primero la admitancia de la rama de magnetización. La conductancia de la resistencia de pérdidas del núcleo es: **(Wilde, 2007)**

$$\mathbf{G_C = \frac{1}{R_C}} \tag{2.89}$$

Y la susceptancia de la inductancia de magnetización es:

$$\mathbf{B_M = \frac{1}{X_m}} \tag{2.90}$$

Como estos dos elementos están en paralelo, sus admitancias se suman, y la admitancia total de excitación es:

$$\mathbf{Y = G_C - jB_m} \tag{2.91}$$

La magnitud de la admitancia de magnetización (referida al circuito primario) se calcula a partir del voltaje y de la corriente de ensayo del circuito abierto:

$$\mathbf{Y_E = \frac{1}{R_C} - j\frac{1}{X_m}} \tag{2.92}$$

El ángulo de la admitancia se halla conociendo el factor de potencia del circuito. El factor de potencia en circuito abierto está dado por:

$$\mathbf{|Y_E| = \frac{I_{oc}}{Voc}} \tag{2.93}$$

Y el ángulo θ del factor de potencia está dado por:

$$\mathbf{PF = \cos\theta = \frac{P_{oc}}{V_{oc}I_{oc}}} \tag{2.94}$$

En un transformador real, este factor de potencia siempre está retardado, así que el ángulo de la corriente siempre atrasa en θ grados el ángulo del voltaje. Por lo tanto, la admitancia Y_E es:

$$\mathbf{Y_E = \frac{I_{oc}}{V_{oc}} \angle - \theta} \tag{2.95}$$

$$\mathbf{\theta = \cos^{-1} \frac{P_{oc}}{V_{oc} I_{oc}}} \tag{2.96}$$

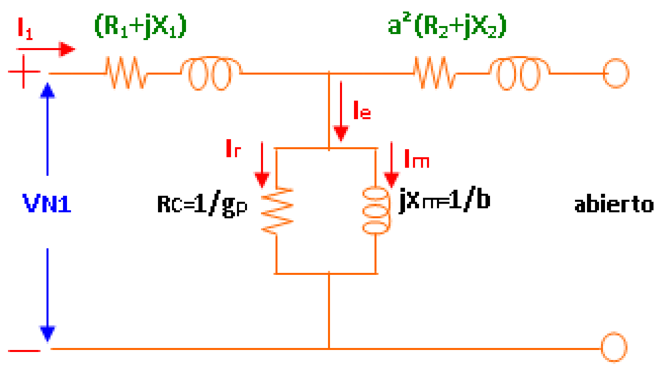
$$\mathbf{Y_E = \frac{I_{oc}}{V_{oc}} \angle \cos^{-1} \theta} \tag{2.97}$$

Comparando las ecuaciones 2.94 y 2.97, posible determinar los valores de Rc y Xm directamente a partir de los datos de ensayo de circuito abierto.

El circuito equivalente en este caso será:

Figura 2.15

Circuito equivalente exacto referido al primario del Transformador real.



Nota. Circuito equivalente exacto referido a lado primario en vacío. Fuente: **(Chapman, 2000)**

Para obtener la relación de transformación bastará medir la tensión en circuito abierto del secundario Eoc2 y tendremos:

$$\mathbf{a = \frac{N_1}{N_2} = \frac{V_{N1}}{E_{oc2}}} \tag{2.98}$$

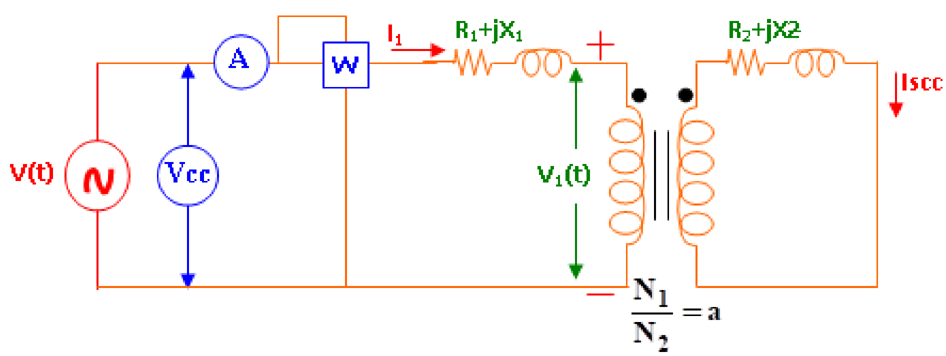
2.3.5.2. Prueba en cortocircuito.

Según **(Chapman, 2000)**, en esta prueba, los terminales del secundario del transformador son puestos en cortocircuito, y el primario se alimenta de una fuente de muy bajo voltaje, muy inferior a la nominal, de tal manera que circulen por las bobinas las corrientes nominales.

Esta tensión es llamada justamente tensión de cortocircuito (Vcc) y es del orden del 5% de la tensión nominal, tal como indica en la figura 2.16.

Figura 2.16

Conexiones para la prueba del transformador en cortocircuito.



Nota. Instalación del vatímetro para prueba en cortocircuito. Fuente: **(Chapman, 2000)**

"El voltaje de alimentación se ajusta de tal manera que circule la corriente nominal por el arrollamiento cortocircuitado" **(Bulucea, 1997)**. (Asegúrese de que el voltaje primario sea lo suficientemente bajo para no quemar el transformador mientras trata de ensayarlo). De nuevo, debe medirse el voltaje, la corriente y la potencia que entran al transformador.

Como el voltaje "e" alimentación es tan bajo durante el ensayo, "por la rama de magnetización fluirá una corriente muy pequeña. Si se desprecia esta corriente de excitación, toda la caída de voltaje del transformador puede atribuirse a los elementos en serie del circuito" **(Kosow, 1991)**. La magnitud de las impedancias serie referidas al primario del transformador es:

$$|\mathbf{Z_{SE}}| = \frac{\mathbf{V_{sc}}}{\mathbf{I_{sc}}} \tag{2.99}$$

El factor de potencia estará dado por:

$$\mathbf{PF} = \mathbf{cos\,\theta} = \frac{\mathbf{P_{sc}}}{\mathbf{V_{sc}I_{sc}}} \tag{2.100}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{Z_{SE}} = \frac{\mathbf{V_{sc}\angle 0°}}{\mathbf{I_{sc}\angle - \theta°}} = \frac{\mathbf{V_{sc}}}{\mathbf{I_{sc}}}\angle\boldsymbol{\theta} \tag{2.101}$$

La impedancia serie Z_{SE} es igual a:

$$\mathbf{Z_{SE}} = \mathbf{R_{eq}} + \mathbf{jX_{eq}} = (\mathbf{R_1} + \mathbf{a^2R_2}) + \mathbf{j}(\mathbf{X_1} + \mathbf{a^2X_2}) \tag{2.102}$$

Mediante el empleo de esta técnica es posible determinar la impedancia serie total referida al primario, aunque no hay manera fácil de separarla en sus componentes primaria y secundaria. Por fortuna, tal separación no es necesaria en la solución de problemas usuales.

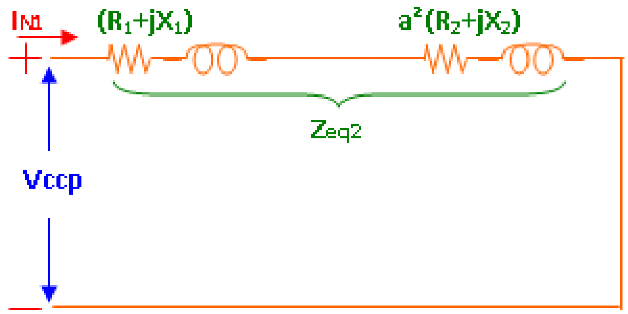
De igual manera, estas mismas pruebas pueden efectuarse sobre el secundario del transformador, si fuese más conveniente, debido a los niveles de voltaje o por cualquier otra razón. Si los ensayos se realizan sobre el secundario, los resultados darán la impedancia del circuito equivalente referidas al lado secundario del transformador. **(Wilde, 2007)**

Al ser la tensión aplicada muy baja, el vatímetro indicará solo las pérdidas en el cobre, pues las pérdidas en el hierro son proporcionales al cuadrado de la tensión aplicada.

En el circuito equivalente referido al primario se podrá despreciar la admitancia de excitación y se obtiene el circuito simplificado de la figura 2.17.

Figura 2.17

Circuito equivalente referido al primario.



Nota. Impedancia equivalente del circuito equivalente referido al primario. Fuente: **(Chapman, 2000)**

Naturalmente si las mediciones se hacen en el secundario, se obtendrán valores referidos a ese lado del transformador. Si se desea determinar los valores individuales de R_P, R_S, X_{dP} y X_{dS} se puede proceder de la siguiente forma aproximada: cabe mencionar que **(Wilde, 2007)** Supone que cuando están referidas al mismo lado son iguales, es decir:

$$\mathbf{R_1 \cong a^2R_2 \cong \frac{R_{eq1}}{2}} \tag{2.103}$$

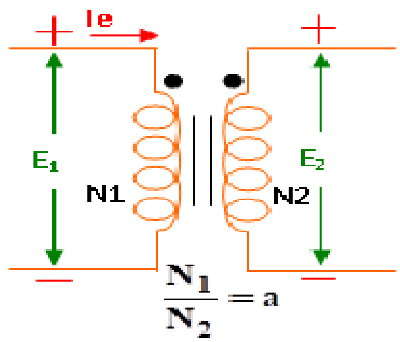
$$\mathbf{X_1 \cong a^2X_2 \cong \frac{Xd_{eq1}}{2}} \tag{2.104}$$

2.3.6. El transformador en vacío.

Hasta aquí se ha supuesto un núcleo de hierro con un bobinado arrollado sobre el mismo. Tenían lugar fenómenos de autoinducción, circulación de corriente magnetizante, caídas de tensión, etc. Veamos ahora lo que sucede si se arrolla sobre el bobinado que teníamos, que llamaremos en adelante: primario, otro bobinado que llamaremos secundario.

Figura 2.18

Diagrama esquemático de un transformador con núcleo y dos bobinados.



Nota. $N_{1,2}$ = Numero de vueltas en los devanados primario y secundario, a = relación de transformación. Fuente: **(Chapman, 2000)**

Esquemáticamente representaremos al conjunto en la forma que vemos en la figura 2.16, aunque sabemos que los bobinados están superpuestos y arrollados sobre el núcleo.

El flujo magnético producido en el bobinado primario abarcará también al secundario, de modo que sí en el primario se induce una f.e.m. debida a que el flujo es alternado, ocurrirá lo mismo en el secundario. La f.e.m. inducida en el primario la llamaremos E_1 en lugar de E como antes, para diferenciarla de E_2, que es la f.e.m. inducida en el secundario. El valor de E_1 es: **(Wilde, 2007)**

$$\mathbf{E_1 = 4,44\varphi f N_1 10^{-8}} \quad \textbf{(2.105)}$$

Donde hemos puesto N_1 al número de espiras del bobinado primario. La misma deducción se puede aplicar al secundario, de manera que la f.e.m. inducida en él tendrá una expresión análoga, con la diferencia que intervendrá el número de espiras del bobinado secundario, N_2, en lugar de N_2:

$$\mathbf{E_2 = 4,44\varphi f N_2 10^{-8}} \quad \textbf{(2.106)}$$

"Sí analizamos las expresiones de las f.e.m. inducidas en ambos bobinados vemos que tienen muchos términos en común, al extremo que si dividimos ambas ecuaciones entre si nos quedará una relación muy simple" **(Wilde, 2007)**:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{E_1}{E_2} = a \qquad \textbf{(2.107)}$$

Es decir, que las fuerzas electromotrices inducidas en ambos bobinados están en la misma relación que los respectivos números de espiras. La relación entre ambas se llama a: relación de transformación. Y se ve que eligiendo convenientemente los respectivos números de espiras se puede conseguir que entre las dos f.e.m. haya una relación prefijada cualquiera.

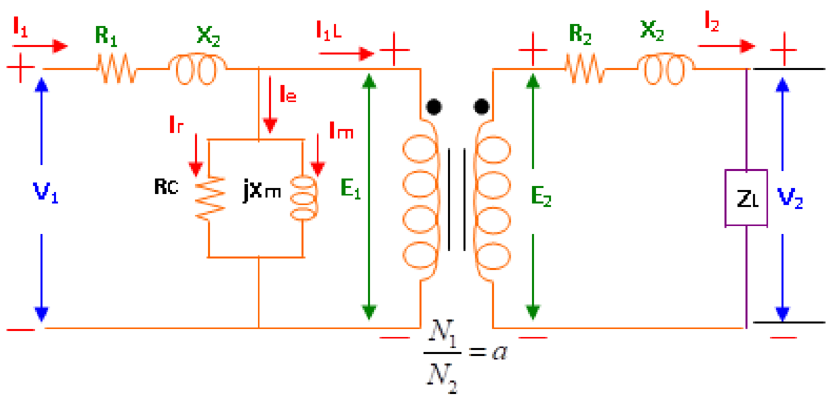
2.3.7. El transformador con carga:

2.3.7.1. Diagrama fasorial del transformador con carga monofásico.

Para determinar la regulación de voltaje del transformador, es necesario entender las caídas de tensión que se producen dentro de él.

Figura 2.19

Circuito equivalente del Transformador real.



Nota. Se muestra los diferentes parámetros eléctricos, donde a = relación de transformación.

Fuente: **(Chapman, 2000)**

Las ecuaciones vectoriales del circuito equivalente exacto de la figura 2.19. Serán teniendo presente que:

$$\mathbf{X_1 = \omega L_1; \quad X_S = \omega L_S} \tag{2.108}$$

$$\mathbf{\bar{V}_1 = (R_1 + jX_1)\bar{I}_1 + \bar{E}_1} \tag{2.109}$$

$$\mathbf{\bar{E}_2 = (R_2 + jX_2)\bar{I}_2 + \bar{V}_2} \tag{2.110}$$

$$\mathbf{\bar{I}_1 = \bar{I}_e + \bar{I}_{1L} = \bar{I}_m + \bar{I}_r + \bar{I}_{1L}} \tag{2.111}$$

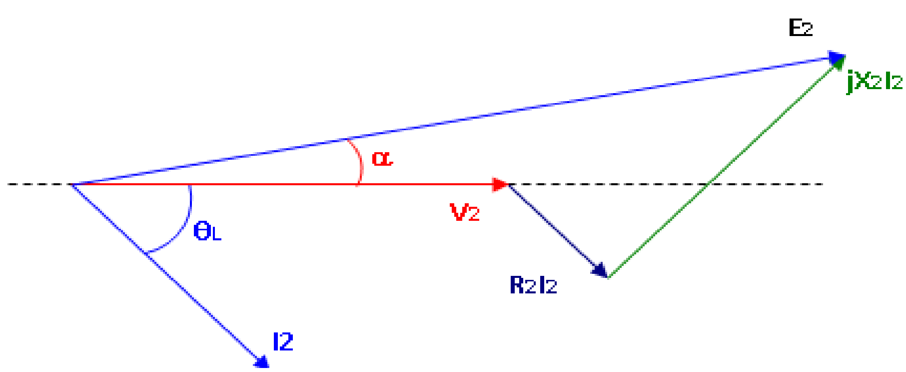
Estas tres ecuaciones son la base para el análisis del transformador y su representación vectorial nos proporciona el "diagrama fasorial del transformador".

2.3.7.2. Diagrama vectorial del transformador con carga inductiva.

Con la ecuación 2.110, construimos el diagrama vectorial del secundario mostrado en la figura 2.20 y para eso utilizamos como vector de referencia V_2 y suponemos que la carga es inductiva con un factor de potencia ($\cos\theta L$, en retraso).

Figura 2.20

Diagrama fasorial del secundario con carga inductiva.



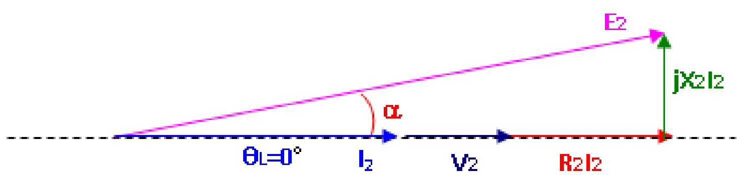
Nota. Representación fasorial del lado secundario del transformador con factor de potencia en retraso. Fuente: **(Wilde, 2007)**

2.3.7.3. Diagrama vectorial del transformador con carga resistiva.

Con la ecuación 2.110 construimos el diagrama vectorial del secundario figura 2.22 y para eso utilizamos como vector de referencia V_s y suponemos que la carga es resistiva con un factor de potencia ($\cos\theta L = 1$, en fase).

Figura 2.21

Diagrama fasorial del secundario con carga resistiva.



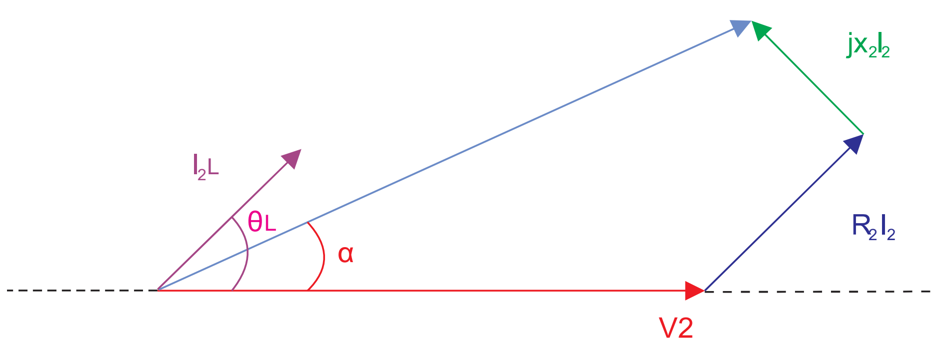
Nota. Representación fasorial del lado secundario del transformador con factor de potencia igual a la unidad. Fuente: **(Wilde, 2007)**

2.3.7.4. Diagrama vectorial del transformador con carga capacitiva.

Con la ecuación 2.110 construimos el diagrama vectorial del secundario figura 2.24 y para eso utilizamos como vector de referencia V_s y suponemos que la carga es capacitiva con un factor de potencia ($\cos\theta L$, en adelanto).

Figura 2.22

Diagrama fasorial del secundario con carga capacitiva.



Nota. Representación fasorial del lado secundario del transformador con factor de potencia en adelanto. Fuente: **(Wilde, 2007)**

2.3.8. Transformador trifásico.

2.3.8.1. Conexiones trifásicas básicas.

La energía eléctrica se distribuye casi en su totalidad mediante redes trifásicas, ya que así se obtiene una mayor economía en el costo de las instalaciones. Debido a esto los transformadores monofásicos se deben conectar en diferentes formas para poder transformar energía trifásica o si no es necesario utilizar transformadores trifásicos. “Estos son desde el punto de vista eléctrico iguales a las combinaciones monofásicos, aunque constructivamente y desde el punto de vista del circuito magnético difieren notablemente” **(Wilde, 2007)**.

Un transformador trifásico está constituido por tres transformadores, que se encuentran separados o combinados sobre un solo núcleo. Los primarios y los secundarios de cualquiera de ellos pueden conectarse independientemente en (Y) o en (Δ), dando lugar a un total de cuatro posibilidades de conexión en el transformador trifásico **(Elgerd, 1970)**:

1. Conexión triángulo – triángulo, (Δ - Δ).

2. Conexión estrella – estrella, (Y-Y).

3. Conexión triángulo – estrella, (Δ -Y).

4. Conexión estrella – estrella, (Y- Δ).

Según **(Chapman, 2000)**: La clave para analizar cualquier banco trifásico consiste en visualizar uno solo de los transformadores del banco. Cualquier transformador individual del banco se comporta exactamente igual al transformador monofásicos ya estudiado. Para transformadores trifásicos los cálculos de impedancia, regulación de voltaje, eficiencia y otros similares se efectúan por fase, empleando exactamente las mismas técnicas ya desarrolladas para transformadores monofásicos.

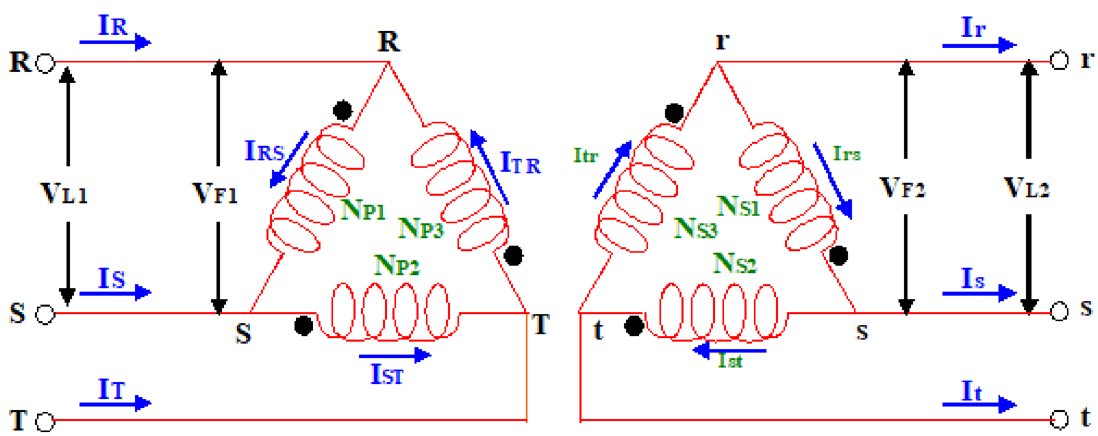
2.3.8.2. Conexión trifásica triangulo – triangulo.

A. Esquema y diagrama vectorial:

Está representada en la figura 2.26:

Figura 2.23

Conexión Delta - Delta.



Nota. Recomendable en autotransformadores cuando se requiere recuperar la caída de tensión.

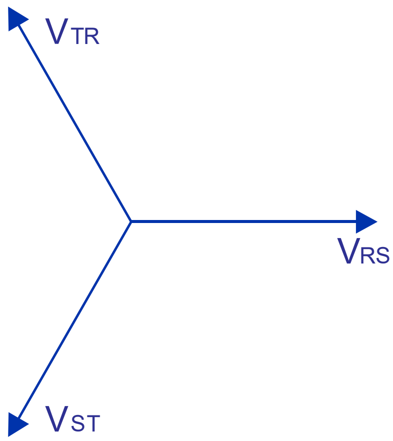
Fuente: **(Wilde, 2007)**

En la conexión Δ-Δ los voltajes de línea y de fase en el primario son iguales, es decir $V_{L1} = V_{F1}$. En el secundario los voltajes de línea y de fase también son iguales ya que $V_{L2} = V_{F2}$.Y así que los voltajes de línea de primario y secundario guardan la relación.

Esta transformación no tiene desfasamientos asociados con ella, y tampoco presenta problemas de armónicos ni cargas desequilibradas. Suponiendo que los transformadores son todos iguales e ideales es posible trazar el siguiente diagrama vectorial.

Figura 2.24

Diagrama fasorial de tensiones primario y secundario del transformador en la conexión delta – delta.



Nota. Cada vector está separado a 120°. Fuente: **(Wilde, 2007)**

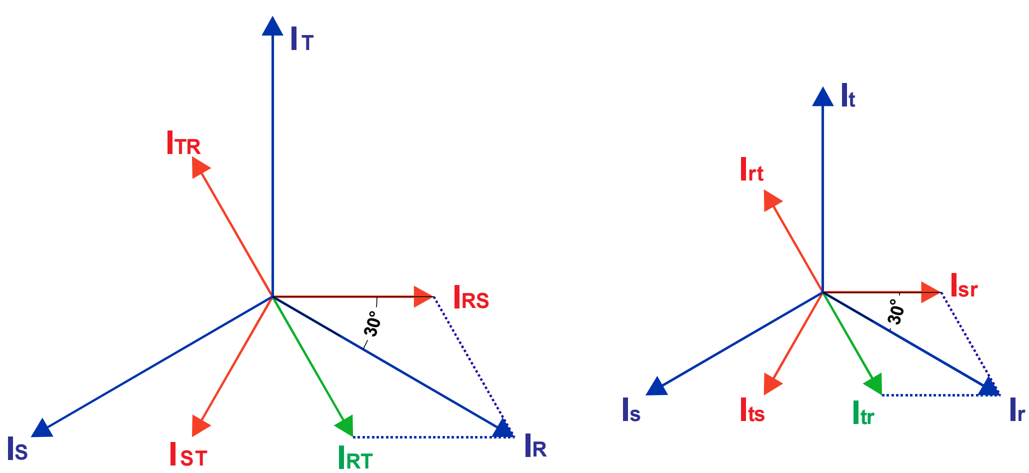
Las tensiones del primario y del secundario estarán lógicamente en fase y en relación:

$$\frac{\mathbf{V_{RS}}}{\mathbf{V_{rs}}} = \frac{\mathbf{N_1}}{\mathbf{N_2}} = \mathbf{a} \qquad \textbf{(2.112)}$$

Si la carga alimentada por el transformador es balanceada las corrientes que se obtienen formarán una terna simétrica y balanceada, es decir:

Figura 2.25

Diagrama fasorial de tensiones primario y secundario del transformador en la conexión delta – delta.



Nota. Representamos una suma vectorial. Fuente: **(Wilde, 2007)**

Las corrientes de línea se podrán determinar aplicando la Ley de Kirchoff a los nudos R, S, T y r, s, t, es decir:

$$\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{RS}} + \bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{RT}} \quad \textbf{(2.113)}$$

"y de acuerdo con la teoría de los circuitos trifásicos balanceados" **(Wilde, 2007)**:

$$\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{r}} = \sqrt{\mathbf{3}}\mathbf{I}_{\mathbf{sr}}\angle -\mathbf{30°} \quad \textbf{(2.114)}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{R}} = \sqrt{\mathbf{3}}\mathbf{I}_{\mathbf{RS}}\angle -\mathbf{30°} \quad \textbf{(2.115)}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{sr}} + \bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{tr}} \quad \textbf{(2.116)}$$

Las corrientes del primario y del secundario estarán siempre en la acostumbrada relación:

$$\frac{\mathbf{I}_{\mathbf{RS}}}{\mathbf{I}_{\mathbf{rs}}} = \frac{\mathbf{I}_{\mathbf{R}}}{\mathbf{I}_{\mathbf{r}}} = \frac{\mathbf{N}_{\mathbf{2}}}{\mathbf{N}_{\mathbf{1}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} \quad \textbf{(2.117)}$$

B. Características y aplicaciones:

Se emplea esta conexión principalmente cuando las corrientes son elevadas dado que $I_F = I_L/\sqrt{3}$, y cuando no es necesario el punto neutro.

Es necesario que los tres transformadores monofásicos sean iguales, pues de esa forma se puede repartir la potencia total en la misma proporción entre los tres, es decir que cada uno entregará 1/3 de la potencia total transformada, suponiendo que la carga es balanceada. **(Wilde, 2007)**

Es necesario que los tres transformadores monofásicos sean La relación de las tensiones de línea será igual a la relación de espiras de los transformadores monofásicos.

$$\frac{\mathbf{V_{RS}}}{\mathbf{V_{rs}}} = \frac{\mathbf{N_2}}{\mathbf{N_1}} = \mathbf{a} \qquad \textbf{(2.118)}$$

"Las tensiones de línea primaria y secundaria están en fase o a 180° según el tipo de conexión. En cuanto a las corrientes hay que diferenciar las de fase de la línea" **(Wilde, 2007)**.

Se cumple si el circuito es balanceado que $I_R = \sqrt{3} I_{RS}$ e $I_r = \sqrt{3} I_{sr}$ y además como puede verse en el diagrama vectorial de la figura 2.28 I_R e I_r estarán atrasados de 30° con respecto a I_{RS} e I_{sr}, respectivamente. Luego podemos escribir:

$$\mathbf{\bar{I}_R = \sqrt{3} I_{RS} \angle -30°} \qquad \textbf{(2.119)}$$

Estas corrientes cumplirán con la relación de transformación del transformador monofásico, es decir:

$$\mathbf{\bar{I}_r = \sqrt{3} I_{sr} \angle -30°} \qquad \textbf{(2.120)}$$

$$\frac{\mathbf{I_R}}{\mathbf{I_r}} = \frac{\mathbf{I_{RS}}}{\mathbf{I_{rs}}} = \frac{\mathbf{N_2}}{\mathbf{N_1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} \qquad \textbf{(2.121)}$$

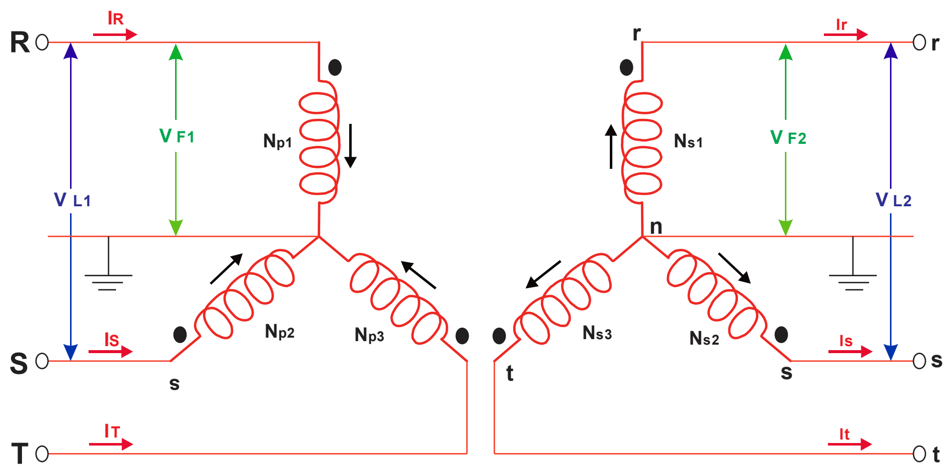
2.3.8.3. Conexión trifásica estrella – estrella.

A. Esquema y diagrama vectorial.

En esta conexión, tanto los primarios como los secundarios de los tres transformadores monofásicos, estarán conectados en estrella, como puede verse en la figura 2.29.

Figura 2.26

Conexión Estrella – Estrella.

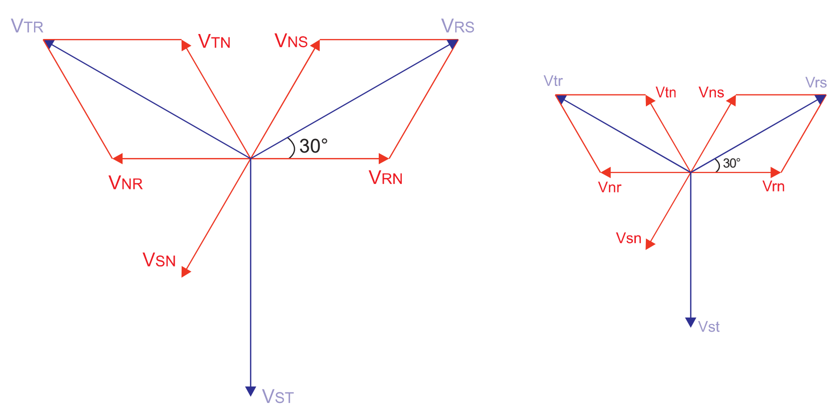


Nota. Con el objetivo de limitar a valores razonablemente muy bajos el valor de la impedancia de secuencia cero y del tercer armónico de la corriente magnetizante. Fuente: **(Wilde, 2007)**

Los puntos neutros N y n pueden quedar aislados o conectados a tierra o conectados a un cuarto conductor. Suponiendo condiciones balanceadas, esto no influye en la repartición de corrientes y se puede construir los diagramas vectoriales siguientes figura 2.30.

Figura 2.27

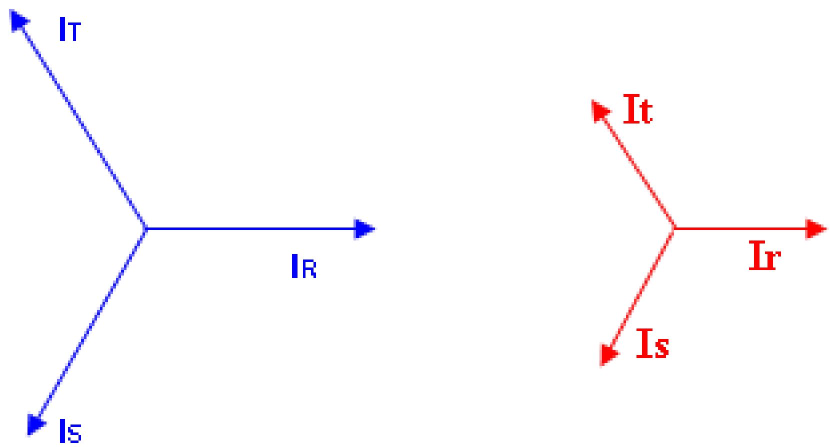
Diagrama fasorial de tensiones primario y secundario del transformador en la conexión estrella – estrella.



Nota. Cada vector está separado a 120°. Fuente: **(Wilde, 2007)**

Figura 2.28

Diagrama fasorial de corrientes primario y secundario del transformador en la conexión estrella – estrella



Nota. Corriente del primario y secundario de transformador. Fuente: **(Wilde, 2007)**

Como puede verse en los diagramas de las figuras 2-30 y 2.31, las tensiones de línea y de fase estarán relacionadas por:

$$\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{RS}} = \sqrt{3}\mathbf{V}_{\mathbf{RN}}\angle 30° \quad \textbf{(2.122)}$$

Por otro lado, las tensiones del primario y del secundario estarán en fase suponiendo transformadores ideales y en la relación:

$$\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{rs}} = \sqrt{3}\mathbf{V}_{\mathbf{rn}}\angle 30° \quad \textbf{(2.123)}$$

$$\frac{\mathbf{V}_{\mathbf{RN}}}{\mathbf{V}_{\mathbf{rn}}} = \frac{\mathbf{V}_{\mathbf{RS}}}{\mathbf{V}_{\mathbf{rs}}} = \frac{\mathbf{N}_1}{\mathbf{N}_2} = \mathbf{a} \quad \textbf{(2.124)}$$

Las corrientes del primario y del secundario cumplirán también con la relación:

$$\frac{\mathbf{I}_{\mathbf{R}}}{\mathbf{I}_{\mathbf{r}}} = \frac{\mathbf{N}_2}{\mathbf{N}_1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} \quad \textbf{(2.125)}$$

B. Características y aplicaciones.

Se emplea esta conexión principalmente cuando es necesario tener el punto neutro accesible y cuando las tensiones son muy altas.

Según **(Kosow, 1991)**: Tienen además la ventaja de proporcionar dos tensiones diferentes: la tensión de fase V_{rn} y la tensión de línea V_{rs}. Las tensiones de fase y de línea primaria y secundaria estarán en fase o a 180° según el tipo de conexión, lo mismo que las corrientes de línea estarán relacionadas por la relación de transformación, es decir:

$$\mathbf{\frac{V_{RS}}{V_{rs}} = \frac{V_{RN}}{V_{rn}} = \frac{I_r}{I_R} = \frac{N_1}{N_2} = a} \qquad \textbf{(2.126)}$$

Por otro lado, las tensiones de fase y de línea estarán relacionadas por las ecuaciones 2.124 y 2.126.

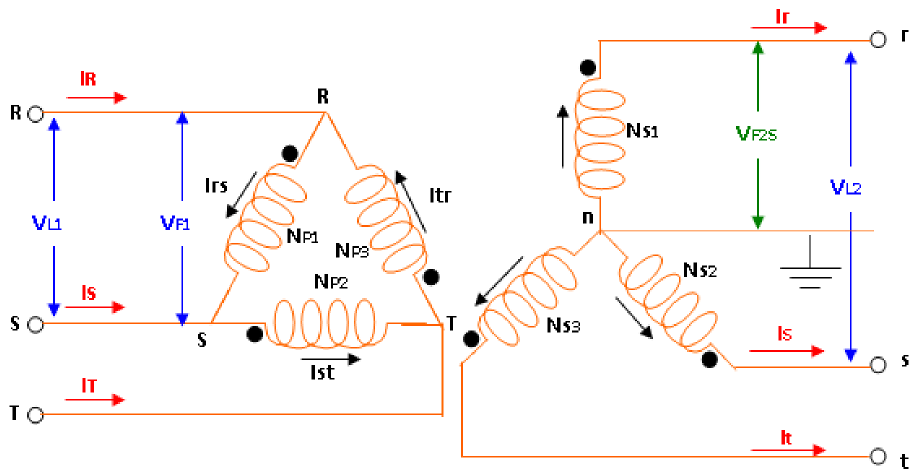
2.3.8.4. Conexión trifásica triangulo – estrella.

A. esquema y diagrama vectorial.

"Estas conexiones son muy usadas, ya que reúnen las ventajas de las conexiones triángulo y de las conexiones estrella. Cuando se trate por ejemplo de acoplar un alternador a una línea de transmisión de alta tensión" **(Chapman, 2000)**, se emplea siempre una conexión Δ-Y, Δ en el lado de baja tensión, donde las corrientes son elevadas, Y en el lado de alta tensión donde las corrientes son bajas. El esquema de la conexión será la siguiente figura 2.32 y los diagramas fasoriales en la figura 2.33.

Figura 2.29

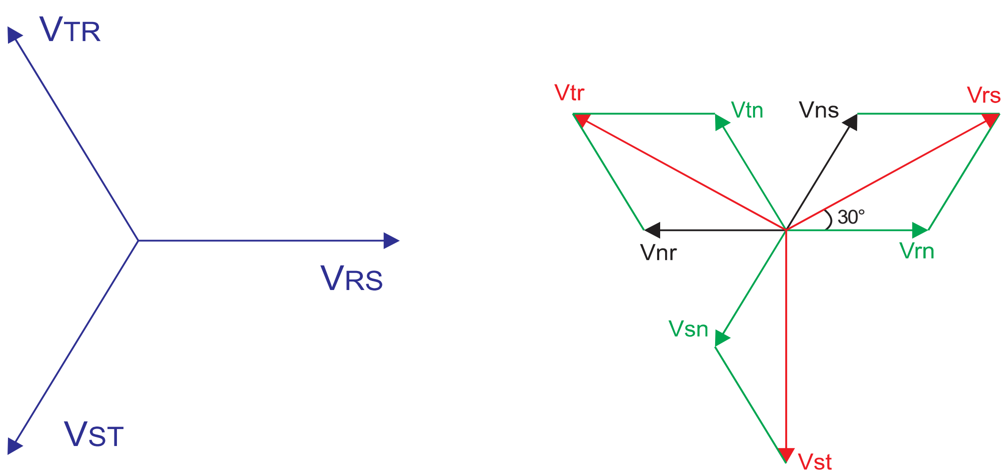
Conexión Delta - Estrella.



Nota. Conexionado que tiene el objetivo de conectar el sistema de generación con la línea de transmisión. Fuente: **(Wilde, 2007)**

Figura 2.30

Diagrama fasorial de tensiones primario y secundario del transformador en la conexión delta – estrella.

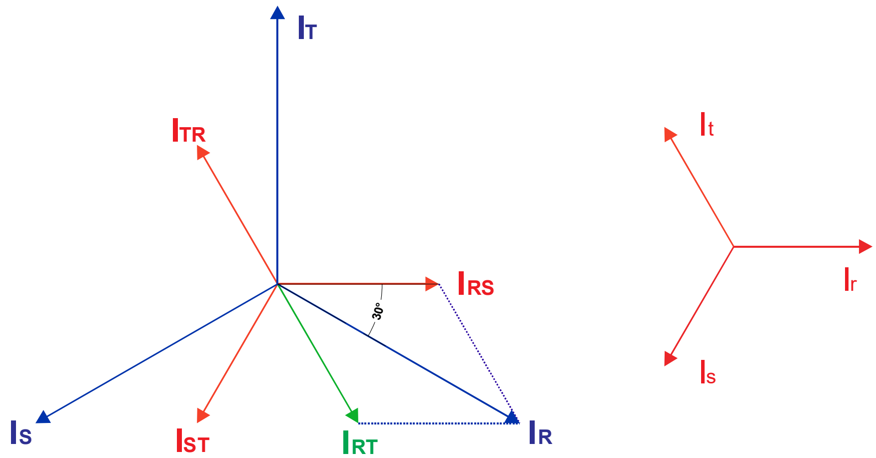


Nota. Cada vector está separado a 120°. Fuente: **(Wilde, 2007)**

Si la carga alimentada por el transformador es balanceada las corrientes que se obtienen formarán una terna simétrica y balanceada, es decir:

Figura 2.31

Diagrama fasorial de corrientes primario y secundario del transformador en la conexión delta – estrella.



Nota. Representamos una suma vectorial. Fuente: **(Wilde, 2007)**

Como puede observarse en la figura 2.33 las tensiones de línea quedan desfasadas de 30° lo mismo que las corrientes de línea del diagrama de la figura 2.34.

La relación de transformación quedará también afectada y tendremos que:

$$\mathbf{\frac{V_{RS}}{V_{rn}} = \frac{N_1}{N_2} = a} \tag{2.127}$$

Pero:

$$\mathbf{V_{rn} = \frac{V_{rs}}{\sqrt{3}}} \tag{2.128}$$

Entonces:

y en forma vectorial tendremos que:

$$\mathbf{\frac{V_{RS}}{V_{rs}} = \frac{1}{\sqrt{3}}a} \tag{2.129}$$

$$\mathbf{\overline{V}_{rs} = \frac{\sqrt{3}}{a}V_{RS}\angle 30°} \tag{2.130}$$

Con las corrientes pasará algo semejante y tendremos que:

$$\frac{\mathbf{I_r}}{\mathbf{I_{RS}}} = \frac{\mathbf{N_2}}{\mathbf{N_1}} = \mathbf{a} \tag{2.131}$$

$$\mathbf{I_{RS}} = \frac{\mathbf{I_R}}{\sqrt{3}} \tag{2.132}$$

y en forma vectorial tendremos:

$$\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{3}} \bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{R}} \angle 30° \tag{2.133}$$

B. Características y aplicaciones.

Como ya hemos visto esta conexión "se utiliza en redes de transmisión. Ofrece la ventaja de tener el neutro accesible y se adapta bien tanto para altas tensiones como para corrientes elevadas" **(Villanueva, 2013)**.

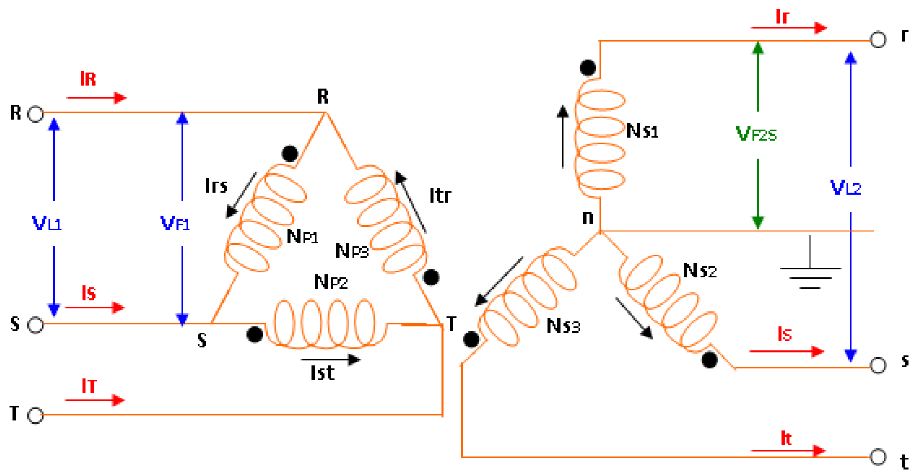
2.3.8.5. Conexión trifásica estrella – triangulo.

A. Esquema y diagrama vectorial.

En la figura 2.35 puede verse el esquema de esta conexión que difiere ligeramente de la Y-Δ para permitir obtener siempre el mismo desfasaje de 30° entre tensiones de línea con V_{rs} en adelanto.

Figura 2.32

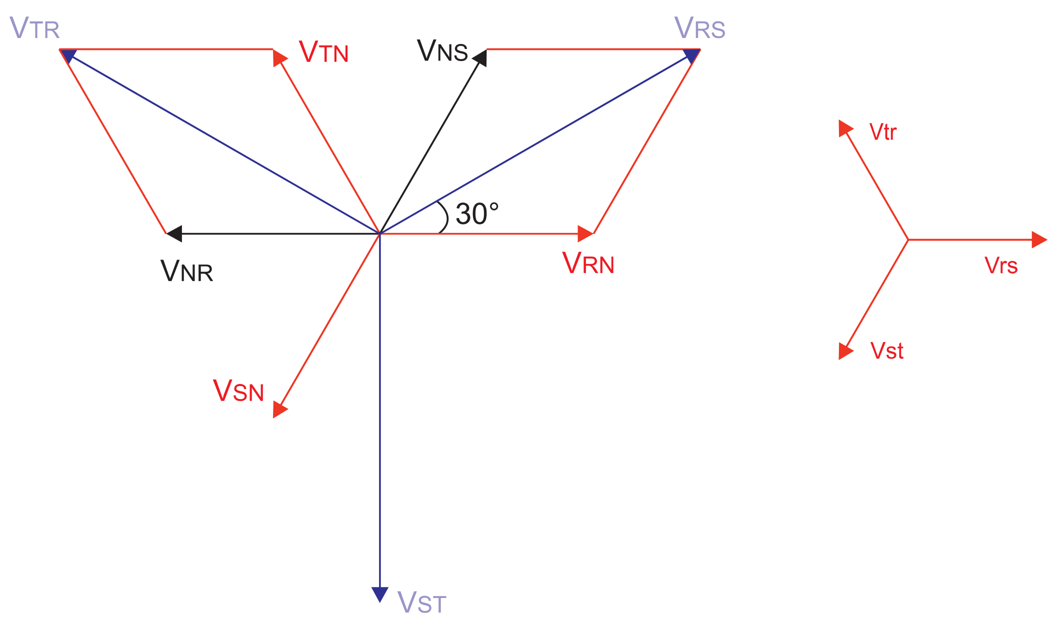
Conexión Estrella – Delta.



Nota. Recomendado para subestaciones de alta tensión reductoras, subestaciones de reparto y de distribución. Fuente: **(Wilde, 2007)**

Figura 2.33

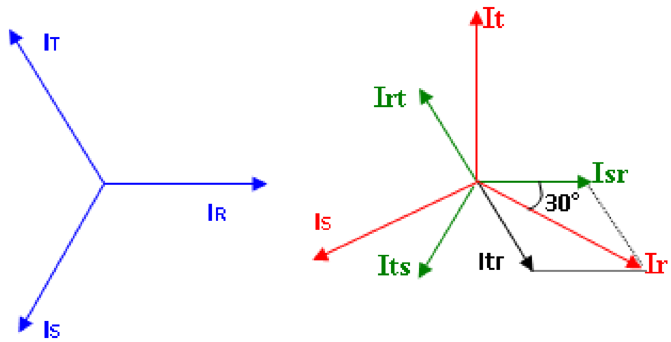
Diagrama fasorial de tensiones primario y secundario del transformador en la conexión estrella – Delta.



Nota. La figura representa la suma vectorial de las tensiones fase – neutro. Fuente: **(Wilde, 2007)**

Figura 2.34

Diagrama fasorial de corrientes primario y secundario del transformador en la conexión estrella – delta.



Nota. La figura representa la suma vectorial de las corrientes fase. Fuente: **(Wilde, 2007)**

Las relaciones de tensión y de corriente quedan modificadas de la siguiente manera:

$$\mathbf{I_{RS} = \frac{I_R}{\sqrt{3}}} \tag{2.134}$$

$$\mathbf{\frac{V_{RN}}{V_{rs}} = \frac{N_1}{N_2}} \tag{2.135}$$

Luego:

$$\mathbf{V_{rt} = V_{rs}} \tag{2.136}$$

$$\mathbf{\frac{\frac{V_{RS}}{\sqrt{3}}}{V_{rs}} = \frac{N_1}{N_2}} \tag{2.137}$$

$$\mathbf{\frac{V_{RS}}{V_{rs}} = \sqrt{3}a} \tag{2.138}$$

Y en forma fasorial tendremos:

$$\mathbf{\overline{V}_{rs} = \frac{1}{\sqrt{3}a} V_{RS}\angle 30°} \tag{2.139}$$

Las corrientes por otro lado estarán en relación:

$$\frac{\mathbf{I_{rs}}}{\mathbf{I_R}} = \mathbf{a} \qquad \textbf{(2.140)}$$

$$\mathbf{I_{rs}} = \frac{\mathbf{I_r}}{\sqrt{\mathbf{3}}} \qquad \textbf{(2.141)}$$

Y en forma vectorial será:

$$\frac{\mathbf{I_r}}{\mathbf{I_R}} = \sqrt{\mathbf{3}}\mathbf{a} \qquad \textbf{(2.142)}$$

$$\bar{\mathbf{I}}_\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{3}}\mathbf{a}\mathbf{I_R}\angle\mathbf{30°} \qquad \textbf{(2.143)}$$

2.3.9. Pruebas para determinar los parámetros del circuito equivalente del transformador trifásico por mediciones

Según **(Chapman, 2000)**, las pruebas protocolares a las que deben ser sometidos los transformadores, antes de su puesta en servicio, ya sean éstas construidas, reconstruidas son varias y una de ellas es justamente la determinación de los parámetros del transformador mediante las pruebas de vacío y la prueba de cortocircuito y estas pruebas que se realizan a los transformadores trifásicos se realizan en forma análoga a de los monofásicos.

Los parámetros que deben ser determinados son: La impedancia equivalente referida al primario o al secundario con sus dos componentes, la resistencia y la reactancia equivalentes, las resistencias y las reactancias de dispersión, la conductancia y la susceptancia de la admitancia de excitación, la relación de transformación. **(Kosow, 1991)**

Además, es importante conocer las características de excitación o sea la corriente de excitación con sus dos componentes, las pérdidas en el hierro y finalmente las pérdidas en el cobre de las bobinas.

Para obtener todos estos valores se realizan dos tipos de pruebas:

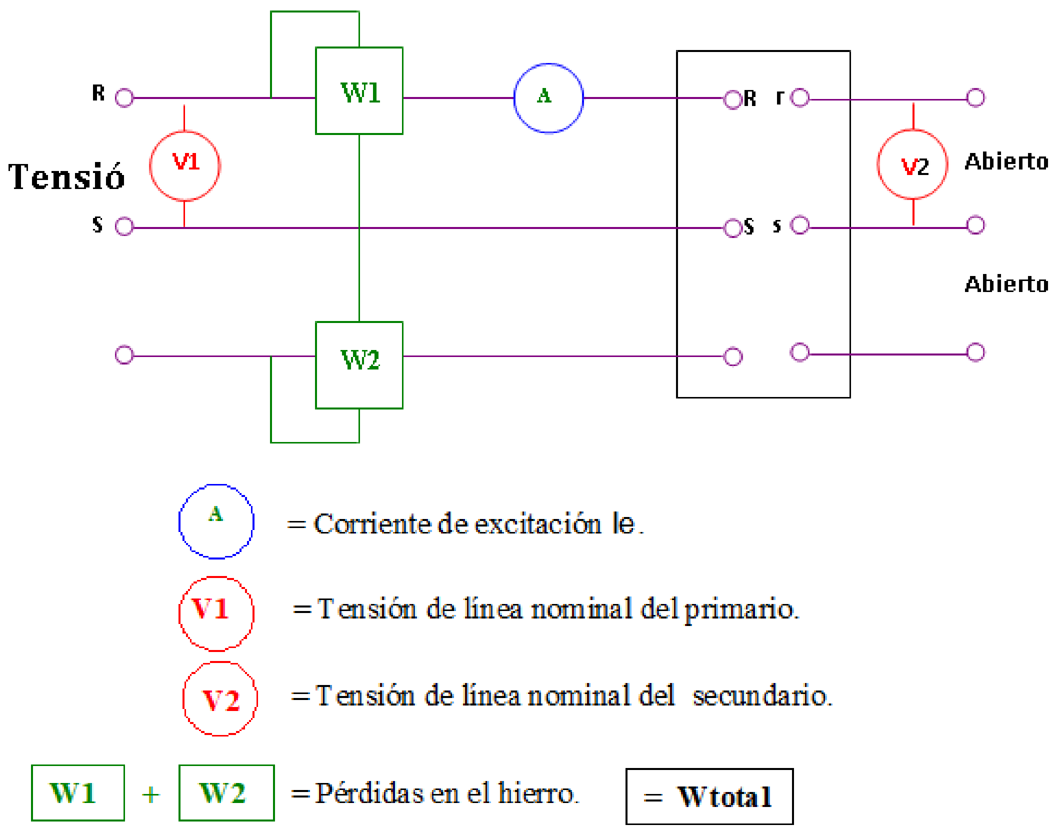
- Prueba en circuito abierto.
- Prueba en cortocircuito.

a) Prueba de circuito abierto.

La prueba de vacío de los transformadores de distribución se realiza aplicando la tensión nominal, ya sea en el lado de AT o BT a circuito abierto, decir si aplicamos la tensión nominal por el lado de BT entonces el lado de AT deberá permanecer abierto.

Figura 2.35

Esquema de conexiones para la prueba de circuito abierto en transformadores trifásicos.



Nota. La figura representa como conectar el vatímetro para una prueba en circuito abierto.

Fuente: **(Wilde, 2007)**

Se conecta además un voltímetro, un amperímetro y dos vatímetros de la forma indicada en la figura 2.38, de tal manera que los instrumentos registran:

Mientras le es aplicado al primario el voltaje nominal. Al no haber corriente de carga, fluirá solamente la componente de excitación por la rama de magnetización del transformador y que puede medirse con un amperímetro. Los elementos en serie R_P y X_P son tan pequeños comparados con R_c y X_M que producen unas caídas de voltaje despreciables, así que prácticamente todo el voltaje de alimentación queda aplicado sobre la rama de magnetización. Finalmente, si se conectan dos vatímetros como en la figura 2.38, éste medirá las pérdidas en el hierro ya que las pérdidas por efecto Joule en el cobre serán despreciables. Como el transformador está alimentado con su tensión nominal, estas pérdidas representan con muy buena aproximación las pérdidas en funcionamiento normal.

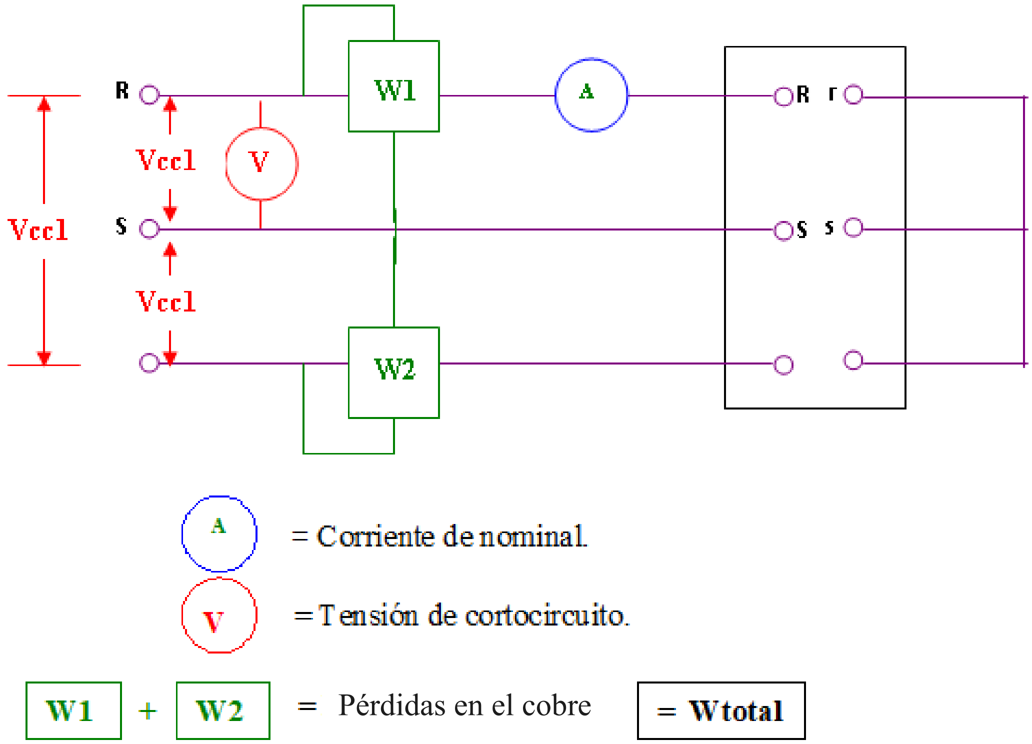
Las conexiones para efectuar el ensayo en circuito abierto están indicadas en la figura 2.38, y este es válido para determinar los parámetros correspondientes a esta prueba sea cual fuese la conexión básica, pero si difieren en sus valores y dependiendo de sus características. Una vez tomada las lecturas en el sistema trifásico, de preferencia para su análisis es a partir de un equivalente monofásico cualquiera que fuese la conexión. Que más adelante desarrollaremos para cada una de las conexiones básicas.

b) Prueba de cortocircuito.

La prueba se realiza poniendo en Cortocircuito uno de los lados del transformador y alimentando por el otro lado con una tensión muy bajo y muy inferior a la nominal del orden del 5% de la tensión nominal, Esta tensión es llamado justamente tensión de cortocircuito (Vcc). De tal forma que fluyan por las bobinas las corrientes nominales, tal como indica en la figura 2.39.

Figura 2.36

Esquema de conexiones para la prueba de cortocircuito en transformadores trifásicos.



Nota. La figura representa como conectar el vatímetro para una prueba en cortocircuito.

Fuente: **(Wilde, 2007)**

“Luego con los datos obtenidos con estas pruebas se puede deducir los parámetros del transformador, su eficiencia, su regulación, su relación de transformación. etc. Procediendo de esta forma análoga a los transformadores monofásicos y utilizando los circuitos equivalentes” **(Kosow, 1991)**.

El voltaje de alimentación se ajusta de tal manera que circule la corriente nominal por el arrollamiento cortocircuitado. (Asegúrese de que el voltaje primario sea lo suficientemente bajo para no quemar el transformador mientras trata de ensayarlo). De nuevo, debe medirse el voltaje, la corriente y la potencia que entran al transformador.

Como el voltaje de alimentación es tan bajo durante el ensayo, por la rama de magnetización fluirá una corriente muy pequeña. Si se desprecia esta corriente de excitación, toda la caída de voltaje del transformador puede atribuirse a los elementos en serie del circuito. La magnitud de las impedancias serie referidas al primario del transformador serán como los que se indicarán más adelante para cada una de las conexiones básicas **(Kosow, 1991)**.

Las conexiones para efectuar el ensayo en cortocircuito están indicadas en la figura 2.39, y este es válido para determinar los parámetros correspondientes a esta prueba sea cual fuese la conexión básica, pero si difieren en sus valores y dependiendo de sus características.

CAPÍTULO III

3. FORMULACIÓN DE LA PROPUESTA

3.1. Modelo matemático de una máquina eléctrica estática mediante ecuaciones diferenciales.

3.1.1. Introducción al estudio del sistema.

Un sistema es un objeto complejo cuyos componentes se relacionan con al menos algún otro componente; puede ser material o conceptual. Todos los sistemas tienen composición, estructura y entorno, pero sólo los sistemas materiales tienen mecanismo, y sólo algunos sistemas materiales tienen forma. Según el sistemismo:

> Todos los objetos son sistemas o componentes de otro sistema. Por ejemplo, un núcleo atómico es un sistema material físico compuesto de protones y neutrones relacionados por la interacción nuclear fuerte; una molécula es un sistema material químico compuesto de átomos relacionados por enlaces químicos; y una teoría científica es un sistema conceptual lógico compuesto de hipótesis, definiciones y teoremas relacionados por la correferencia y la deducción (implicación). **(Doxrud, 2018)**

3.1.2. Sistema.

Es todo organizado o complejo; un conjunto o combinación de cosas o partes, que forman un todo complejo o unitario. Por otra parte, se denomina sistema "al conjunto de teorías ocupándose centralmente de las características estructurales de los sistemas, pudiendo atravesar las existentes barreras disciplinarias" **(Doxrud, 2018)**

El estudio y diseño de un sistema físico consta, frecuentemente de cuatro pasos:

- Modelado.
- Establecimiento de ecuaciones matemáticas que lo describan.

- Análisis.
- Diseño.

3.1.2.1. Modelado.

"Un modelo matemático es la descripción matemática de un sistema o fenómeno de la vida real" **(Doxrud, 2018)**

La formulación de un modelo matemático implica:

- Identificar las variables (por ejemplo, el modelado matemático que dependen de la potencia, la tensión, corriente tanto primaria como secundaria, la relación de transformación y frecuencia. Mientras que para la simulación depende del modelo matemático o función de transferencia) que son causantes del cambio de un determinado sistema de estudio.
- Establecer un conjunto de hipótesis razonables acerca del sistema de estudio (por ejemplo, el desarrollo de los diferentes modelos matemáticos representa la operatividad del transformador, la posibilidad de simular en algún software que interactúe con el entorno Windows, está relacionada con el aprendizaje pedagógico, y la comparación de sus resultados con su entendimiento). Siendo estas, leyes empíricas aplicables.

Las hipótesis de un sistema implican con frecuencia la razón o tasa de cambio de una o más variables que intervienen. "El enunciado matemático de esas hipótesis es una o más ecuaciones donde intervienen derivadas o ecuaciones diferenciales" **(Doxrud, 2018)**.

El proceso de modelado básicamente sigue los siguientes pasos:

- Identificación de variables estableciendo una notación matemática.
- Leyes que se pueden aplicar.
- Planteamiento de las ecuaciones.

Una vez formulado un modelo matemático equivalente a una ecuación a un sistema de ecuaciones diferenciales, debemos intentar resolver.

3.1.2.2. Establecimiento de ecuaciones.

Después que un sistema, un modelo, es seleccionado para un sistema, el próximo paso en el estudio es hallar las ecuaciones matemáticas para describir dicho sistema. “Las ecuaciones que describen un sistema pueden asumir variadas formas; ellas pueden ser lineales, no lineales, ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales u otras” **(Doxrud, 2018)**. Dependiendo de las respuestas buscadas, una forma de ecuación puede ser preferible a otras en la descripción de un mismo sistema. En conclusión, un sistema podría tener muchas diferentes ecuaciones matemáticas que lo describen, así como un sistema físico puede tener diferentes modelos.

3.1.2.3. Análisis.

Una vez que la descripción matemática de un sistema es obtenida, el próximo paso en el estudio envuelve el análisis, cualitativo y/o cuantitativo. En el análisis cuantitativo (estadísticas); el interés se centra en la respuesta exacta del sistema ante determinadas entradas y condiciones iniciales. Esta parte del análisis puede ser facilitada por el uso de una computadora. En el análisis cualitativo, se está interesado en las propiedades generales del sistema. Sendo esta, la naturaleza de la tesis.

3.1.2.4. Diseño.

El diseño prácticamente es el resultado de los anteriores y consiste en este caso la simulación en MATLAB/SIMULINK.

3.1.3. Modelado en ecuaciones diferenciales.

3.1.3.1. Desarrollo de las ecuaciones diferenciales de transformadores trifásicos.

Se desarrolla el sistema de ecuaciones diferenciales de un banco trifásico de transformadores a partir del análisis de un transformador monofásico que compone el banco.

3.1.3.2. Principio de funcionamiento del transformador.

"Un transformador consiste en dos o más devanados aislados, de cierta resistencia y autoinductancia, que se encuentran acoplados por inducción mutua, es decir mediante flujos magnéticos mutuos los cuales deben ser variables en el tiempo para que exista acción transformatriz" **(Stephen J, 2012)**

> Este vínculo magnético define los valores de las inductancias, y dependerá de la naturaleza, del circuito magnético: es decir de su reluctancia, la cual es función del material empleado, además del flujo disperso existente, el cual presenta en general una reluctancia diferente a la del flujo mutuo. Por otra parte, la inductancia de dispersión y magnetizante es función del cuadrado del número de espiras, pero la inductancia mutua depende del producto de los números de espiras **(Fraile, 2003)**

Desde un punto de vista energético se lo puede definir como un conversor electromagnético de la energía, que transmite energía eléctrica con ciertos valores de tensión y corriente en uno de sus devanados denominado primario (por donde ingresa la energía), en general, a valores diferentes de tensión y corriente, en los demás devanados que denominados secundarios.

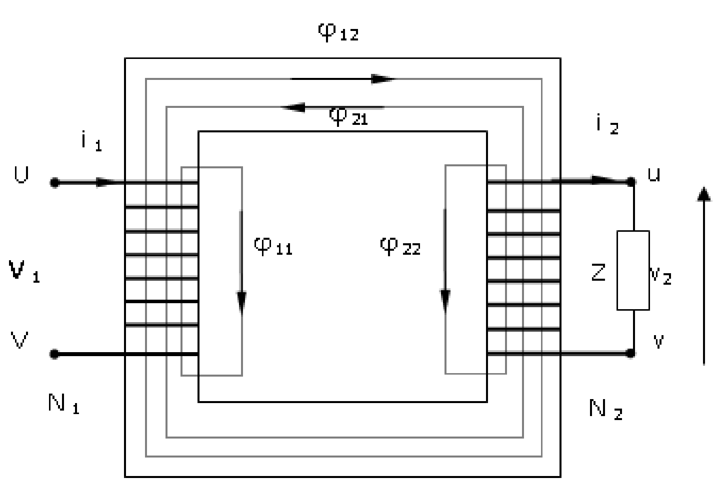
"El comportamiento transitorio de las variables del transformador dependerá entonces de los valores de los parámetros de este: resistencias, autoinductancias e inductancias mutuas, pero además de los parámetros de la carga en el secundario" **(Fitzgerald, Charles, & Stephen, 2004)**

Para el siguiente análisis, consideraremos un transformador de dos devanados donde el funcionamiento del transformador está basado en el principio de la interacción electromagnética de dos o más de circuitos inmóviles uno, con respecto al otro. En la figura 3.1, se observa el esquema principal de un transformador de dos devanados. Si a los bornes U-V de un devanado se aplica el voltaje de una red de corriente alterna, bajo la acción del flujo magnético que acopla los dos devanados surge en el secundario una f.e.m. alterna, y por el circuito secundario fluirá una corriente que alimenta de energía eléctrica a las cargas conectados a los bornes “u-v “del secundario. Así se transmite energía de la corriente alterna del circuito primario al circuito secundario. Para el acoplamiento electromagnético entre los devanados sirve el núcleo del transformador, armado de chapa de acero al silicio. Para convertir (transformar) el voltaje y la corriente del primario en voltaje y corriente del secundario es preciso calcular y montar adecuadamente los devanados primario y secundario.

3.1.3.3. Ecuaciones de las fuerzas magnetomotrices y las f.e.m. del transformador.

Figura 3.1

Transformador monofásico.



Nota. La figura representa los devanados primario y secundario del trasformador, donde φ = flujo magnético, Z = impedancia de la carga. Fuente: **(Fraile, 2003)**

El análisis del funcionamiento de un transformador en cualquier régimen se fundamenta en las ecuaciones de las fuerzas electromotrices de los devanados primario y secundario y en la ecuación de la fuerza magnetomotriz.

Sean V_1 el valor instantáneo del voltaje de una red de potencia de frecuencia f suministrada a los bornes U-V del devanado primario de un transformador; i_1 e i_2 los valores de las corrientes en los devanados primario y secundario. Las corrientes i_1 e i_2 generan las fuerzas magnetomotrices primaria y secundaria: i_1N_1 e $i_2 N_2$, donde N_1 y N_2 son los números de espiras de los devanados primario y secundario conectadas en serie. De acuerdo con la ley de Hopkinson para los circuitos magnéticos tenemos:

$$\mathbf{i_1N_1+i_2N_2 = i_0N_1} \qquad \textbf{(3.1)}$$

O bien:

$$\mathbf{i_1N_1 = -i_2N_2 + i_0N_1} \qquad \textbf{(3.2)}$$

Aquí i_0N_1 es la componente magnetizante necesaria para generar en el núcleo del transformador un flujo cuyo valor instantáneo llamado φt el cual es el resultante de los flujos mutuos generados por el primario y el secundario, en la figura 3.1 tenemos cuatro flujos estos son: φ_{12}, φ_{11}, φ_{21} y φ_{22}. La f.m.m. del primario N_1i_1 produce los flujos φ_{12} y φ_{11}.

Donde :

φ_{12} : Es el flujo mutuo que enlaza a ambos devanados como se aprecia de dicha figura 3.1

φ_{11} : Es el flujo de dispersión del devanado primario.

Análogamente la f.m.m. N_2i_2 genera los flujos φ_{21} y φ_{22} en donde:

φ_{21} : Es el flujo mutuo que enlaza a ambos devanados.

φ_{22} : Es el flujo de dispersión que solo enlaza al devanado secundario.

Debido a la ley de Lenz la acción magnetomotriz de la corriente secundaria tiene que crear un flujo que se debe oponer al flujo mutuo creado por la corriente del primario φ_{12}.

Entonces el flujo mutuo resultante se expresa como:

$$\boldsymbol{\varphi_t = \varphi_{12} + \varphi_{21}} \tag{3.3}$$

Los enlaces de flujo mutuo total del devanado primario son:

$$\boldsymbol{\psi_p = N_1\varphi_t} \tag{3.4}$$

Análogamente los enlaces de flujo mutuo total del devanado secundario son:

$$\boldsymbol{\psi_s = N_2\varphi_t} \tag{3.5}$$

Estos enlaces de flujos mutuos totales generan en cada devanado una f.e.m. dada por las siguientes ecuaciones:

- f.e.m. inducida en el primario:

$$\boldsymbol{e_1 = -\frac{d\psi_p}{dt}} \tag{3.6}$$

- f.e.m. inducida en le secundario:

$$\boldsymbol{e_2 = -\frac{d\psi_s}{dt}} \tag{3.7}$$

Además, las f.m.m. N_1i_1 y N_2i_2 producen los flujos de dispersión φ_{11} y φ_{22}. Puesto que los flujos de dispersión se distribuyen principalmente en un medio magnético con una permeabilidad magnética constante (aire), se puede considerar que la inductancia de dispersión L_{11} y L_{12}, permanecen constantes **(Nagle, Saff, & Snider, 2005)**

- Los enlaces de flujo de dispersión del devanado primario son:

$$\psi_{11} = N_1\varphi_{11} \tag{3.8}$$

- Los enlaces de flujo de dispersión del devanado secundario son:

$$\psi_{22} = N_2\varphi_{22} \tag{3.9}$$

Correspondientemente las f.e.m. de dispersiones creadas por los enlaces de dispersión en los devanados primario y secundario serán:

- f.e.m. de dispersión inducida en el primario:

$$e_{11} = -\frac{d\psi_{11}}{dt} \tag{3.10}$$

- f.e.m. de dispersión inducida en el secundario:

$$e_{22} = -\frac{d\psi_{22}}{dt} \tag{3.11}$$

De acuerdo con la ley de Kirchoff de los voltajes tenemos la ecuación de la f.e.m. en el primario:

$$v_1 + e_1 + e_{11} = i_1R_1 \Rightarrow v_1 = -[e_1 + e_{11} + (-i_1R_1)] \tag{3.12}$$

Reemplazando la f.e.m. inducida en el primario (e_1) y f.e.m. de dispersión en el primario (e_{11}), en la ecuación anterior 3.12, obtenemos:

$$v_1 = \frac{d\Psi_{11}}{dt} + \frac{d\Psi_p}{dt} + i_1R_1 \tag{3.13}$$

donde R_1 es la resistencia activa del primario.

En esta forma la ecuación 3.12 se convierte en ecuación de equilibrio de las f.e.m, de acuerdo con la cual la tensión v_1 se considera como la acción de la red con respecto al primario del transformador, y la suma "$e_1 + e_{11} +(- i_1R_1)$", como la reacción de este devanado con respecto a la red. **(Nagle, Saff, & Snider, 2005)**

Los enlaces de flujo totales del devanado primario son:

$$\psi_1 = \psi_{11} + \psi_p \tag{3.14}$$

Compuesto por los enlaces de flujo de dispersión "ψ_{11}" más los enlaces de flujo mutuo resultante "ψ_p" si trabajamos la ecuación 3.13 y reemplazamos la ecuación 3.14 en la 3.13 llegamos a:

$$\mathbf{v_1 = \frac{d(\Psi_{11} + \Psi_p)}{dt} + i_1R_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} + i_1R_1} \tag{3.15}$$

"En el secundario actúa la f.e.m "e_2" producida por el flujo principal "φ_t", la f.e.m "e_{22}" creada por el flujo de dispersión "φ_{22}", y la f.e.m "$-i_2R_2$" en donde R_2 es la resistencia activa del secundario" **(Nagle, Saff, & Snider, 2005)**. La suma algebraica de todas estas f.e.m. forma la tensión en los bornes del secundario, equilibrada por la reacción de la red secundaria. Así pues:

$$\mathbf{e_2 + e_{22} + (-i_2R_2) = v_2} \tag{3.16}$$

Sustituyendo e_2 y e_{12} por las expresiones dadas en la página anterior y pasando al otro miembro los términos del miembro izquierdo de la ecuación 3.16, llegamos a:

$$\mathbf{v_2 = \frac{d\Psi_{22}}{dt} + \frac{d\Psi_s}{dt} + i_2R_2 = 0} \tag{3.17}$$

Los enlaces totales de flujo del devanado secundario son:

$$\psi_2 = \psi_{22} + \psi_s \tag{3.18}$$

Compuesto por los enlaces de flujo de dispersión "ψ_{12}" más los enlaces de flujo mutuo resultante "ψ_s" si trabajamos la ecuación 3.17 y remplazamos la ecuación 3.18 en la 3.17 obtenemos:

$$\mathbf{v_2 = \frac{d(\Psi_{22} + \Psi_s)}{dt} + i_2R_2 = v_2 + \frac{d\Psi_2}{dt} + i_2R_2 = 0} \quad \textbf{(3.19)}$$

“Si se pueden despreciar las pérdidas en el hierro, que por lo general son pequeñas, y considerar que la permeabilidad magnética de éste se mantiene constante, los enlaces de flujo ψ_1 y ψ_2 se pueden escribir en la forma siguiente” **(Nagle, Saff, & Snider, 2005)**:

$$\boldsymbol{\psi_1 = L_1i_1 + M_{12}i_2} \quad \textbf{(3.20)}$$

Donde “L_1” es la inductancia total del primario compuesta por la inductancia de dispersión L_{11} y la inductancia magnetizante L_{12} mientras que M_{12} es la inductancia mutua del devanado primario con respecto al secundario.

$$\mathbf{L_1 = L_{11} + L_{22}} \quad \textbf{(3.21)}$$

Análogamente los enlaces de flujo del secundario son:

$$\boldsymbol{\psi_2 = L_2i_2 + M_{21}i_1} \quad \textbf{(3.22)}$$

“Donde L_2 es la inductancia total del secundario compuesta por la inductancia de dispersión L_{22} y la inductancia magnetizante L_{21} y M_{21} es la inductancia mutua del devanado secundario con respecto al primario” **(Nagle, Saff, & Snider, 2005)**.

$$\mathbf{L_2 = L_{22} + L_{21}} \quad \textbf{(3.23)}$$

Como se sabe las inductancias mutuas M_{12} y M_{21} son iguales ya que estos coeficientes son factores geométricos y los devanados se encuentran a la misma distancia uno del otro. Remplazando la ecuación 3.21 en la 3.20 y luego remplazando en la ecuación 3.15 obtenemos:

$$\mathbf{v_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} + i_1R_1 = \frac{d(L_{11}i_1 + L_{12} + i_1 + Mi_2)}{dt} + i_1R_1} \quad \textbf{(3.24)}$$

$$\mathbf{v_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} + i_1R_1} \tag{3.25}$$

Realizando lo mismo con las ecuaciones 3.22, 3.23 y 3.19 obtenemos:

$$\mathbf{v_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} + i_2R_2 = v_2 + \frac{d(L_{22}i_2 + L_{21} + i_2 + Mi_1)}{dt} + i_2R_2} \tag{3.26}$$

$$\mathbf{v_2 + L_{22}\frac{di_2}{dt} + L_{21}\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} + i_2R_2 = 0} \tag{3.27}$$

Resumiendo, los valores:

Cuadro 3.1

Resumen de los parámetros del transformador.

Simbología		Descripción
N_1, N_2	:	Número de espiras del primario y secundario.
V_1, V_2	:	Tensiones primarias y secundarias.
i_1, i_2	:	Corriente del primario y secundario.
ψ_1, ψ_2	:	Enlaces de flujo primario y secundario.
φ_1, φ_2	:	Flujos totales del primario y secundario.
Φ_{11}, φ_{22}	:	Flujos de dispersión primario y secundarios.
φ_{12}, φ_{21}	:	Flujo mutuo primario y secundario.
L_1, L_2	:	Autoinductancias del primario y secundario.
L_{11}, L_{22}	:	Inductancias de dispersión primaria y secundaria.
L_{12}, L_{21}	:	Inductancia magnetizante primaria y secundaria.
M	:	Inductancia mutua entre los devanados.
$a = N_1/N_2$	:	Relación de espiras.
$K_n = V_{1n}/V_{2n}$	:	Relación de transformación nominal.

Nota: representación simbólica de los parámetros del transformador. Fuente: Elaboración propia.

3.1.3.4. Resultado de las ecuaciones diferenciales del transformador monofásico.

Finalmente; reuniendo las ecuaciones 3.25 y 3.27 tenemos:

$$\mathbf{v_1 = \mathit{u}_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} + i_1R_1} \tag{3.28}$$

$$\mathbf{0 = v_2 + L_{22}\frac{di_2}{dt} + L_{21}\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} + i_2R_2} \tag{3.29}$$

Que son las ecuaciones diferenciales del transformador monofásico de dos devanados cuyos parámetros son las inductancias y las resistencias de dicho transformador. La solución del sistema de ecuaciones anterior nos permite estudiar las condiciones transitorias que se presentan en el transformador como por ejemplo cuando éste es energizado por la red o cuando el mismo debe soportar corrientes de cortocircuito o si se presentan cambios de cargas etc.

El modelo matemático anterior es satisfactorio para estudiar las condiciones de carga y cortocircuitos, pero cuando el transformador está en vacío se manifiesta el comportamiento no lineal del mismo debido a la característica no lineal de magnetización del hierro y se observa la distorsión armónica que se manifiesta en la corriente de vacío debido a que las inductancias magnetizantes y la inductancia mutua dependen de la permeabilidad del material magnético y esta última depende del grado de magnetización del transformador y a causa de ello los parámetros del sistema de ecuaciones varían en el tiempo y no pueden extraerse de las derivadas y, por lo tanto, la resolución de las ecuaciones 3.28 y 3.29 tal cual están expresadas no explican la forma que presenta la corriente de vacío del transformador y debe recurrirse a la curva de magnetización del hierro para construir la forma de onda de dicha corriente.

Sin embargo, la f.e.m. inducida en el primario “e1” es prácticamente senoidal debido a que la caída de tensión que provoca la corriente de vacío en la impedancia “$R_1 + j\,\omega\,L_{11}$” es tan pequeña que prácticamente la tensión “e_1” es casi igual a la tensión de la red que es senoidal lo que implica que el flujo “φmt” es también prácticamente senoidal ya que “e_1” es proporcional a su derivada y como este flujo enlaza al secundario la f.e.m “e_2” también tiene la misma forma de onda que “e_1”

Cuando el transformador está en carga la corriente de vacío es un porcentaje muy pequeño de la corriente de carga en consecuencia la distorsión armónica no se observa y las corrientes del primario y del secundario son a todos los fines prácticos sinusoidales por lo que se desprecia la alinealidad del transformador y se utilizan las ecuaciones 3.28 y 3.29 en las cuales se deben tomar las inductancias correspondiente a la zona de operación lineal del transformador para estudiar el comportamiento en carga de dicha máquina.

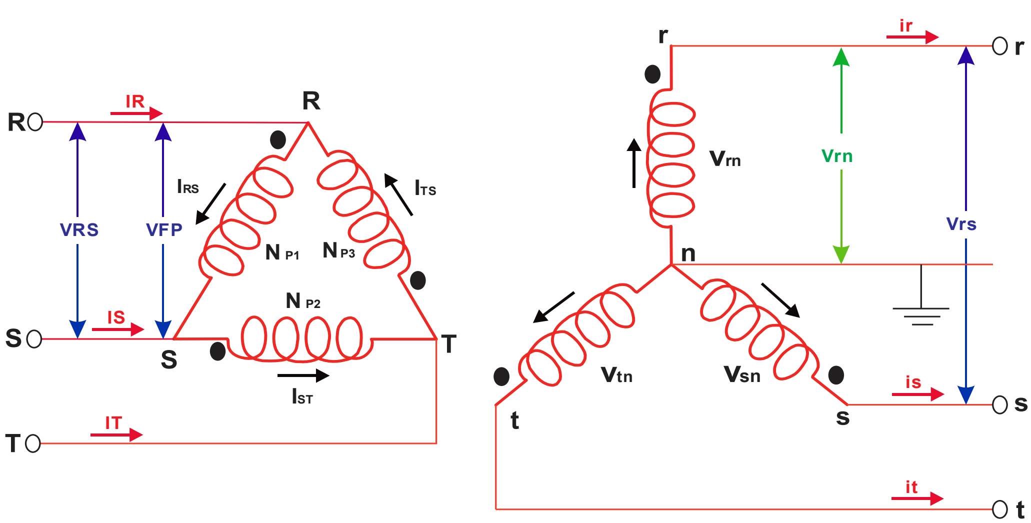
La ventaja de este método de estudio sobre los conocidos métodos de expresar las anteriores ecuaciones en forma fasorial es que éste último no permite estudiar las condiciones transitorias que se presentan en el trasformador y es en este período en donde la máquina se encuentra más exigida, el método fasorial solo analiza las condiciones de régimen permanente.

3.1.3.5. Resultado de las ecuaciones diferenciales del banco trifásico.

Se desarrollarán las ecuaciones de un banco en conexión Triángulo – Estrella con el neutro del secundario conectado a tierra, el siguiente circuito muestra dicha conexión:

Figura 3.2

Conexión Δ – Y de un transformador trifásico.



Nota. La tensión de línea $V_{rn} = V_{RS}/3$, $I_R = I_r$. conexión Dy5, Fuente: **(Fraile, 2003)**

Los voltajes instantáneos aplicados a cada devanado del primario son:

$$\begin{aligned} \mathbf{v_{RS}} &= \mathbf{v_{rn}} - \mathbf{v_{sn}} \\ \mathbf{v_{ST}} &= \mathbf{v_{sn}} - \mathbf{v_{tn}} \\ \mathbf{v_{TR}} &= \mathbf{v_{tn}} - \mathbf{v_{rn}} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Aplicando el sistema de ecuaciones 3.28 y 3.29 a los devanados primarios y secundarios del transformador obtenemos:

A. Fase "RS" del primario y "r" del secundario:

$$\mathbf{v_{RS}} = \mathbf{L_{11}}\frac{\mathbf{di_{RS}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{L_{12}}\frac{\mathbf{di_{RS}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{M}\frac{\mathbf{di_{r}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{i_{RS}R_{1rs}} \tag{3.31}$$

$$-\mathbf{v_{2rn}} = \mathbf{L_{22}}\frac{\mathbf{di_{r}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{L_{21}}\frac{\mathbf{di_{r}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{M}\frac{\mathbf{di_{RS}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{i_{r}R_{2s}} \tag{3.32}$$

B. Fase "ST" del primario y "s" del secundario:

$$\mathbf{v_{ST}} = \mathbf{L_{11}}\frac{\mathbf{di_{ST}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{L_{12}}\frac{\mathbf{di_{ST}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{M}\frac{\mathbf{di_{s}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{i_{ST}R_{1st}} \tag{3.33}$$

$$-\mathbf{v_{2sn}} = \mathbf{L_{22}}\frac{\mathbf{di_{s}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{L_{21}}\frac{\mathbf{di_{s}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{M}\frac{\mathbf{di_{ST}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{i_{s}R_{2s}} \tag{3.34}$$

C. Fase "TR" del primario y "t" del secundario:

$$\mathbf{v_{TR}} = \mathbf{L_{11}}\frac{\mathbf{di_{TR}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{L_{12}}\frac{\mathbf{di_{TR}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{M}\frac{\mathbf{di_{t}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{i_{TR}R_{1tr}} \tag{3.35}$$

$$-\mathbf{v_{2tn}} = \mathbf{L_{22}}\frac{\mathbf{di_{t}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{L_{21}}\frac{\mathbf{di_{t}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{M}\frac{\mathbf{di_{TR}}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{i_{t}R_{2s}} \tag{3.36}$$

Compactando todas las ecuaciones desarrolladas en un único sistema, se tiene las ecuaciones del transformador trifásico en el cuadro 3.2:

Cuadro 3.2

Resumen de las ecuaciones desarrolladas banco transformador trifásico.

Simbología		Descripción
Fase RS	:	$\mathbf{v_{RS} = L_{11}\frac{di_{RS}}{dt} + L_{12}\frac{di_{RS}}{dt} + M\frac{di_{r}}{dt} + i_{RS}R_{1rs}}$
		$\mathbf{-v_{2rn} = L_{22}\frac{di_{r}}{dt} + L_{21}\frac{di_{r}}{dt} + M\frac{di_{RS}}{dt} + i_{r}R_{2s}}$
Fase ST	:	$\mathbf{v_{ST} = L_{11}\frac{di_{ST}}{dt} + L_{12}\frac{di_{ST}}{dt} + M\frac{di_{s}}{dt} + i_{ST}R_{1st}}$
		$\mathbf{-v_{2sn} = L_{22}\frac{di_{s}}{dt} + L_{21}\frac{di_{s}}{dt} + M\frac{di_{ST}}{dt} + i_{s}R_{2s}}$
Fase TR	:	$\mathbf{v_{TR} = L_{11}\frac{di_{TR}}{dt} + L_{12}\frac{di_{TR}}{dt} + M\frac{di_{t}}{dt} + i_{TR}R_{1tr}}$
		$\mathbf{-v_{2tn} = L_{22}\frac{di_{t}}{dt} + L_{21}\frac{di_{t}}{dt} + M\frac{di_{TR}}{dt} + i_{t}R_{2s}}$

Nota: resumen de la notación de ecuaciones diferenciales para el banco trifásico. Fuente: Elaboración propia.

El desequilibrio de la carga se tiene en cuenta en la tensión de los bornes del secundario ya que esta se puede expresar en general como: “$v_2 = i_2R_c + L_cdi_2 / dt$” en donde R_c y L_c son la resistencia e inductancia de carga.

Los parámetros del sistema de ecuaciones anterior son:

Cuadro 3.3

Resumen del sistema de ecuaciones cuadro 3.2.

Simbología		Descripción
L_{12}	:	Inductancia magnetizante del primario.
L_{11}	:	Inductancia de dispersión del primario.
R_1	:	Resistencia activa del primario.
L_{21}	:	Inductancia magnetizante del secundario.

L_{22}	:	Inductancia de dispersión del secundario.
R_2	:	Resistencia activa del secundario.
M	:	Inductancia mutua que es igual para ambos devanados.

Nota: representación simbólica de las ecuaciones diferenciales del banco trifásico. Fuente: Elaboración propia.

El sistema de ecuaciones desarrollados anteriormente se considera lineal, y será utilizado para simular distintos estados de carga del transformador y cortocircuitos.

3.2. Modelo matemático de una máquina eléctrica estática mediante ecuaciones en el espacio de estados

3.2.1. Modelado en el espacio de estados.

3.2.1.1. Definición de estado.

Estado: El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables de modo que el conocimiento de estas variables en t=t0, junto con el conocimiento de la entrada para t>=t0, determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo t>=t0. **(Valera Fernandez, 2016)**.

Variables de estado: Las variables de estado de un sistema dinámico son las que forman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Si se necesitan al menos n variables x1, x2... xn, para describir por completo el comportamiento de un sistema dinámico (por lo cual una vez que se proporciona la entrada para t>=t0 y se especifica el estado inicial t=t0 el estado futuro del sistema se determina por completo), tales n variables son un conjunto de variables de estado.

Vector de estado: Si se necesitan n variables de estado para describir por completo el comportamiento de un sistema determinado, estas n variables de estado se consideran los n componentes de un vector x. Tal vector se denomina vector de estado. Por tanto, un vector de estado es aquel que determina de manera única el estado del sistema x(t) para cualquier tiempo t>=t0, una vez que se obtiene el estado en t=t0 y se especifica la entrada u(t) para t>=t0.

Espacio de estados: El espacio de n dimensiones cuyos ejes de coordenadas están formados por el eje x1, eje x2..., eje xn se denominan espacio de estados. Cualquier estado puede representarse mediante un punto en el espacio de estados.

3.2.1.2. Formulación de la Ecuación de Estado de un Sistema

En el análisis en el espacio de estados, nos concentramos en tres tipos de variables en el modelado de sistemas dinámicos:

- Variables de entrada
- Variables de salida
- Variables de estado

Suponemos que un sistema de entradas y salidas múltiples contiene n integradores.

También suponemos que existen r entradas y m salidas. Definimos n salidas de los integradores como variables de estado. El sistema se describe mediante:

$$\dot{X}_1(t) = f_1(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t)$$
$$\dot{X}_2(t) = f_2(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{X}_n(t) = f_n(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t)$$

Las salidas del sistema se obtienen mediante

$$Y_1(t) = g_1(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t)$$
$$Y_2(t) = g_2(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t)$$
$$\vdots$$
$$Y_m(t) = g_m(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t)$$

Si definimos

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2 \cdots, x_n; u_1, u_2 \cdots, u_r; t) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.37)}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \qquad g(x,u,t)=\begin{bmatrix} g_1(x_1,x_2\cdots,x_n;u_1,u_2\cdots,u_r;t) \\ g_2(x_1,x_2\cdots,x_n;u_1,u_2\cdots,u_r;t) \\ \vdots \\ g_m(x_1,x_2\cdots,x_n;u_1,u_2\cdots,u_r;t) \end{bmatrix} \qquad u(t)=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

las ecuaciones se convierten en

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x,u,t) \\ y(t) &= g(x,u,t) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.38)}$$

En donde la primera es la ecuación de estado y la segunda la ecuación de salida.

Si las funciones vectoriales f y g involucran explícitamente el tiempo t, el sistema se denomina sistema variante con el tiempo.

Si se linealizan las ecuaciones alrededor del estado de operación, tenemos las siguientes ecuaciones de estado y de salida linealizadas.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)\cdot x(t) + B(t)\cdot u(t) \\ y(t) &= C(t)\cdot x(t) + D(t)\cdot u(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.39)}$$

A (t) matriz de estado

B (t) matriz de entrada

C (t) matriz de salida

D (t) matriz de transmisión directa

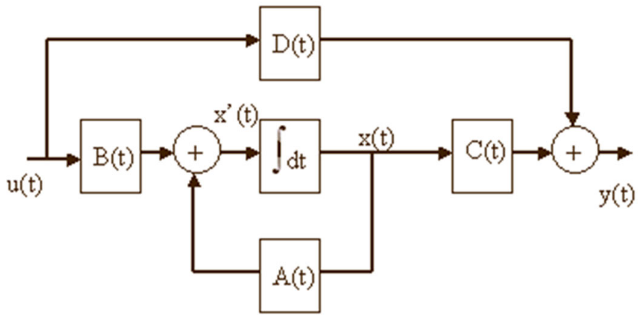
Si las funciones vectoriales f y g no involucran el tiempo t explícitamente, el sistema se denomina sistema invariante con el tiempo. En este caso las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\cdot x(t) + B\cdot u(t) \\ y(t) &= C\cdot x(t) + D\cdot u(t) \end{aligned} \qquad \textbf{(3.40)}$$

En la figura se representa el diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continúo representado en el espacio de estados.

Figura 3.3

Diagrama de bloques sistema control lineal.



Nota. Representación en espacio de estados del sistema de control lineal en tiempo continuo.

3.2.1.3. Representación de Ecuaciones Diferenciales en el Espacio de Estado

En la representación de ecuaciones diferenciales en el espacio de estado destacamos dos casos: contiene y no contiene derivadas de la función excitación.

3.2.1.4. Ecuaciones Diferenciales en las cuales no contiene derivada de excitación

Representación en el espacio de estados de sistemas de n-ésima orden representados mediante ecuaciones diferenciales lineales en las cuales no contiene derivadas de la función de excitación.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u \tag{3.41}$$

Definimos:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned} \tag{3.42}$$

A continuación, la ecuación se escribe como:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$
$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - \cdots - a_1 x_n + u$$

o bien

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

en donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La salida se obtiene mediante

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

o bien

$$y = Cx \tag{3.43}$$

Vemos que el valor de D es cero.

3.2.1.5. Ecuaciones Diferenciales en las cuales contiene derivada de excitación

Representación en el espacio de estados de sistemas de n-ésima orden representadas mediante ecuaciones diferenciales lineales en las cuales contiene derivadas de la función de excitación.

$$y^{n} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \cdots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \tag{3.44}$$

No se puede usar el método directo que utilizamos cuando no contenía derivadas de la función de excitación. Esto se debe a que n ecuaciones diferenciales de primer orden en donde x1= y, pueden no conducir a una solución única.

Una forma de obtener una ecuación de estado y una ecuación de salida es definir las siguientes n variables como un conjunto de n variables de estado:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y - \beta_0 u \\
x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u \\
x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u \\
&\vdots \\
x_n &= \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3.45)}
$$

Con esta elección de variables de estado está garantizada la existencia de una única solución de la ecuación de estado.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \\
\dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} +
\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} \cdot u
$$

$$
y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u
$$

o bien

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx + Du
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3.46)}
$$

En este caso D = ß0 = b0.

3.2.1.6. Función de Transferencia Asociada al Estado de un Sistema

En esta sección tratamos la relación entre la función de transferencia y las ecuaciones en el espacio de estado

a) Correlación entre funciones de transferencia y ecuaciones en el espacio de estados

A continuación, mostramos como obtener la función de transferencia de un sistema de una sola entrada y salida a partir de las ecuaciones en el espacio de estado.

Consideramos el sistema cuya función de transferencia se obtiene mediante:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \tag{3.47}$$

Este sistema se representa en el espacio de estado mediante las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x + B \cdot u \\ y &= C \cdot x + D \cdot u \end{aligned} \tag{3.48}$$

En donde x es el vector de estado, u es la entrada y, y es la salida.

La transformación de Laplace de las ecuaciones anteriores se obtiene mediante:

$$\begin{aligned} & t_0 \neq 0 \\ & sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ & Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{aligned} \tag{3.49}$$

Dado que la función de transferencia de definió antes como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, cuando las condiciones iniciales son 0, suponemos que x (0) es cero. Por tanto, tenemos:

$$t_0 = 0$$
$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$
$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

Arreglando la ecuación obtenemos

$$X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot BU(s)$$

Sustituyo la ecuación anterior en la de salida

$$Y(s) = \left[C(sI - A)^{-1} \cdot B + D\right] \cdot U(s)$$

Comparando

$$Y(s) = \left[C(sI - A)^{-1} \cdot B + D\right] \cdot U(s) \text{ y } \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

obtenemos

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B + D \qquad \textbf{(3.50)}$$

Ésta es la expresión de la función de transferencia en términos A, B, C y D.

3.2.1.7. Solución de la Ecuación de Estado

En el estudio de la solución de las ecuaciones de estado encontramos dos casos: homogéneo y no homogéneo, para cada uno de ellos se estudiará sus características aplicando el enfoque de la transformada de Laplace.

a) solución de las ecuaciones de estado para el caso homogéneo

Para el caso homogéneo estudiamos de forma teórica sus características principales aplicando un enfoque de la transformada de Laplace para la solución de las ecuaciones de estado.

Descripción:

Partimos de la ecuación diferencial matricial

Donde x = vector de dimensión n

A = matriz de coeficientes constantes de n*n

$$\dot{x} = Ax \tag{3.51}$$

Suponemos que la solución está en la forma de una serie de potencias de vectores en t

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots \tag{3.52}$$

Sustituyendo esta solución supuesta en la ecuación inicial, obtenemos:

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + kb_k t^{k-1} + \cdots = A(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + kb_k t^k + \cdots) \tag{3.53}$$

Si la solución supuesta será la verdadera, debe ser válida para toda t. Por tanto, igualando los coeficientes de las potencias iguales de t en ambos miembros de la ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} b_1 &= Ab_0 \\ b_2 &= \frac{1}{2}Ab_1 = \frac{1}{2}A^2 b_0 \\ &\vdots \\ b_k &= \frac{1}{k!}A^k b_0 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Sustituyendo t =0 en la ecuación, obtenemos:

$$x(0) = b_0 \tag{3.55}$$

Así, la solución x(t) se escribe como:

$$x(t) = (I + At + \frac{1}{2}A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots) \cdot x(0) \tag{3.56}$$

La expresión en el paréntesis es una matriz de n*n. Debido a su similitud con la serie infinita de potencias para una exponencial escalar, escribimos:

$$x(t) = e^{At}x(0) \tag{3.57}$$

3.2.1.8. Enfoque de la Transformada de Laplace para la Solución de las Ecuaciones de Estado

Partiendo de la ecuación diferencial escalar homogénea se extiende a la ecuación de estado homogénea:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{3.58}$$

Tomando la Transformada de Laplace de ambos miembros, obtenemos

$$\begin{aligned}
&sX(s) - x(0) = AX(s) \\
&\text{en donde } X(s) = L[x] \\
&\text{Por tanto} \\
&(sI - A)X(s) = x(0)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por

$$\begin{aligned}
&(sI - A)^{-1} \\
&\text{obtenemos} \\
&X(s) = (sI - A)^{-1}x(0)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

La transformada inversa de Laplace de X(s) produce la solución x(t)

$$\begin{aligned}
&x(t) = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]x(0) \\
&\text{observamos que} \\
&(sI - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \cdots
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Por tanto, la Transformada inversa de Laplace produce:

$$\begin{aligned}
&L^{-1}\left[(sI - A)\right] = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots = e^{At} \\
&\text{La solución de la ecuación se obtiene como} \\
&x(t) = e^{At}x(0)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

3.2.1.9. Matriz de Transición de Estado

Escribimos la solución de la ecuación de estado homogénea

$$\dot{x} = Ax \quad \textbf{(3.63)}$$

Como:

$$x(t) = \Phi(t) \cdot x(0)$$

en donde $\Phi(t)$ es una matriz $n \times n$ y es solución única de

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) \quad \Phi(0) = 1$$

para verificar esto

$$x(0) = \Phi(0) \cdot x(0) = x(0)$$

y

$$\dot{x}(t) = \dot{\Phi}(t) \cdot x(0) = A\Phi(t) \cdot x(0) = Ax(t) \quad \textbf{(3.64)}$$

A partir de estas ecuaciones obtenemos:

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right] \quad \textbf{(3.65)}$$

Por tanto, podemos decir que Φ(t) se denomina matriz de transición de estados. Siendo esta matriz la que contiene toda la información acerca del movimiento libre del sistema.

Si los valores característicos $\lambda 1, \lambda 2, \ldots \lambda n$ de la matriz A son distintos, entonces ϕ (t) contendrá las n exponenciales:

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t} \cdots \quad \textbf{(3.66)}$$

En particular, si la matriz A es diagonal

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad \textbf{(3.67)}$$

Si hay una multiplicidad en los valores característicos como: λ1, λ2, λ3, λ4, λ5, ... λn entonces ϕ (t) contendrá además de las exponenciales $e^{\lambda 1t}$, $e^{\lambda 2t}$, $e^{\lambda 3t}$, …, términos como $te^{\lambda 2t}$ y t^2- $e^{\lambda 2t}$.

3.2.1.10. Solución de las Ecuaciones de Estado para el caso no homogéneo

En este apartado estudiamos el caso no homogéneo para la solución de la ecuación de estado, aplicando también el enfoque de la transformada de Laplace.

Descripción:

Consideramos la ecuación de estado no homogéneo descrita mediante

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \textbf{(3.68)}$$

x: vector de dimensión n u: vector de dimensión r

A: matriz de coeficientes constantes de n*n

B: matriz de coeficientes constantes de n*r

Si escribimos la ecuación como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \textbf{(3.69)}$$

Y premultiplicamos ambos miembros de esta ecuación por e^{-At}., obtenemos

$$e^{-At}\left[\dot{x}(t) - Ax(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right] = e^{-At}Bu(t) \quad \textbf{(3.70)}$$

Al integrar la ecuación entre t y 0

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\cdot d\tau \tag{3.71}$$

La ecuación también se escribe como

$$\begin{gathered} x(t) = \Phi(t)\cdot x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\cdot Bu(\tau)\cdot d\tau \\ \Phi(t) = e^{At} \end{gathered} \tag{3.72}$$

La solución x(t) es claramente la suma de un término formado por la transición de estados inicial y un término que surge del vector de entradas.

3.2.1.11. Enfoque de la Transformada de Laplace para la Solución de Ecuaciones de Estado

La solución de la ecuación de estado no homogénea:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.73}$$

También puede obtenerse mediante el enfoque de la transformada de Laplace. La transformada de Laplace de esta última ecuación produce:

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

o bien

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s) \tag{3.74}$$

Premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por $(sI - A)^{-1}$, obtenemos:

$$\begin{gathered} X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ X(s) = L\left[e^{At}\right]x(0) + L\left[e^{At}\right]BU(s) \end{gathered} \tag{3.75}$$

La transformada inversa de Laplace se obtiene mediante la integral de convolución, del modo siguiente:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\cdot d\tau \tag{3.76}$$

Si el tiempo inicial no fuera cero sino t0, la solución sería:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\cdot d\tau \tag{3.77}$$

Ejemplo

Sea el sistema mecánico de la figura. Se supone que el sistema es lineal. La fuerza externa u(t) es la entrada al sistema y el desplazamiento y(t) de la masa es la salida. Calcular la descripción del sistema en espacio de estados y su función de transferencia.

Suponiendo que en ausencia de fuerza externa medimos el desplazamiento y(t) desde la posición de equilibrio, obtenemos la ecuación:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \tag{3.78}$$

Las variables de estado x1(t) y x2(t) se definen como:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_1(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned} \tag{3.79}$$

Entonces tenemos que las ecuaciones de estado y de salida son:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-ky - b\dot{y}) + \frac{1}{m}u \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \end{aligned}\right\}$$
$$y = x_1 \tag{3.80}$$

Podemos escribir las ecuaciones anteriores de forma matricial:

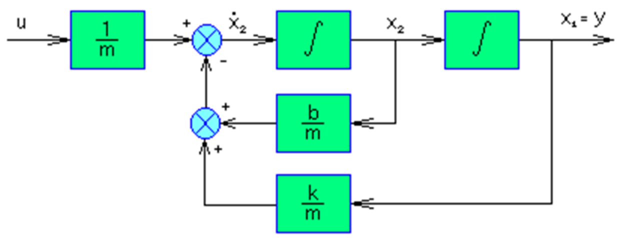
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

De aquí podemos sacar los valores de las matrices A, B, C y D:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0 \tag{3.82}$$

En la siguiente figura, representamos el diagrama de bloques de este sistema:



(3.83)

Vemos que las salidas de los integradores son las variables de estado.

A continuación, hallamos la función de transferencia del sistema.

Sabemos que:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} + 0 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ k/m & s + \dfrac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

Como:

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ k/m & s + \dfrac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \dfrac{b}{m} s + \dfrac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \dfrac{b}{m} & 1 \\ -k/m & s \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

Tenemos que la función de transferencia es:

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -k/m & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \qquad \textbf{(3.86)}$$

3.2.1.12. Controlabilidad

En esta parte introducimos los conceptos de controlabilidad y observabilidad. Estos conceptos describen la interacción´ n entre el mundo externo (entradas y salidas) y las variables internas del sistema (estados). La controlabilidad es la propiedad que indica si el comportamiento de un sistema puede ser controlado por medio de sus entradas, mientras que la observabilidad es la propiedad que indica si el comportamiento interno del sistema puede detectarse en sus salidas.

Consideremos el sistema de n estados y p entradas:

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad \textbf{(3.87)}$$

con las matrices constantes A ∈ Rn×n y B ∈ Rn× p. Como la controlabilidad relaciona las entradas y los estados del sistema, la ecuación de salida es irrelevante.

Definición: La ecuación de estados, o el par (A, B), se dice controlable si para cualquier estado inicial x (0) = x0 ∈ Rn y cualquier estado final x1 ∈ Rn, existe una entrada que transfiere el estado x de x0 a x1 en tiempo finito. En caso contrario, la ecuación o el par (A, B), se dice no controlable.

La controlabilidad tiene que ver con la posibilidad de llevar al sistema de cualquier estado inicial al cualquier estado final en tiempo finito, no importando que´ trayectoria se siga, o que´ entrada se use.

Tests de Controlabilidad. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El par (A, B), A ∈ Rn×n, B ∈ Rn× p, es controlable.

2. La matriz de controlabilidad,

$C = [B \quad AB \quad A2\,B \quad \cdots \quad An-1\,B] \quad C \in Rn\times n\,p,$

es de rango n (rango fila pleno).

3. Si la matriz C de $n \times n$ es no singular para todo $t > 0$, el sistema es controlable.

3.2.1.13. Observabilidad

Definiciones: El concepto de observabilidad es dual al de controlabilidad, e investiga la posibilidad de estimar el estado del sistema a partir del conocimiento de la salida. Consideramos el sistema lineal estacionario:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du \tag{3.88}$$

La matriz de observabilidad está definida por:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.89}$$

$A \in R\ n\times n,\ B \in Rn\times\ p,\ C \in Rq\times n,\ D \in Rq\times\ p.$

Definición. La ecuación de estado es observable si para cualquier estado inicial x (0) (desconocido), existe un tiempo finito t1 tal que el conocimiento de la entrada u y la salida y sobre el intervalo [0, t1] es suficiente para determinar en forma única el estado inicial x(0). En caso contrario el sistema no observable.

Teorema de Observabilidad. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El par (A, C), $A \in Rn\times n$, $C \in Rq\times n$, es observable.
2. La matriz de observabilidad, $O \in Rnq\times n$, es de rango n (rango columna pleno).
3. La matriz O de $n \times n$, es observable si O es no singular para todo $t > 0$.

3.2.2. Modelo en el espacio de estado del transformador monofásico.

Llevados los conceptos anteriores al caso que a nosotros nos interesa desarrollaremos el modelo de estado de un transformador monofásico que compone el banco para ello comenzamos a realizar una analogía a partir de las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\mathbf{u_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{m1}\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} + i_1R_1} \qquad \textbf{(3.90)}$$

$$\mathbf{0 = u_2 + L_{12}\frac{di_2}{dt} + L_{m2}\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} + i_2R_2} \qquad \textbf{(3.91)}$$

Tomaremos como estados a las corrientes del primario "$i_{1(t)}$" y del secundario "$i_{2(t)}$" ya que con el conocimiento instantáneo de dichas corrientes más el conocimiento instantáneo del voltaje aplicado "$u_{1(t)}$", se pueden determinar caídas de tensión en cada devanado ,potencias activas, reactivas y aparentes de cada devanado como así también la energía que el transformador toma del circuito de potencia, es decir que se puede describir completamente el comportamiento del transformador conociendo las corrientes y el voltaje aplicado.

Dichos estados son linealmente independientes entre sí pues la corriente del primario no pue de obtenerse conociendo la corriente del secundario y viceversa, ya que para obtener ambas corrientes es necesario resolver las ecuaciones diferenciales 3.90 y 3.91 y no hay simplemente una constante que relacioné a dichos estados.

El sistema de ecuaciones 3.90 y 3.91 no está en forma de modelo de estado, es decir no están despejadas las derivadas de los estados, sino que aparecen las derivadas de los estados en cada ecuación y se necesita tenerlas separadas a cada una de ellas y en función de los estados y del voltaje aplicado para ello procederemos a trabajar algebraicamente dichas ecuaciones con el fin de obtener el modelo de estado del transformador.

Necesitaremos expresar el voltaje en los bornes del secundario como:

$$\mathbf{u_2 = i_2R_{\mathit{c}} + L_{\mathit{c}}\frac{di_2}{dt}} \tag{3.92}$$

Y reemplazar esta igualdad en la ecuación 3.91 quedando la misma:

$$\mathbf{0 = i_2R_c + L_c\frac{di_2}{dt} + L_{12}\frac{di_2}{dt} + L_{m2}\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} + i_2R_2} \tag{3.93}$$

Reordenando tenemos:

$$\mathbf{0 = i_2(R_c + R_2) + (L_{12} + L_{m2} + L_c)\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}} \tag{3.94}$$

$$\mathbf{0 = i_2R_t + L_{2c}\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}} \tag{3.95}$$

donde "$L_{2c} = L_{12} + L_{m2} + L_c$", despejando de la ecuación 3.95, es decir despajando el término "d_{i2}/dt" **(Nagle, Saff, & Snider, 2005)**:

$$\mathbf{\frac{di_2}{dt} = -i_2\frac{R_1}{L_{2c}} - \frac{M}{L_{2c}}\frac{di_1}{dt}} \tag{3.96}$$

y reemplazándola en la ecuación 3.91 se obtiene:

$$\mathbf{u_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{\mathit{m}1}\frac{di_1}{dt} + M\left[-i_2\frac{R_{\mathit{t}}}{L_{2c}} - \frac{M}{L_{2c}}\frac{di_1}{dt}\right] + i_1R_1} \tag{3.97}$$

$$\mathbf{u_1 = \left[L_{11} + L_{m1} - \frac{M^2}{L_{2c}}\right]\frac{di_1}{dt} + i_1R_1 - i_2\frac{MR_t}{L_{2c}}} \tag{3.98}$$

$$\mathbf{u_1 = \left[L_1 - \frac{M^2}{L_{2c}}\right]\frac{di_1}{dt} + i_1R_1 - i_2\frac{MR_t}{L_{2c}}} \tag{3.99}$$

Despejando "d_{i1}/dt" se obtiene:

$$\mathbf{\frac{di_1}{dt} = -i_1\frac{R_1}{L_1 - \frac{M^2}{L_{2c}}} + i_2\frac{MR_t}{L_{2C}\left[L_1 - \frac{M^2}{L_{2c}}\right]} + \frac{1}{L_1 - \frac{M^2}{L_{2c}}}u_1} \tag{3.100}$$

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1L_{2c}}{L_1L_{2c}-M^2}i_1 + \frac{MR_t}{L_1L_{2c}-M^2}i_2 + \frac{L_{2c}}{L_1L_{2c}-M^2}u_1 \tag{3.101}$$

Observando la ecuación 3.101 vemos que hemos dejado expresada la derivada de la corriente del primario en función de las corrientes del primario y del secundario como así también del voltaje aplicado "u_1" y por lo tanto tiene la forma de una ecuación de estado.

Procediendo de igual forma se despeja ahora de la ecuación 3.91 d_{i1}/dt teniendo:

$$u_1 = (L_{11}+L_{m1})\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} + i_1R_1 \tag{3.102}$$

$$u_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} + i_1R_1 \tag{3.103}$$

$$\frac{di_1}{dt} = -i_1\frac{R_1}{L_1} - \frac{M}{L_1}\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{L_1}u_1 \tag{3.104}$$

Reemplazando ahora "d $_{i1}$ /dt" ecuación 3.104 en 3.96, tenemos:

$$\frac{di_2}{dt} = -i_2\frac{R_t}{L_{2c}} - \frac{M}{L_{2c}}\left[-i_1\frac{R_1}{L_1} - \frac{M}{L_1}\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{L_1}u_1\right] \tag{3.105}$$

$$\frac{di_2}{dt} = -i_2\frac{R_t}{L_{2c}} + i_1\frac{MR_1}{L_{2c}L_1} + \frac{M^2}{L_{2c}L_1}\frac{di_2}{dt} - \frac{M}{L_{2c}L_1}u_1 \tag{3.106}$$

De la ecuación anterior 3.106, despejando "d_{i2}/dt" se obtiene:

$$\left[1 - \frac{M^2}{L_{2c}L_1}\right]\frac{di_2}{dt} = -i_2\frac{R_t}{L_{2c}} + i_1\frac{MR_1}{L_{2c}L_1} - \frac{M}{L_{2c}L_1}u_1 \tag{3.107}$$

$$\left[L_{2c} - \frac{M^2}{L_1}\right]\frac{di_2}{dt} = -i_2R_t + i_1\frac{MR_1}{L_1} - \frac{M}{L_1}u_1 \tag{3.108}$$

$$\frac{di_2}{dt} = -i_2\frac{R_t}{L_{2c}+\frac{M^2}{L_1}} + i_1\frac{MR_1}{\left[L_{2c}+\frac{M^2}{L_1}\right]L_1} - \frac{M}{\left[L_{2c}+\frac{M^2}{L_1}\right]L_1}u_1 \tag{3.109}$$

$$\frac{\mathbf{di_2}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{MR_1}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}}\mathbf{i_1} - \frac{\mathbf{R_tL_1}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}}\mathbf{i_2} - \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}}\mathbf{u_1} \tag{3.110}$$

De donde observamos que hemos dejado expresada "d_{i2}/dt" en función de los estados "i_1 e i_2" como así también del voltaje aplicado al primario "u_1" y por lo tanto tiene la forma de una ecuación de estado.

De las ecuaciones 3.101 y 3.110 tomaremos como salidas del sistema, a las corrientes del primario "$i_{1(t)}$" y del secundario "$i_{2(t)}$" entonces:

$$\mathbf{y_{1(t)} = i_{1(t)}; \qquad y_{2(t)} = i_{2(t)}} \tag{3.111}$$

Por otro lado; la combinación de las ecuaciones 3.101 y 3.110 escribiendo en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{di_{1(t)}}}{\mathbf{dt}} \\ \frac{\mathbf{di_{2(t)}}}{\mathbf{dt}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{R_1L_{2c}}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}} & \frac{\mathbf{MR_t}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}} \\ \frac{\mathbf{MR_1}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}} & -\frac{\mathbf{R_tL_1}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{i_{1(t)}} \\ \mathbf{i_{2(t)}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{L_{2c}}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}} \\ -\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}} \end{bmatrix} . \boldsymbol{u}_{\mathbf{1(t)}} \tag{3.112}$$

Uniendo el sistema anterior con las salidas del sistema y utilizando notación de estado tenemos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i'_{1(t)}} \\ \mathbf{i'_{2(t)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mathbf{R_1L_{2c}}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}} & \frac{\mathbf{MR_t}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}} \\ \frac{\mathbf{MR_1}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}} & -\frac{\mathbf{R_tL_1}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{i_{1(t)}} \\ \mathbf{i_{2(t)}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{L_{2c}}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}} \\ -\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{L_1L_{2c} - M^2}} \end{bmatrix} . \boldsymbol{u}_{\mathbf{1(t)}} \tag{3.113}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{\mathbf{1(t)}} \\ \boldsymbol{y}_{\mathbf{2(t)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{i_{1(t)}} \\ \mathbf{i_{2(t)}} \end{bmatrix} \tag{3.114}$$

Siendo esta, el modelo de estado del transformador monofásico de potencia, donde el vector de estado es:

$$\boldsymbol{x}_{(t)} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\mathbf{1(t)}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathbf{2(t)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i_{1(t)}} \\ \mathbf{i_{2(t)}} \end{bmatrix} \tag{3.115}$$

Y el vector de derivadas de los estados es:

$$\boldsymbol{x}'_{(t)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}'_{1(\mathrm{t})} \\ \boldsymbol{x}'_{2(\mathrm{t})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i'}_{1(\mathrm{t})} \\ \mathbf{i'}_{2(\mathrm{t})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{di}_{1(\mathrm{t})}}{\mathbf{dt}} \\ \dfrac{\mathbf{di}_{2(\mathrm{t})}}{\mathbf{dt}} \end{bmatrix} \tag{3.116}$$

Las matrices A, B, C y D del modelo de estado son:

A. Matriz de la planta.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\mathbf{R_1 L_{2c}}}{\mathbf{L_1 L_{2c} - M^2}} & \dfrac{\mathbf{MR_t}}{\mathbf{L_1 L_{2c} - M^2}} \\ \dfrac{\mathbf{MR_1}}{\mathbf{L_1 L_{2c} - M^2}} & -\dfrac{\mathbf{R_t L_1}}{\mathbf{L_1 L_{2c} - M^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \end{bmatrix} \tag{3.117}$$

B. Matriz de control.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{L_{2c}}}{\mathbf{L_1 L_{2c} - M^2}} \\ -\dfrac{\mathbf{M}}{\mathbf{L_1 L_{2c} - M^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b_{11}} \\ \mathbf{b_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \end{bmatrix} \tag{3.118}$$

C. Matriz de salida.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c_{11}} & \mathbf{c_{12}} \\ \mathbf{c_{21}} & \mathbf{c_{22}} \end{bmatrix} \tag{3.119}$$

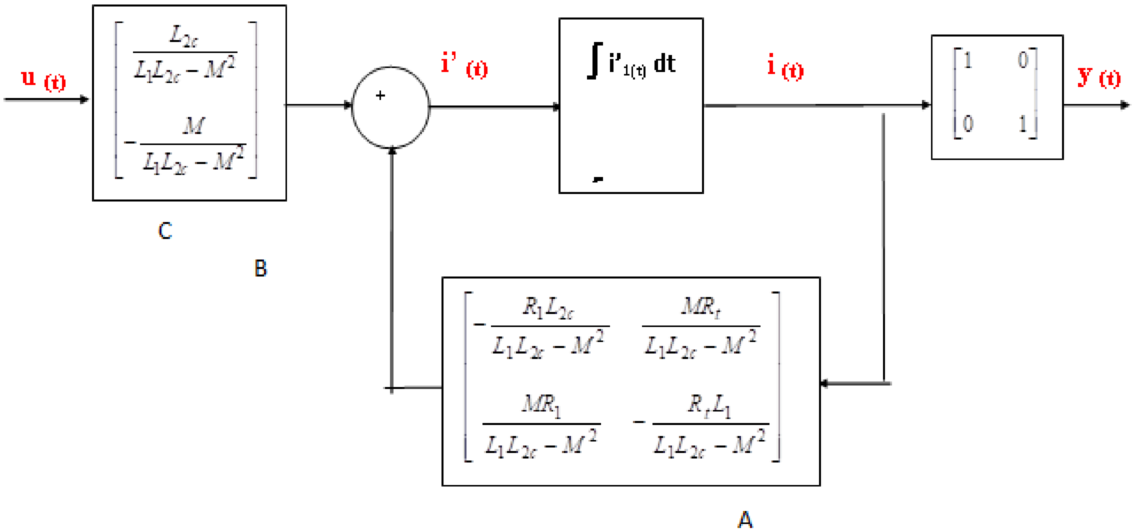
D. Matriz de acople.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d_{11}} \\ \mathbf{d_{12}} \end{bmatrix} \tag{3.120}$$

El correspondiente diagrama de bloques del sistema queda así, figura 3.4:

Figura 3.4

Diagrama de bloques del transformador monofásico.

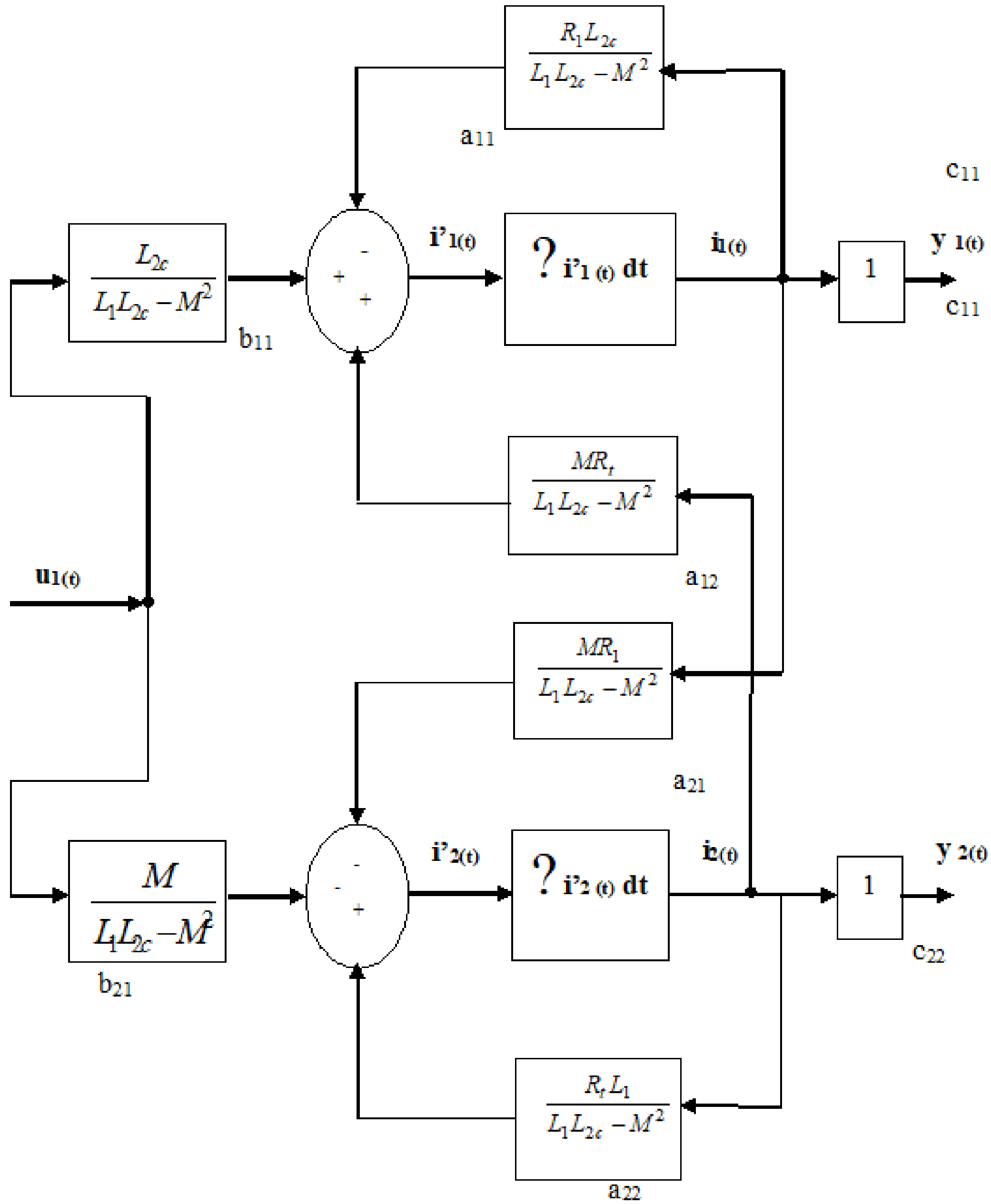


Nota. Representación del diagrama de bloques para los modelos de estado representados en el sistema matricial A, B, C y D. Fuente: **(Nagle, Saff, & Snider, 2005)**

En la figura 3.5 se representa el diagrama de bloques alternativo teniendo en cuenta el modelo de estado de la ecuación 3.114.

Figura 3.5

Diagrama de bloques alternativo del transformador monofásico.



Nota. Representación del diagrama de bloques para los modelos de estado representados en el sistema matricial A, B, C y D. Fuente: **(Nagle, Saff, & Snider, 2005)**

Si tenemos en cuenta las constantes de tiempo y las inductancias transitorias podemos representarlo las ecuaciones 3.110 y 3.110 del siguiente modo:

$$\mathbf{\frac{di_{1(t)}}{dt} = -\frac{1}{T'_1} i_{1(t)} + \frac{M}{L'_1 L_{2c}} R_t i_{2(t)} + \frac{1}{L'_1} u_{1(t)}} \qquad \textbf{(3.121)}$$

$$\mathbf{\frac{di_{2(t)}}{dt} = \frac{M}{T_1 L'_2} i_{1(t)} - \frac{1}{T'_2} i_{2(t)} - \frac{M}{L_1 L'_2} u_{1(t)}} \qquad \textbf{(3.122)}$$

Al excitar al transformador inicialmente no existen corrientes del primario y del secundario ya que si tenemos en cuenta que no existen corrientes en el instante en que se excita al transformador estas no pueden presentar un cambio repentino en su valor debido a las inductancias de cada devanado, entonces “$i_1 = i_2 = 0$” inmediatamente después de excitar al transformador, las ecuaciones anteriores quedan de la siguiente forma:

$$\mathbf{\frac{di_{1(t)}}{dt} = \frac{1}{L_1} u_{1(t)}; \qquad L_1 \frac{di_{1(t)}}{dt} = u_{1(t)}} \qquad \textbf{(3.123)}$$

$$\mathbf{\frac{di_{2(t)}}{dt} = -\frac{\boldsymbol{M}}{L_1 L_{2c}} u_{1(t)}; \qquad -L_{2c} \frac{di_{2(t)}}{dt} = \frac{\boldsymbol{M}}{L_1} u_{1(t)}} \qquad \textbf{(3.124)}$$

Lo que nos muestra que inicialmente todo el voltaje aplicado “cae” en las inductancias de cada circuito esto es así porque de esta manera si todo el voltaje cae en dichas inductancias la suma de las f.e.m generadas en cada circuito da cero y por lo tanto las corrientes dan como resultado cero debe notarse también que las inductancias en el instante inicial no son las transitorias ya que las corrientes son nulas en dicho instante, luego de este instante inicial tendremos las inductancias transitorias debido a la no nulidad de las corrientes.

3.2.3. Relación entre función de transferencia y variables de estado.

“El modelo de estado del transformador monofásico lo podemos escribir en forma más reducida del siguiente modo” **(Murray, 1984)**:

$$\mathbf{i'_{(t)} = Ai_{(t)} + Bu_{1(t)}} \qquad \textbf{(3.125)}$$

$$\mathbf{y}_{(\mathbf{t})} = \mathbf{C}\mathbf{i}_{(\mathbf{t})} \qquad \textbf{(3.126)}$$

Si aplicamos transformada de Laplace a las ecuaciones anteriores tenemos:

$$\mathbf{sI}_{(\mathbf{s})} - \mathbf{i}_{(\mathbf{0})} = \mathbf{AI}_{(\mathbf{s})} + \mathbf{BU}_{\mathbf{1}(\mathbf{s})} \qquad \textbf{(3.127)}$$

$$\mathbf{y}_{(\mathbf{s})} = \mathbf{CI}_{(\mathbf{s})} \qquad \textbf{(3.128)}$$

Como la función de transferencia entre la entrada y la salida está definida como la relación entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada cuando las condiciones iniciales son cero, se supone que "$i_{(0)}$ de la ecuación 3.127 son cero. Entonces se tiene:

$$\mathbf{sI}_{(\mathbf{s})} - \mathbf{AI}_{(\mathbf{s})} = \mathbf{BU}_{\mathbf{1}(\mathbf{s})} \qquad \textbf{(3.129)}$$

$$(\mathbf{sI}_{\mathbf{d}} - \mathbf{A})\mathbf{I}_{(\mathbf{s})} = \mathbf{BU}_{\mathbf{1}(\mathbf{s})} \qquad \textbf{(3.130)}$$

En donde I_d es la matriz identidad, despejando de 3.130, "$I_{(s)}$" tenemos:

$$\mathbf{I}_{(\mathbf{s})} = (\mathbf{sI}_{\mathbf{d}} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}_{\mathbf{1}(\mathbf{s})} \qquad \textbf{(3.131)}$$

Reemplazamos 3.131 en 3.128 y obtenemos:

$$\mathbf{y}_{(\mathbf{s})} = \mathbf{C}(\mathbf{sI}_{\mathbf{d}} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}_{\mathbf{1}(\mathbf{s})} \qquad \textbf{(3.132)}$$

En donde "$C\ (sI_{(d)} - A)^{-1}B$" es la matriz de transferencia, ya que tenemos 2 salidas que representan a las corrientes del primario y del secundario entonces:

$$\boldsymbol{G}_{(\mathbf{s})} = \mathbf{C}(\mathbf{sI}_{\mathbf{d}} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \qquad \textbf{(3.133)}$$

En donde la matriz inversa $(SI_d - A)^{-1}$ es:

$$[\mathbf{sI_d - A}]^{-1} = \frac{\mathbf{adj}\,[\mathbf{sI_d - A}]}{\mathbf{det}\,[\mathbf{sI_d - A}]} \qquad (3.134)$$

“Si operamos algebraicamente con las matrices “A, B y C” para obtener la matriz de transferencias tenemos” **(Murray, 1984)**:

$$\mathbf{I_d} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{sI_d} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \qquad (3.135)$$

$$\mathbf{sI_d - A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\dfrac{R_1L_{2c}}{L_1L_{2c} - M^2} & \dfrac{MR_t}{L_1L_{2c} - M^2} \\ \dfrac{MR_1}{L_1L_{2c} - M^2} & -\dfrac{R_tL_1}{L_1L_{2c} - M^2} \end{bmatrix} \qquad (3.136)$$

$$\mathbf{sI_d - A} = \begin{bmatrix} s + \dfrac{R_1L_{2c}}{L_1L_{2c} - M^2} & -\dfrac{MR_t}{L_1L_{2c} - M^2} \\ -\dfrac{MR_1}{L_1L_{2c} - M^2} & s + \dfrac{R_tL_1}{L_1L_{2c} - M^2} \end{bmatrix} \qquad (3.137)$$

$$\mathbf{Det}[\mathbf{sI_d - A}] = \frac{S^2[L_1L_{2c} - M^2]^2 + S[L_1L_{2c} - M^2][R_tL_1 + R_tL_{2c}] + [L_1L_{2c} - M^2]R_tR_1}{[L_1L_{2c} - M^2]^2} \qquad (3.138)$$

$$\mathbf{Adj}[\mathbf{sI_d - A}] = \begin{bmatrix} \dfrac{(L_1L_{2c} - M^2)S + R_tL_1}{(L_1L_{2c} - M^2)^2} & \dfrac{MR_t}{L_1L_{2c} - M^2} \\ \dfrac{MR_1}{L_1L_{2c} - M^2} & \dfrac{(L_1L_{2c} - M^2)S + R_1L_{2c}}{(L_1L_{2c} - M^2)^2} \end{bmatrix} \qquad (3.139)$$

La matriz inversa resulta ser:

$$[\mathbf{sI_d - A}]^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{(L_1L_{2c} - M^2)S + R_tL_1}{[S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1]} & \dfrac{MR_t}{[S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1]} \\ \dfrac{MR_1}{[S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1]} & \dfrac{(L_1L_{2c} - M^2)S + R_1L_{2c}}{[S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1]} \end{bmatrix} \qquad (3.140)$$

Haciendo la multiplicación de matrices que indica la ecuación 4.56, tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{[(L_1L_{2c} - M^2)S + R_tL_1]L_{2c}}{[L_1L_{2c} - M^2][S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1]} - & \dfrac{M^2R_t}{[L_1L_{2c} - M^2][S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1]} \\ \dfrac{MR_1L_{2c}}{[L_1L_{2c} - M^2][S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1]}x - & \dfrac{M[(L_1L_{2c} - M^2)S + R_1L_{2c}]}{[L_1L_{2c} - M^2][S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1]} \end{bmatrix} \qquad (3.141)$$

$$\mathbf{G}_{(S)} = \begin{bmatrix} \dfrac{[L_1L_{2c} - M^2][SL_{2c} + R_t]}{[L_1L_{2c} - M^2][S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1]} \\ \dfrac{MR_1L_{2c} - \Big[[L_1L_{2c} - M^2]SM + MR_1L_{2c}\Big]}{[L_1L_{2c} - M^2][S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1]} \end{bmatrix} \quad \mathbf{(3.142)}$$

$$\mathbf{G}_{(S)} = \begin{bmatrix} \dfrac{SL_{2c} + R_t}{S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1} \\ \dfrac{-SM}{S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{(3.143)}$$

$$\mathbf{G}_{(S)} = \begin{bmatrix} \mathbf{g_{11}} \\ \mathbf{g_{12}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{(3.144)}$$

$$\mathbf{g_{11}} = \left[\frac{SL_{2c} + R_t}{S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1}\right] \quad \mathbf{(3.145)}$$

$$\mathbf{g_{12}} = \left[\frac{SM}{S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1}\right] \quad \mathbf{(3.146)}$$

La salida del sistema se expresa como:

$$\mathbf{y}_{(s)} = \mathbf{G}_{(s)}\mathbf{U}_{1(s)} \quad \mathbf{(3.147)}$$

Y en forma vectorial es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{1(s)} \\ \mathbf{y}_{2(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11(s)} \\ \mathbf{g}_{12(s)} \end{bmatrix} \mathbf{U}_{1(s)} \quad \mathbf{(3.148)}$$

Como las salidas del sistema son las corrientes del primario y del secundario reemplazamos esto en la ecuación vectorial anterior:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{1(s)} \\ \mathbf{I}_{2(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11(s)} \\ \mathbf{g}_{12(s)} \end{bmatrix} \mathbf{U}_{1(s)} \quad \mathbf{(3.149)}$$

Si desarrollamos el sistema anterior y reemplazamos “$g_{11(s)}$ y $g_{12(s)}$” obtenemos:

$$\mathbf{I}_{1(s)} = \left[\frac{SL_{2c} + R_t}{S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1}\right] \quad \mathbf{(3.150)}$$

$$\mathbf{I_{2(s)}} = \left[\frac{\mathbf{SM}}{\mathbf{S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1}}\right] \tag{3.151}$$

Observamos que hemos obtenido la misma función de transferencia que cuando desarrollamos el modelo matemático en transformada de Laplace en lo que respecta a "$I_{2(s)}$" es decir que hemos representado al transformador en el espacio de estado pero la relación entre la corriente del secundario y el voltaje aplicado al primario es la misma independientemente del modelo en que se represente al transformador ,éste puede tener distintas representaciones matemáticas sin embargo al resolver dichos modelos el comportamiento dinámico del transformador tiene que ser para todos los ellos idéntico.

En cuanto a "$g_{11(s)}$" es la transferencia entre la corriente del primario y el voltaje aplicado a dicho devanado y por lo tanto describirá el comportamiento dinámico de dicha corriente, observamos que el denominador de dicha transferencia es el mismo que el denominador de "$g_{12(s)}$" ,recordemos que el denominador igualado a cero es la ecuación característica del sistema y por lo tanto vemos que independientemente de lo que se considere como salida del sistema, la ecuación característica será invariable, por ejemplo podríamos haber considerado como estados a los voltajes inducidos en el primario "$e_{1(t)}$" y en el secundario "$e_{2(t)}$" y establecer relaciones entre ellos y el voltaje aplicado al primario "$u_{1(t)}$" y tomando a dichos estados como salidas llegaremos luego de operar algebraicamente con las ecuaciones a la misma ecuación característica .

También podríamos haber considerado como estados a los enlaces de flujo del primario y del secundario llegando luego de operar a la misma ecuación característica.

3.2.4. El banco trifásico en el espacio de estado

Extrapolamos ahora hacia los restantes transformadores que componen el banco y utilizamos la notación que empleamos que usamos en ese caso y escribimos las ecuaciones de estado para cada banco obteniendo:

A. Fase RS del primario y r del secundario.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i'}_{\mathbf{RS(t)}} \\ \mathbf{i'}_{\mathbf{r(t)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\mathbf{R_p L_{2cr}}}{\mathbf{L_p L_{2cr} - M^2}} & \dfrac{\mathbf{MR_r}}{\mathbf{L_p L_{2cr} - M^2}} \\ \dfrac{\mathbf{MR_p}}{\mathbf{L_p L_{2cr} - M^2}} & -\dfrac{\mathbf{R_r L_p}}{\mathbf{L_p L_{2cr} - M^2}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{i_{RS(t)}} \\ \mathbf{i_{r(t)}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{L_{2cr}}}{\mathbf{L_p L_{2cr} - M^2}} \\ \dfrac{\mathbf{M}}{\mathbf{L_p L_{2cr} - M^2}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.152)}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y_{RS(t)}} \\ \mathbf{y_{r(t)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{i_{RS(t)}} \\ \mathbf{i_{r(t)}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.153)}$$

B. Fase ST del primario y s del secundario.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i'}_{\mathbf{ST(t)}} \\ \mathbf{i'}_{\mathbf{s(t)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\mathbf{R_p L_{2cs}}}{\mathbf{L_p L_{2cs} - M^2}} & \dfrac{\mathbf{MR}_s}{\mathbf{L_p L_{2cs} - M^2}} \\ \dfrac{\mathbf{MR_p}}{\mathbf{L_p L_{2cs} - M^2}} & -\dfrac{\mathbf{R}_s\mathbf{L_p}}{\mathbf{L_p L_{2cs} - M^2}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{i_{ST(t)}} \\ \mathbf{i_{s(t)}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{L_{2cs}}}{\mathbf{L_p L_{2cs} - M^2}} \\ \dfrac{\mathbf{M}}{\mathbf{L_p L_{2cs} - M^2}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.154)}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y_{ST(t)}} \\ \mathbf{y_{s(t)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{i_{ST(t)}} \\ \mathbf{i_{s(t)}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.155)}$$

C. Fase TR del primario y t del secundario.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i'}_{\mathbf{TR(t)}} \\ \mathbf{i'}_{\mathbf{t(t)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\mathbf{R_p L_{2ct}}}{\mathbf{L_p L_{2ct} - M^2}} & \dfrac{\mathbf{MR}_t}{\mathbf{L_p L_{2ct} - M^2}} \\ \dfrac{\mathbf{MR_p}}{\mathbf{L_p L_{2ct} - M^2}} & -\dfrac{\mathbf{R}_t\mathbf{L_p}}{\mathbf{L_p L_{2ct} - M^2}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{i_{TR(t)}} \\ \mathbf{i_{t(t)}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{L_{2ct}}}{\mathbf{L_p L_{2ct} - M^2}} \\ \dfrac{\mathbf{M}}{\mathbf{L_p L_{2ct} - M^2}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.156)}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y_{TR(t)}} \\ \mathbf{y_{t(t)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{i_{TR(t)}} \\ \mathbf{i_{t(t)}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.157)}$$

CAPÍTULO IV

4. IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO EN MATLAB/SIMULINK DE LA MÁQUINA ESTÁTICA MONOFÁSICA Y TRIFÁSICA

4.1. Implementación del trasformador monofásico.

Utilizando el Software MATLAB-SIMULINK, se implementan los siguientes modelos matemáticos (lineales) correspondientes a la Maquina Estática:

A. Modelo en ecuaciones diferenciales.

B. Modelo en ecuaciones en el espacio de estado.

De acuerdo con lo estudiado en el segundo capítulo de la tesis, se implementa un transformador conexión delta-estrella (Δ-Y).

Rescribimos las ecuaciones desarrolladas en el capítulo III, correspondientes al transformador monofásico y que a su vez esta compone el banco trifásico.

A. Modelo en ecuaciones diferenciales.

Rescribiendo las ecuaciones: 3.28 y 3.29, correspondientes al tercer capítulo, ítems 3.4.4.), se tiene **(Kosow, 1991)**:

$$\mathbf{v_1} = \boldsymbol{u_1} = \mathbf{L_{11}}\frac{\mathbf{di_1}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{L_{12}}\frac{\mathbf{di_1}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{M}\frac{\mathbf{di_2}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{i_1R_1} \qquad \textbf{(3.90) Cap. III}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{v_2} + \mathbf{L_{22}}\frac{\mathbf{di_2}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{L_{21}}\frac{\mathbf{di_2}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{M}\frac{\mathbf{di_1}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{i_2R_2} \qquad \textbf{(3.91) Cap. III}$$

B. Modelo en ecuaciones en el espacio de estado.

Rescribiendo las ecuaciones: 3.150 y 3.151 carga R-L, correspondientes al tercer capítulo, ítems 3.2.3.), se tiene:

$$\mathbf{I_{1(s)}} = \left[\frac{\mathbf{SL_{2c} + R_t}}{\mathbf{S^2[L_1L_{2c} - M^2] + S[R_tL_1 + R_tL_{2c}] + R_tR_1}}\right] \qquad \textbf{(3.150) Cap. IV}$$

$$\mathbf{I}_{2(s)} = \left[\frac{\mathbf{SM}}{\mathbf{S}^2[\mathbf{L}_1\mathbf{L}_{2c} - \mathbf{M}^2] + \mathbf{S}[\mathbf{R}_t\mathbf{L}_1 + \mathbf{R}_t\mathbf{L}_{2c}] + \mathbf{R}_t\mathbf{R}_1}\right] \qquad \textbf{(3.151) Cap. IV}$$

En el modelo de la Transformada de Laplace, se considera como salida del sistema a la corriente del secundario.

Se simulará al transformador en diferentes estados, como carga próxima a la nominal, en media carga, en vacío y corto circuito, ya que hemos considerado que el transformador se encuentra funcionando por debajo del codo de saturación, el modelo que luego se desarrollará si tiene en cuenta la saturación magnética del hierro y permitirá observar la distorsión en la corriente de vacío que toma el transformador.

4.2. Pruebas en vacío y cortocircuito realizado al transformador monofásico.

El ensayo se realizó tomando un transformador monofásico y se le realizaron los ensayos en vacío y en cortocircuito para obtener los parámetros del mismo para luego poder armar los modelos matemáticos correspondientes.

4.2.1. Prueba en vacío.

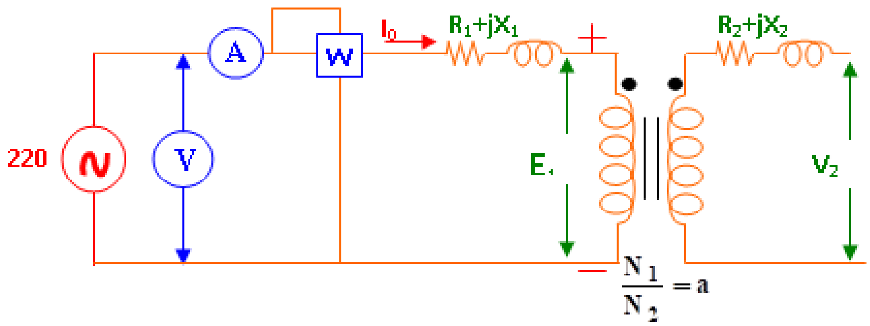
Primeramente, se implementó el circuito en SIMULINK. Posterior a ello; se procedió a variar el voltaje aplicado al primario estando el secundario en circuito abierto. Se midieron las corrientes en vacío del transformador con el objeto de poder trazar la curva de magnetización del mismo, despreciando las pérdidas en el hierro.

El modelo utilizado para la prueba del circuito abierto corresponde a la figura 4.1, por lo que se implementaron tanto la gráfica en SIMULIK como el código en MATLAB para la obtención de la gráfica correspondiente.

A. Circuito típico para prueba en vacío en SIMULINK.

Figura 4.1

Modelo para prueba de circuito abierto.

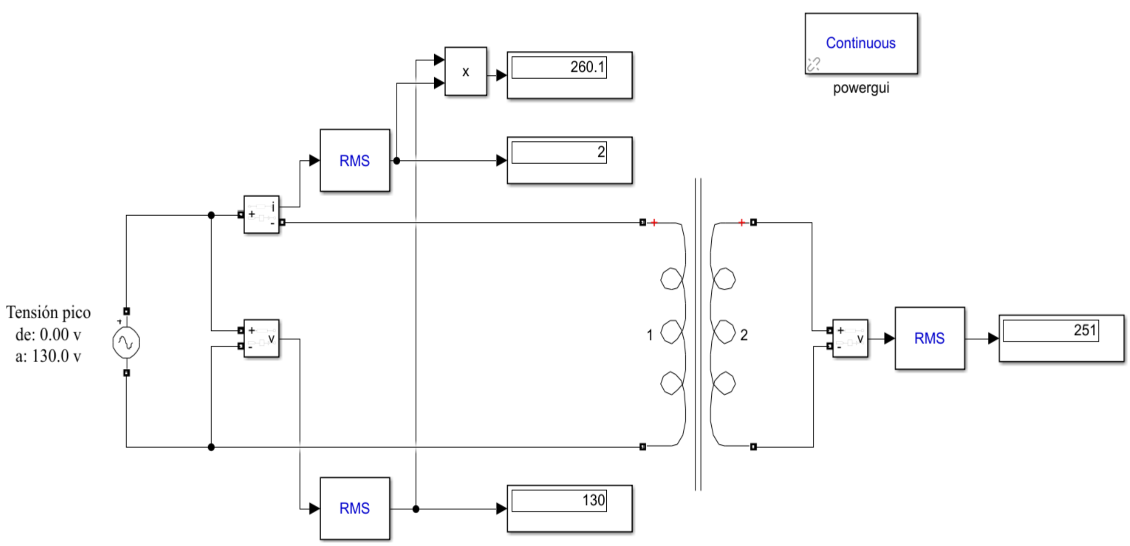


Nota. Representación del circuito para la prueba en simulación. Fuente: **(Chapman, 2000)**

Una vez identificado el circuito e implementado en SIMULINK según la figura 4.2, se comenzó a variar el voltaje aplicado al primario y se obtuvieron los valores de voltaje y de corriente de vacío de la tabla 4.1:

Figura 4.2

Implementación prueba de circuito abierto en SIMULINK.



Nota. Para la obtención de los parámetros de tensión y corriente, se implementaron el voltímetro, amperímetro y un vatímetro. Fuente: Elaboración propia.

B. Parámetros de la tensión (V_1) y la corriente en vacío (I_0) obtenidos.

Tabla 4.1

Parámetros de tensión y corriente en vacío (V_1 vs I_0).

V_1 (V)	0.00	59.70	80.00	90.00	100.00	110.00	120.00	130.00
I_0 (A)	0.00	0.16	0.26	0.36	0.57	0.87	1.32	2.00

Nota. Donde V_1 = Tensión de entrada (variable), I_0 = Corriente en vacío. Fuente: Elaboración propia.

Debido a que la caída de tensión en la impedancia del primario es muy baja, hemos considerado que el voltaje inducido en el primario es prácticamente igual al voltaje aplicado por el variador, es decir V1 ≅ E1 (valores eficaces o RMS). Por otra parte, se tiene:

C. Código o lenguaje de programación implementado en MATLAB **(Holly, 2007)**.

Cuadro 4.1

Lenguaje de programación en Matlab para la prueba en circuito abierto.

Simbología	Descripción

```
yt1=[0.00 59.70 80.00 90.00 100.00 110.00 120.00 130.00];
xt1=[0.00 0.16 0.26 0.36 0.57 0.87 1.32 2];
%% graficas de los polinómios
hold on
plot(xt1,yt1)
% Color de la línea y grosor
plot(xt1,yt1,'b','Linewidth',1.5)
%insertar asterisco y color
plot(xt1,yt1,'*r')
hold off
%insertar título de la gráfica
title('"Gráfica Voltage vs Corriente en Vacio"')
%insertar leyenda
legend('V1 vs Io')
%% insertar nombre de los ejes
ylabel('voltage (V)')
xlabel('corriente (mA)')
grid
```

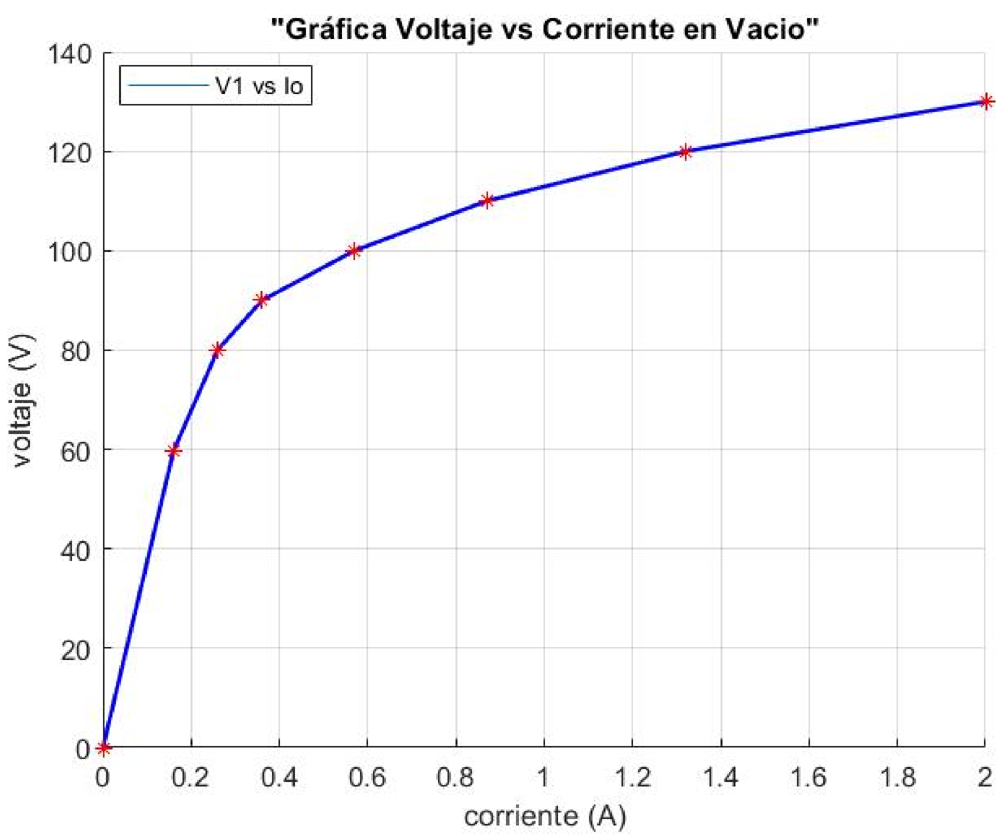
Nota: Siendo esta el código implementado en Matlab. Fuente: Elaboración propia.

D. Resultado de la gráfica correspondiente a la V1 vs Io.

A partir del código MATLAB que se detalla en el cuadro 4.1, trazamos un gráfico con los valores de voltaje y de corriente de vacío de la tabla 4.1. Siendo el resultado; la curva que se muestra en el gráfico 4.1:

Gráfico 4.1

Curva característica de la tensión y corriente en vacío (V_1 vs I_0).



Nota. El gráfico muestra la relación que existe entre la tensión de entrada V_1 versus la corriente en vacío I_0. Fuente: Elaboración propia.

Si el voltaje aplicado al primario es de la forma senoidal:

$$\mathbf{V_1(t) = V_{1m} sen(\omega t)} \quad \textbf{(4.1)}$$

El voltaje inducido en el primario debido al flujo mutuo será muy aproximadamente:

$$\mathbf{V_1 \approx e_1 = -N_1 \frac{d\varphi_{(t)}}{dt}} \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{\varphi_{(t)} = -N_1 \frac{V_{(1máx)}}{N_1} \int sen(\omega t)\, dt \Rightarrow \varphi_{(t)} = \frac{V_{1máx}}{\omega N_1} cos\,(\omega t)} \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{\varphi_{(máx)} = \frac{V_{1máx}}{\omega N_1} \text{o también} \Rightarrow N_1 \varphi_{(máx)} = \frac{V_{1máx}}{\omega}} \tag{4.4}$$

Si dividimos ambos miembros de la última ecuación por la raíz cuadrada de 2 tenemos:

$$\boldsymbol{\varphi_{eficaz} = \frac{V_1}{\omega N_1} \text{o también} \Rightarrow N_1 \varphi_{eficaz} = \frac{V_{1máx}}{\omega}\,; \text{Pero}: N_1 \varphi_{eficaz} = \Psi_{eficaz}} \tag{4.5}$$

Que son los enlaces de flujo del devanado primario debido al flujo mutuo, puesto que el voltaje V1 es constante por ser el voltaje del circuito de potencia “$N_1\varphi_{eficaz}$” se mantiene constante para cualquier estado de carga del transformador.

Entonces si hacemos “V_1/ω” en la escala del gráfico 4.1, tenemos los enlaces de flujo del devanado primario, “dichos enlaces son proporcionales al flujo mutuo y por lo tanto la curva que se obtendrá será proporcional a la curva de magnetización del transformador. Esta curva será utilizada luego para implementar la saturación magnética del transformador” **(Guru & Hiziroglu, 2003)**.

Entonces tenemos:

$$\boldsymbol{\Psi_{eficaz} = \frac{V_1}{\omega}} \tag{4.6}$$

Por lo que la curva del gráfico 4.2, se obtiene a partir del código Matlab implementado en el cuadro 4.2.

E. Resultado de la gráfica correspondiente a la curva de magnetización del transformador **(Holly, 2007)**.

Cuadro 4.2

Lenguaje de programación en Matlab para la curva flujo del devanado primario del transformador.

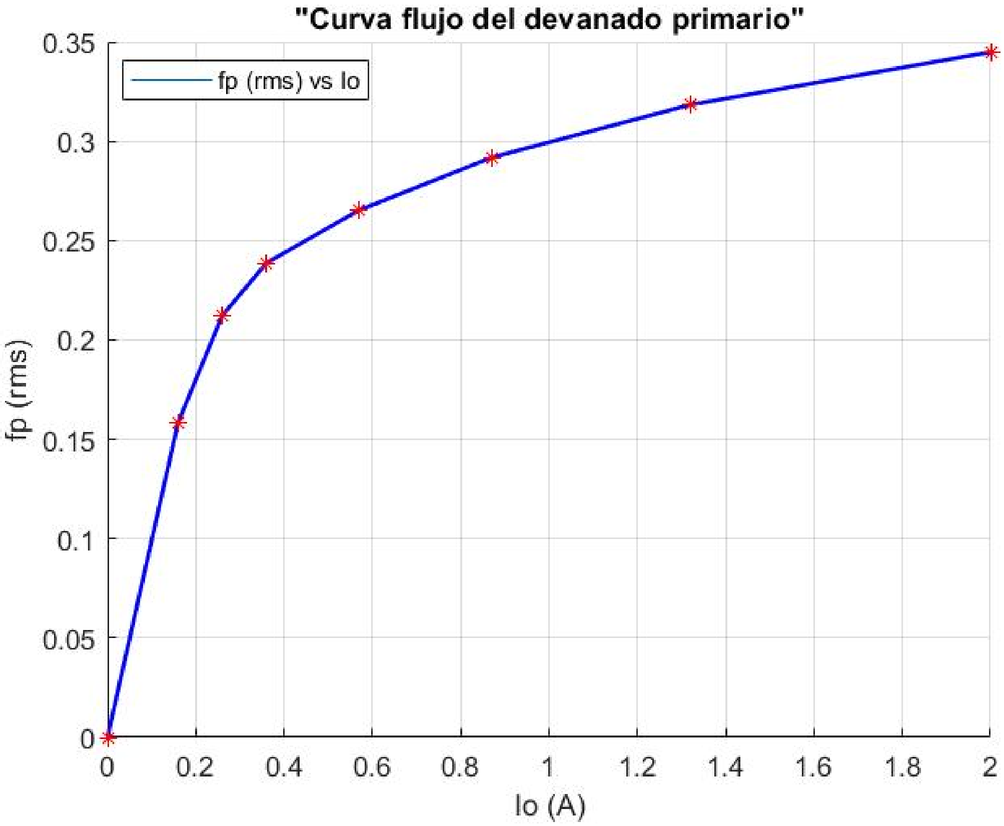
Simbología	Descripción

```
yt1=[0.00 59.70 80.00 90.00 100.00 110.00 120.00
130.00];
xt1=[0.00 0.16 0.26 0.36 0.57 0.87 1.32 2];
f=60
yt2=yt1/(2*pi*f)
%% graficas de los polinómios
hold on
plot(xt1,yt2)
% Color de la línea y grosor
plot(xt1,yt2,'b','Linewidth',1.5)
%insertar asterisco y color
plot(xt1,yt2,'*r')
hold off
%insertar título de la gráfica
title('"Curva flujo del devanado primario"')
%insertar leyenda
legend('fp (rms) vs Io')
%% insertar nombre de los ejes
ylabel('fp (rms)')
xlabel('Io (A)')
grid
```

Nota: Siendo esta el código implementado en Matlab. Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4.2

Curva característica flujo del devanado primario (fp_{rms} vs I_0).



Nota. El gráfico muestra la relación que existe entre el flujo del devanado primario versus la corriente en vacío I_0., siendo proporcional al gráfico 4.1 Fuente: Elaboración propia.

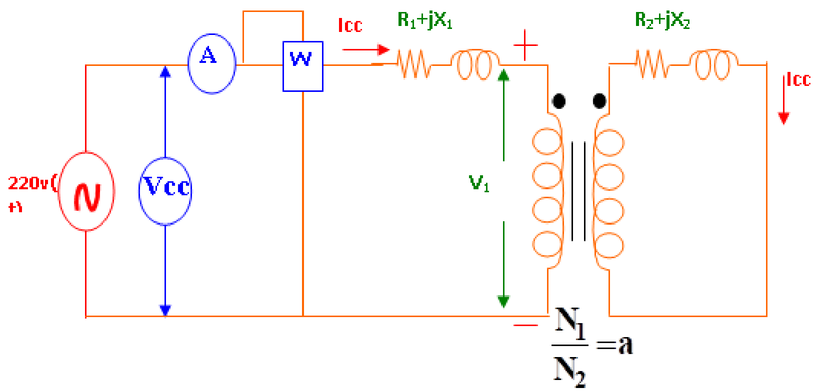
4.2.2. Prueba en cortocircuito.

Se implementó el circuito en SIMULINK. Posterior a ello; se procedió a variar el voltaje aplicado al primario con el secundario en circuito cerrado, para medir las corrientes de carga.

A. Circuito típico para prueba en corto circuito en SIMULINK.

Figura 4.3

Modelo para prueba de cortocircuito.



Nota. Representación del circuito para la prueba en simulación. Fuente: **(Chapman, 2000)**

Los resultados obtenidos de las mediciones realizadas y de los cálculos efectuados para determinar los parámetros se dan en el cuadro 4.7 (pág. 168)

Por otro lado, las simulaciones realizadas son considerando al devanado del primario, con 220 voltios. Es decir; que es el circuito que está conectado a la red. Ahora nos falta determinar las inductancias magnetizantes y la inductancia mutua de ambos devanados, para hacerlo utilizaremos la curva mostrada en el gráfico 4.1, A través de ella; determinaremos la inductancia mutua y a partir de esta última se calcularán las inductancias magnetizantes.

Como nuestro modelo es lineal el transformador se encontrará operando por debajo del codo de saturación de la curva de magnetización, ya habíamos mencionado que la permeabilidad por debajo del codo de saturación era más elevada que la permeabilidad que existe una vez cruzado el dicho codo, “como las inductancias magnetizantes y mutua dependen de la permeabilidad se tendrán distintas inductancias según sea la zona en donde opere el transformador. Las ecuaciones de las inductancias mutuas y magnetizantes" **(Jimmie J., 2015)** son:

1. Inductancia magnetizante del primario.

$$\mathbf{L_{12} = N_1\ 2\rho_m} \tag{4.7}$$

2. Inductancia magnetizante del secundario.

$$\mathbf{L_{21} = N_2\ 2\rho_m} \tag{4.8}$$

3. Inductancia mutua.

$$\mathbf{M = \ N_1 N_1 \rho_m} \tag{4.9}$$

En donde ρ_m es la permeancia del material magnético que depende de la permeabilidad de dicho material.

"Las relaciones entre las inductancias mutuas magnetizantes son" **(Jimmie J., 2015)**:

$$\mathbf{M * a = N_1 N_2 \frac{\boldsymbol{N_1}}{\boldsymbol{N_2}} \rho_m = \boldsymbol{N_1}^2 \rho_m \ \Rightarrow \ L_{12} = a * M} \tag{4.10}$$

En donde "a = N_1/N_2" es la relación de transformación. Análogamente para la inductancia magnetizante del secundario tenemos:

$$\mathbf{\frac{M}{\boldsymbol{a}} = \frac{N_1 N_2}{\frac{\boldsymbol{N_1}}{\boldsymbol{N_2}}} \rho_m = \boldsymbol{N_2}^2 \rho_m \ \Rightarrow \ L_{12} = \frac{M}{\boldsymbol{a}}} \tag{4.11}$$

Llevando al MATLAB, tenemos la curva mostrada en el gráfico 4.3, partir del código MATLAB implementado y mostrado en el cuadro 4.3

B. Código o lenguaje de programación implementado en MATLAB.

Cuadro 4.3

Lenguaje de programación en Matlab valores inducidos no saturados para la obtención de las inductancias mutuas y magnetizantes.

Simbología	Descripción

```
yt1=[0.00 59.70 80.00 90.00 100.00 110.00 120.00 130.00];
xt1=[0.00 0.16 0.26 0.36 0.57 0.87 1.32 2];
%% grafica del polinómio
hold on
plot(xt1,yt1)
% Color de la línea y grosor
plot(xt1,yt1,'b','Linewidth',1.5)
%insertar asterisco y color
plot(xt1,yt1,'*b')
%% grafica de la recta
yt2=[0 139.9238];
xt2=[0 0.375];
plot(xt2,yt2)
hold on
% Color de la línea y grosor
plot(xt2,yt2,'r','Linewidth',1)
%insertar asterisco y color
plot(xt2,yt2,'*r')
% señalar punto de tangencia
plot(0.16,59.7,'o');
% mostrar punto de tangencia
text(0.16,59.7,'(0.16 , 59.7)');
%% Caracteristicas de la grafica
%insertar título de la gráfica
title('"Gráfica Voltage vs Corriente en Vacio para valores
no inducidos"')
%insertar leyenda
legend('V1(V) vs Io(A)')
%insertar nombre de los ejes
ylabel('V1 (V)')
xlabel('Io (A)')
grid on
```

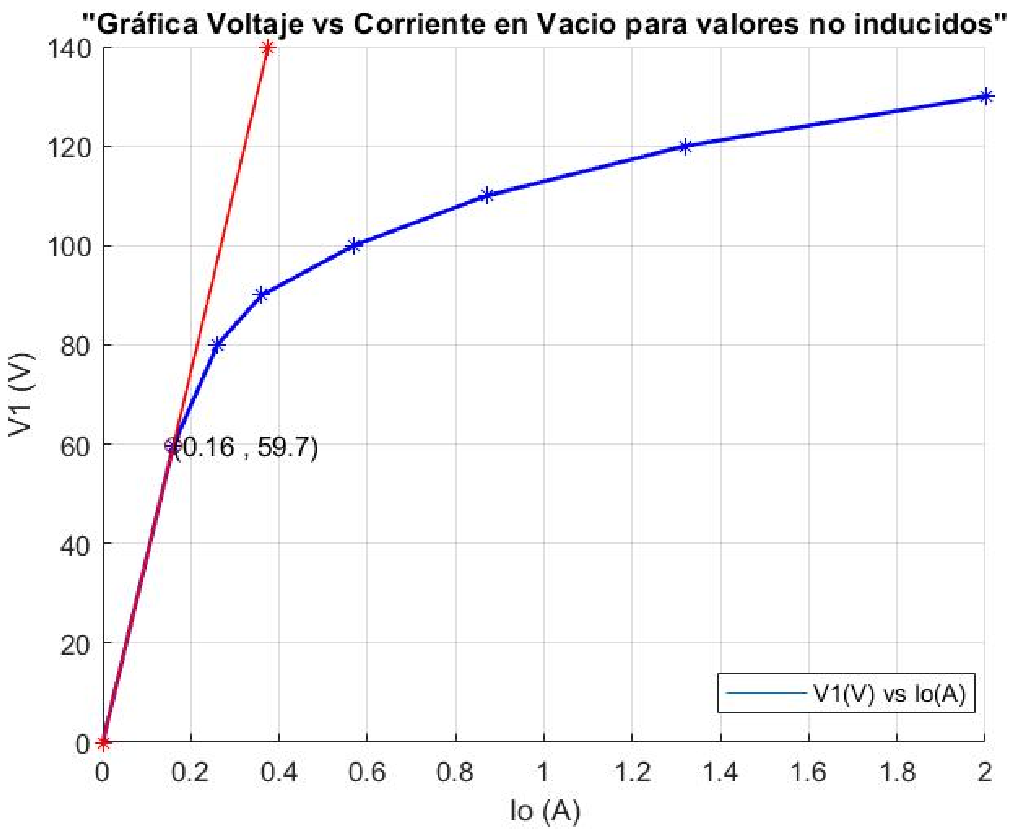
Nota: Siendo esta el código implementado en Matlab. Fuente: Elaboración propia.

C. Resultado de la gráfica correspondiente a la V_1 vs I_o.

A partir del código MATLAB que se detalla en el cuadro 4.3, previamente considerando el gráfico 4.1 e incluimos la parte lineal con los valores V1 = 59.7 e I_0 = 0.16 A siendo esta, donde se encuentran los valores no saturados o valores por debajo del codo de saturación. Posterior a ello, trazamos un gráfico con los valores de voltaje y de corriente de vacío donde muestre la intersección de la linealidad con la curva del grafico 4.1, obteniendo así, el gráfico 4.3:

Gráfico 4.3

Curva característica lineal de la tensión y corriente en vacío (V_1 vs I_0).



Nota. El gráfico muestra la intersección de la curva grafico 4.1 y el sistema lineal en los puntos V_1 = 59.7 e I_0 = 0.16. Fuente: Elaboración propia.

La ecuación de la tensión inducida en el secundario estando el transformador en vacío es:

$$\mathbf{e_{20} = -N_2 \frac{d\varphi_{(t)}}{dt}} \qquad \textbf{(4.12)}$$

Pero el flujo mutuo instantáneo $\varphi_{(t)}$ se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\varphi_{(t)} = (N_1 I_{0\,máx}\,\rho_m) * \cos(\omega t)} \qquad \textbf{(4.13)}$$

Puesto que como se sabe el flujo mutuo y la corriente que lo produce están en fase, reemplazando la última ecuación en la expresión de "e_{20}" tenemos:

$$\boldsymbol{e_{20} = -N_2\,\frac{d[(N_1 I_{0\,máx}\,\rho_m) * \cos(\omega t)]}{dt}} \qquad \textbf{(4.14)}$$

$$\boldsymbol{e_{20} = -N_2\,N_1 I_{0\,máx}\,\rho_m \frac{d\cos\omega t}{dt}} \qquad \textbf{(4.15)}$$

$$\boldsymbol{e_{20} = [N_2\,N_1 \rho_m I_{0\,máx}\omega]sen\omega t = E_{20máx} = sen\omega t} \qquad \textbf{(4.16)}$$

$$\boldsymbol{e_{20} = \omega[N_1\,N_2 \rho_m\,]\,I_{0\,máx}} \qquad \textbf{(4.17)}$$

$$\boldsymbol{e_{20} = \omega\,M\,I_{0\,máx}} \qquad \textbf{(4.18)}$$

Dividiendo la ecuación anterior por la raíz cuadrada de 2 tenemos:

$$\boldsymbol{e_{20} = \omega\,M\,I_0(Valores\ eficaces)} \qquad \textbf{(4.19)}$$

De donde "M" se calcula como:

$$\boldsymbol{M = \frac{E_{20}}{\omega I_0}\ ;donde\!: E_{20} = \frac{V_1}{a}} \qquad \textbf{(4.20)}$$

Es decir; con los valores obtenidos del ensayo de voltaje aplicados al primario y la corriente de vacío que toma el transformador pueden calcularse la tensión inducida en el secundario y una vez obtenida ésta se puede calcular la inductancia mutua "M".

Del gráfico 5.3, vemos que existe una relación lineal entre la corriente de vacío y el voltaje aplicado al primario hasta valores de tensión y de corriente de aproximadamente 80 voltios para la cual le corresponde una corriente de vacío de 0.26 amperios, hasta estos valores la inductancia mutua permanecerá constante y, por lo tanto, también permanecerán constantes las inductancias magnetizantes del primario y del secundario. Los valores que toman las inductancias mutuas y magnetizantes por debajo del codo de saturación se denominan inductancias no saturadas, por encima del codo de saturación se denominan inductancias saturadas. Nosotros deberemos utilizar para nuestro caso los valores no saturados de las inductancias mutua y magnetizantes puesto que nuestro sistema es lineal.

El valor de la inductancia mutua "M" no saturada se calcula como:

El punto tomado que corresponde a la parte recta de la curva del gráfico 4.3, es: V_1 = 59.7 Voltios, I_0 = 0.16 Amperios.

Calculamos el voltaje inducido en el secundario:

$$\mathbf{E_{20} = \frac{V_1}{a} = \frac{59.70}{0.5} = 119.40\ V}$$

Con los valores de "E_{20}", la corriente "I_0" y ω = r / segundos, calculamos la inductancia mutua no saturada a la que agregaremos el subíndice "ns":

$$\mathbf{M_{ns} = \frac{119.40}{(\omega * 0.16)}\ (Hy)}$$

$$\mathbf{M_{ns} = 2.377\ Henrios}$$

Los valores correspondientes a las inductancias magnetizantes del primario y del secundario serán:

A. Inductancia magnetizante del primario

$$\mathbf{L_{12ns} = a * M = 0.5 * 2.377\ Henrios\ (Induc.\ magn.\ no\ saturada)}$$

$$\mathbf{L_{12ns} = L_{12} = 1.1885\ Henrios}$$

B. Inductancia magnetizante del secundario

$$\mathbf{L_{21ns}} = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathbf{2.377}}{\mathbf{0.5}}\ \mathbf{(H)}$$

$$\mathbf{L_{21ns} = L_{21} = 4.754\ Henrios}$$

Ahora ya tenemos todos los parámetros para implementar los modelos matemáticos desarrollados en el capítulo III.

4.3. Implementación del modelo en ecuaciones diferenciales del transformador monofásico.

Nuevamente recopilamos las ecuaciones demostradas en el capítulo III, de la siguiente manera:

$$\mathbf{v_1} = \boldsymbol{u_1} = \mathbf{L_{11}\frac{di_1}{dt} + L_{12}\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} + i_1R_1} \qquad \textbf{(3.90) Cap. III}$$

$$\mathbf{+0 = v_2 + L_{22}\frac{di_2}{dt} + L_{21}\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} + i_2R_2} \qquad \textbf{(3.91) Cap. III}$$

Trabajamos los modelos de las ecuaciones anteriores:

$$\mathbf{v_1 = (L_{11} + L_{12})\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} + i_1R_1} \qquad \textbf{(4.21)}$$

$$\mathbf{0 = v_2 + (L_{22} + L_{21})\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} + i_2R_2} \qquad \textbf{(4.22)}$$

La inductancia total del primario es:

$$\mathbf{L_1 = L_{11} + L_{12}} \qquad \textbf{(4.23)}$$

La inductancia total del secundario es:

$$\mathbf{L_2 = L_{22} + L_{21}} \qquad \textbf{(4.24)}$$

Remplazando las inductancias totales del primario y secundario en el sistema de ecuaciones anterior tenemos:

$$\mathbf{v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + i_1 R_1} \tag{4.25}$$

$$\mathbf{0 = v_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + i_2 R_2} \tag{4.26}$$

Del sistema anterior despejamos de la primera ecuación la derivada de la corriente del primario y de la segunda se despeja la derivada de la corriente del secundario:

$$\frac{\mathbf{di_1}}{\mathbf{dt}} = \frac{\boldsymbol{V_1 - i_1 R_1}}{\boldsymbol{L_1}} - \frac{\mathbf{M}}{\boldsymbol{L_1}} \frac{\mathbf{di_2}}{\mathbf{dt}} \tag{4.27}$$

$$\frac{\mathbf{di_2}}{\mathbf{dt}} = \frac{\boldsymbol{-V_2 - i_2 R_2}}{\boldsymbol{L_2}} - \frac{\mathbf{M}}{\boldsymbol{L_2}} \frac{\mathbf{di_1}}{\mathbf{dt}} \tag{4.28}$$

Si ahora integramos ambos miembros del sistema anterior de ecuaciones tenemos:

$$\mathbf{i_{1(t)} = \int \left[\frac{V_1 - i_1 R_1}{L_1} - \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} \right] dt} \tag{4.29}$$

$$\mathbf{i_{2(t)} = \int \left[\frac{-V_2 - i_2 R_2}{L_2} - \frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt} \right] dt} \tag{4.30}$$

4.3.1. Implementación.

Implementaremos primero un transformador componente del banco para luego realizar lo mismo con los otros dos transformadores.

Cuadro 4.4

Características del transformador a simular.

Descripción		Características
Potencia nominal (S)	:	1 KVA.
Tensión nominal (V)	:	220 / 110 Voltios

Corriente nominal (I)	:	4.5 / 9 Amperios.
Frecuencia (f)	:	60 Hertz

Nota: Datos característicos de los parámetros eléctricos de un transformador. Fuente: Elaboración propia.

Resumiendo, los valores para implementar en el cuadro 4.5, tenemos:

Cuadro 4.5

Parámetros con valores características para simular.

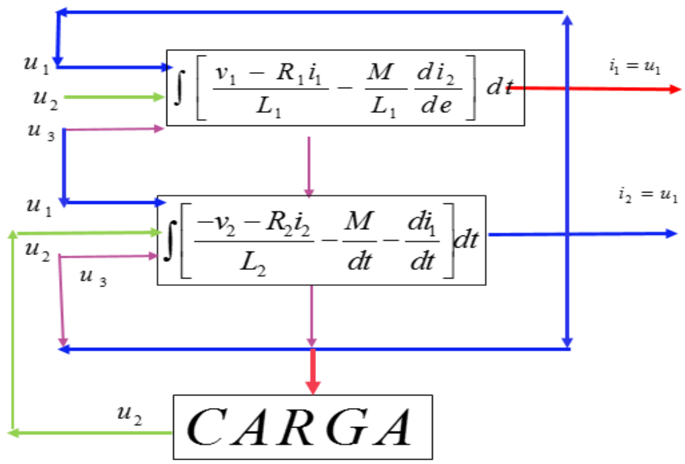
Parámetros	Especificaciones	Valor
i_1	Corriente del primario	--
i_2	Corriente del secundario	--
R_1	Resistencia del primario	0.338
R_2	Resistencia del secundario	0.55
L_{11}	Inductancia de dispersión primaria	0.0004
L_{22}	Inductancia de dispersión secundaria	0.001623
$M=\frac{E_{20}}{\omega I_0}$	Inductancia mutua entre los devanados	2.377
$L_{12}=a*M$	Inductancia magnetizante primaria	1.1885
$L_{21}=M/a$	Inductancia magnetizante secundaria	4.754
$L_1 = L_{11} + L_{12}$	Inductancia total del primario	1.1889
$L_2 = L_{22} + L_{21}$	Inductancia total del secundario	4.7556
M	Inductancia mutua entre los devanados	--

Nota: Valores calculados. Fuente: Elaboración propia.

Finalmente; las ecuaciones 4.29 y 4.30 son implementados en el diagrama de bloques de la figura 4.4 y remplazados con sus respectivos valores en la figura 4.5.

Figura 4.4

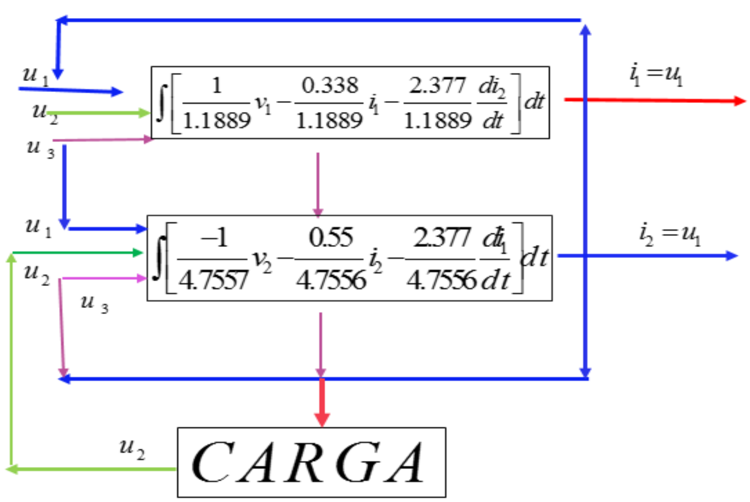
Diagrama de bloque del primario y secundario del transformador.



Nota. Representación de la función de transferencia del primario y secundario del transformador monofásico según las ecuaciones 4.29 y 4.30. Fuente: Elaboración propia.

Figura 4.5

Diagrama de bloque del primario y secundario del transformador con valores.



Nota. Representación de la función de transferencia del primario y secundario del transformador monofásico previo remplazo de valores según el cuadro 4.5. Fuente: Elaboración propia.

Reemplazando en las ecuaciones 4.29 y 4.30 los valores de los parámetros del cuadro 4.5 y separando en términos tenemos:

$$\mathbf{i_{1(t)}} = \int \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1.1889}}\mathbf{V_1} + \frac{\mathbf{0.338}}{\mathbf{1.1889}}\mathbf{i_1} + \frac{\mathbf{2.377}}{\mathbf{1.1889}}\frac{\mathbf{di_2}}{\mathbf{dt}}\right]\mathbf{dt} \qquad \textbf{(4.31)}$$

$$\mathbf{i_{2(t)}} = \int \left[\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{4.7556}}\mathbf{V_2} + \frac{\mathbf{0.550}}{\mathbf{4.7556}}\mathbf{i_2} + \frac{\mathbf{2.377}}{\mathbf{4.7556}}\frac{\mathbf{di_1}}{\mathbf{dt}}\right]\mathbf{dt} \qquad \textbf{(4.32)}$$

Vemos de la primera o segunda ecuación que adentro del integrando tenemos la suma de tres términos, estos términos pueden ser considerados como las componentes de un vector.

Para implementar las ecuaciones anteriores usaremos los siguientes bloques en SIMULINK:

Cuadro 4.6

Bloques para simular en ecuaciones diferenciales.

Nombre	Tipo	Descripción
SINE WAVE	Sources	Para excitar al transformador
MUX	Signal Routing	Para poder ingresar los vectores de tres componentes
FCN	Definid Funcions	Con este bloque sumaremos las tres componentes del vector.
DERIVATIVE	Continuos	Al mismo se lo utilizará para realizar las derivadas de las corrientes del primario y del secundario
INTEGRATOR	Continuos	Se utiliza este bloque para realizar la integral de la suma de las componentes del vector de entrada
GAIN	Math Operations	Se utilizará este bloque para representar la resistencia e inductancia de carga
SUM	Math Operations	Se utiliza para sumar
OSCILOSCOPIOS	Math Operations	Para observar las corrientes

Nota: Bloques del SIMULINK para implementar nuestra simulación. Fuente: Elaboración propia.

El voltaje en bornes del secundario es:

$$\mathbf{v_2 = i_2 R_{2c} + L_{2c}\frac{di_2}{dt}} \qquad \textbf{(4.33)}$$

Los valores considerados para la resistencia e inductancia de la carga son:

R_c = 50 Ohms

L_c = 0.0729 Henrios.

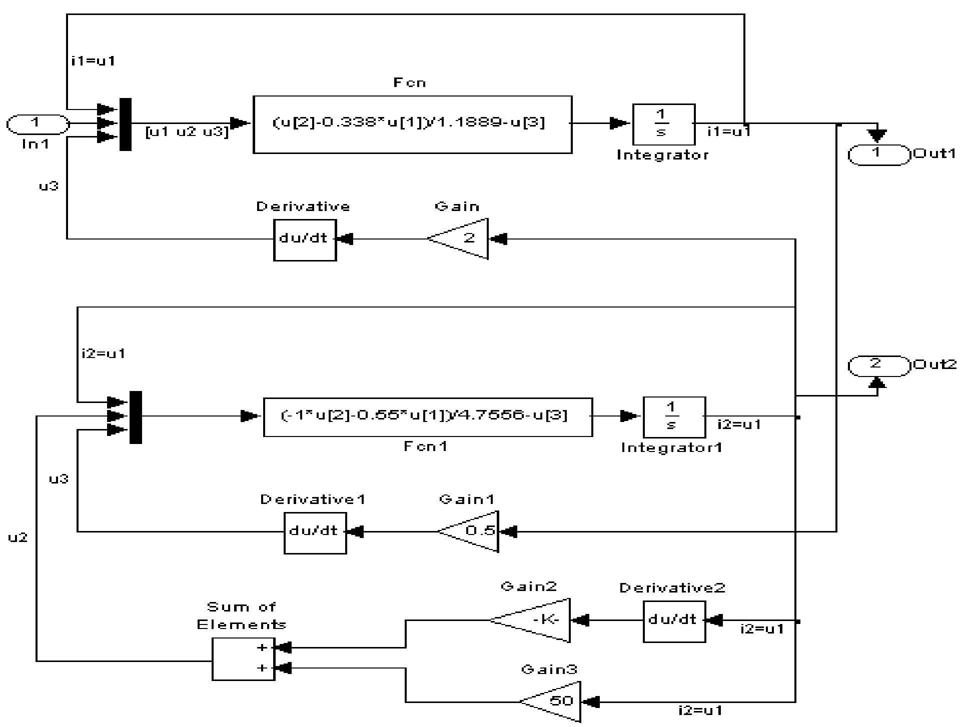
Reemplazando estos valores en la ecuación de la tensión en bornes del secundario tenemos:

$$\mathbf{v_2 = 50i_2 + 0.0729\frac{di_2}{dt} = u} \qquad \textbf{(4.34)}$$

Si interconectamos todos los bloques el diagrama de bloques del sistema de ecuaciones diferenciales que representan al transformador monofásico nos queda la figura 4.6 y 4.7.

Figura 4.6

Diagrama de bloques de transformador monofásico en SIMULINK.

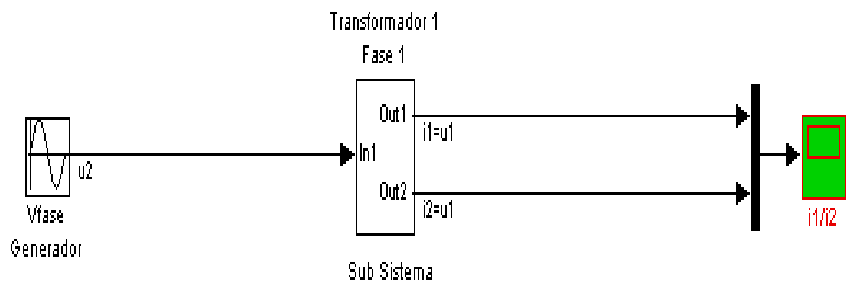


Nota. Representación del diagrama de bloque implementados en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, ya encapsulado, para visualizar en el osciloscopio queda:

Figura 4.7

Implementación del transformador monofásico respuesta a la simulación.

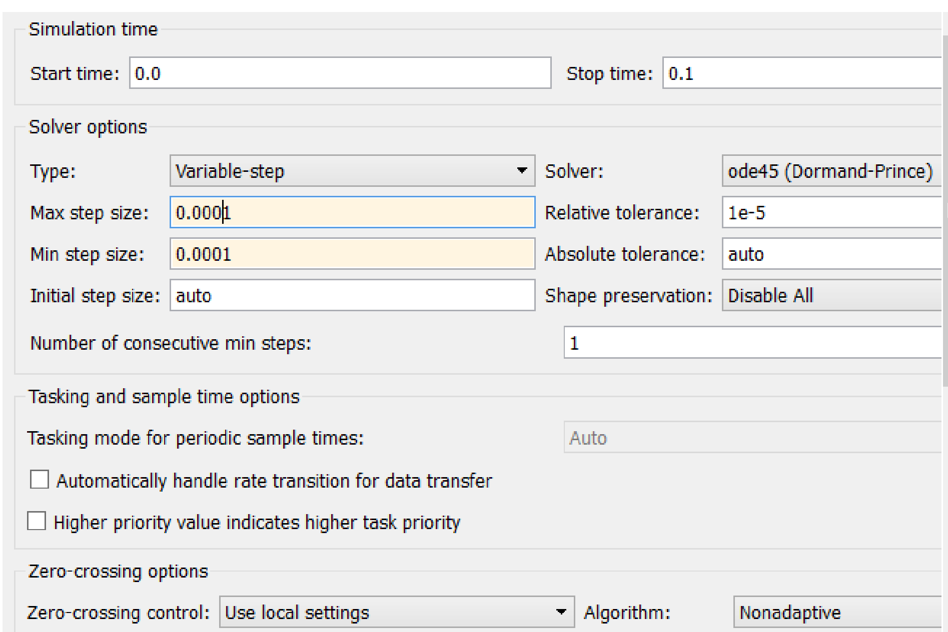


Nota. Representación del sistema para la vista en simulación en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

Ajustando tanto los parámetros de simulación y los parámetros del generador según la figura 4.8, posterior a esto; hacemos correr la simulación y como resultado, se tiene las corrientes que se muestra en el gráfico 4.4.

Figura 4.8

Parámetros ajustados en SIMULINK.



Nota. Valores típicos de ajuste para la simulación en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

El gráfico resultante, se puede obtener de dos maneras: directamente del osciloscopio implementado en SIMULINK y mediante un código implementado en el script del MATLAB, en este caso, se implementó un código o lenguaje de programación en MATLAB que se detalla en el cuadro 4.7.

Cuadro 4.7

Lenguaje de programación en Matlab para la obtención del grafico resultante según el modelo de ecuaciones diferenciales del banco monofásico.

Simbología	Descripción

```
[t i c]=sim('FGrafico5_4.mdl');
linspace(0,3,20);
plot(t(:,1),c(:,1),'b',t(:,1),c(:,2),'r');
title('ECUAC.DIFER.:Corrientes del:Primar.(i1) y
Secun.(i2) para R=50');
xlabel('Tiempo,seg.');
ylabel('Corrientes: i1 y i2');
legend('i1','i2');
c(:,1);
c(:,2);
t(:,1);
grid on;
my_results=[t,i];
max_i1=max(c(:,1))
min_i1=min(c(:,1));
max_i2=max(c(:,2))
min_i2=min(c(:,2));
```

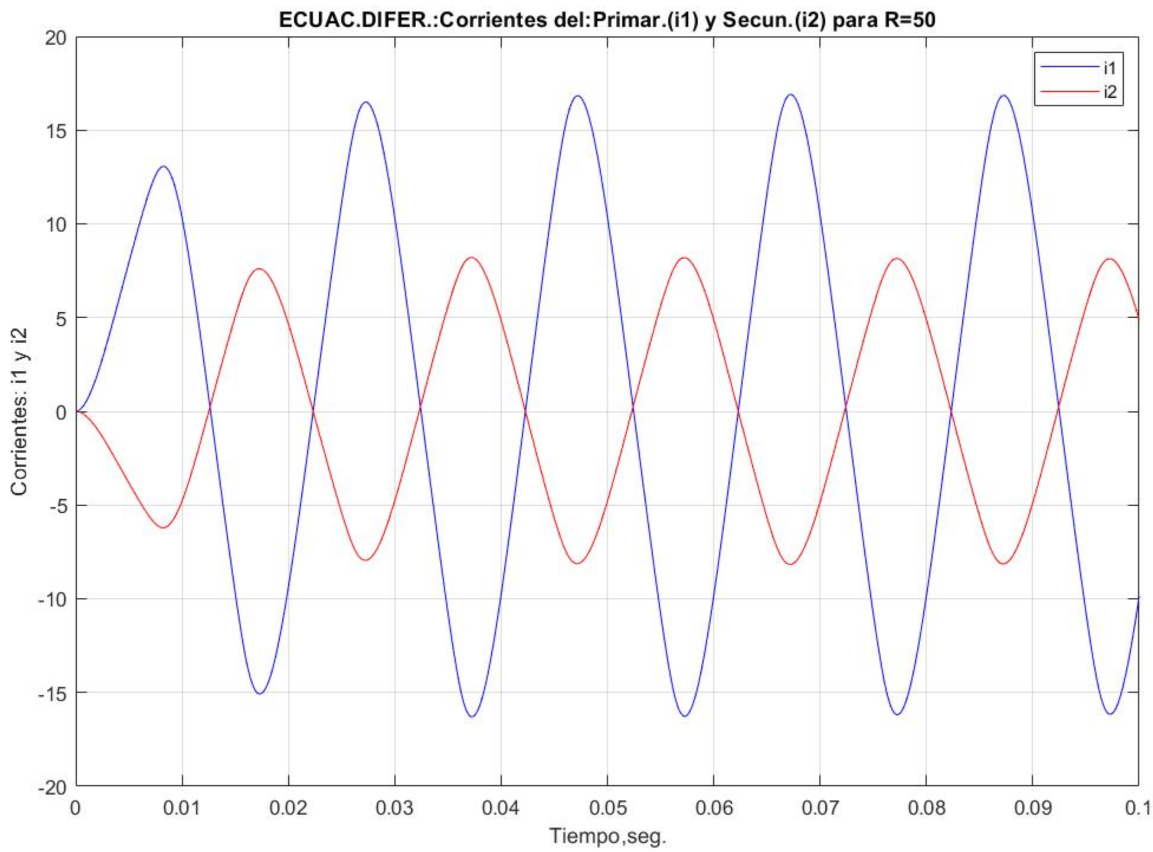
Resultado:

```
>> GGrafico5_4

max_i1 =

   16.5538

max_i2 =

    8.1625
```

Nota: Siendo esta el código implementado en Matlab para obtener el grafico 4.4. Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4.4

Resultados de corrientes del primario y secundario del transformador monofásico en simulación.



Nota. La onda senoidal azul representa la corriente i_1(primario), contrariamente la roja representa la corriente 1_2 (secundario). Fuente: Elaboración propia.

Los valores resultantes son 16.5538 amperios y 8.1625 amperios, respectivamente. Análogamente tendremos lo mismo para los otros dos transformadores componentes del banco.

4.4. Implementación del modelo en espacio de estado del transformador monofásico.

4.4.1. implementación.

Las ecuaciones de modelo en espacio de estado en términos de inductancia mutua no saturada se deducen a partir de las ecuaciones descritas en el cuarto capítulo (ecuaciones del 3.72 al 3.79).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i'}_{1(\mathrm{t})} \\ \mathbf{i'}_{2(\mathrm{t})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\mathbf{R_1 L}_t}{\mathbf{L_1 L}_t - \mathbf{M}_{ns}{}^2} & \dfrac{\mathbf{M}_{ns}\mathbf{R_t}}{\mathbf{L_1 L}_t - \mathbf{M}_{ns}{}^2} \\ \dfrac{\mathbf{M}_{ns}\mathbf{R_1}}{\mathbf{L_1 L}_t - \mathbf{M}_{ns}{}^2} & -\dfrac{\mathbf{R_t L_1}}{\mathbf{L_1 L}_t - \mathbf{M}_{ns}{}^2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{1(\mathrm{t})} \\ \mathbf{i}_{2(\mathrm{t})} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{L}_t}{\mathbf{L_1 L}_t - \mathbf{M}_{ns}{}^2} \\ -\dfrac{\mathbf{M}_{ns}}{\mathbf{L_1 L}_t - \mathbf{M}_{ns}{}^2} \end{bmatrix} . \boldsymbol{u}_{1(\mathrm{t})} \tag{4.35}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{1(\mathrm{t})} \\ \boldsymbol{y}_{2(\mathrm{t})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{1(\mathrm{t})} \\ \mathbf{i}_{2(\mathrm{t})} \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

Las matrices A, B, C y D del modelo son:

A. Matriz de la planta.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\mathbf{R_1 L}_t}{\mathbf{L_1 L}_t - \mathbf{M}_{ns}{}^2} & \dfrac{\mathbf{M}_{ns}\mathbf{R_t}}{\mathbf{L_1 L}_t - \mathbf{M}_{ns}{}^2} \\ \dfrac{\mathbf{M}_{ns}\mathbf{R_1}}{\mathbf{L_1 L}_t - \mathbf{M}_{ns}{}^2} & -\dfrac{\mathbf{R_t L_1}}{\mathbf{L_1 L}_t - \mathbf{M}_{ns}{}^2} \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

B. Matriz de control.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{L}_t}{\mathbf{L_1 L}_t - \mathbf{M}_{ns}{}^2} \\ -\dfrac{\mathbf{M}_{ns}}{\mathbf{L_1 L}_t - \mathbf{M}_{ns}{}^2} \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

C. Matriz de salida.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

D. Matriz de acople.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

Reemplazando los valores de los parámetros en las matrices A y B considerando "Rc = 50 Ohms y Lc = 0.0729 Hy" dichas matrices nos quedan:

A. Matriz de la planta.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{-18.028} & \mathbf{1327.322} \\ \mathbf{8.975} & \mathbf{-663.887} \end{bmatrix}$$

B. Matriz de control.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{53.338} \\ \mathbf{-26.257} \end{bmatrix}$$

Por lo que el modelo de estado nos quedará:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i'}_{\mathbf{1(t)}} \\ \mathbf{i'}_{\mathbf{2(t)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-18.028} & \mathbf{1327.322} \\ \mathbf{8.975} & \mathbf{-663.887} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{\mathbf{1(t)}} \\ \mathbf{i}_{\mathbf{2(t)}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{53.338} \\ \mathbf{-26.257} \end{bmatrix} . \boldsymbol{u}_{\mathbf{1(t)}}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_{\mathbf{1(t)}} \\ \boldsymbol{y}_{\mathbf{2(t)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{\mathbf{1(t)}} \\ \mathbf{i}_{\mathbf{2(t)}} \end{bmatrix}$$

Cuadro 4.8

Código fuente Matlab.

Simbología	Descripción

```
clc
clear all
A=[-18.028 1327.322;8.875 -663.887]
B=[53.338;0]
C=[1 0]
D=[0]
I=eye(size(A))
syms s t
u=220*sin(377*t);
U=laplace(u)
(s*I-A)
M=inv(s*I-A)
X=M*B*U
Y=C*X
y=ilaplace(Y)

%CONTROLABILIDAD
Cc=ctrb(A,B)
det(Cc)
%OBSERVABILIDAD
Oo=obsv(A,C)
%det(Oo)
figure(1)
subplot(1,2,1)
ezplot(u)
grid
subplot(1,2,2)
ezplot(y,[0,0.1])
grid
```

```
%TRANSFORMACION DE VARIABLES DE ESTADO A FUNCION DE
TRANSFERENCIA
[N,D] = ss2tf(A,B,C,D)
%ESTABILIDAD DEL SISTEMA
figure(2)
rlocus(N,D)
grid

--------------------------------------------------------

Matrices del espacio de estados
Matriz de estados
A=[-18.028 1327.322;8.875 -663.887]
Matriz de entradas
B=[53.338;0]
Matriz de salidas
C=[1 0]
Matriz de transmisión directa
D=[0]
Matriz unitaria
I=eye(size(A))
I =
     1     0
     0     1

syms s t
señal de entrada
u=220*sin(377*t)
U=laplace(u)
U =82940/(s^2 + 142129)
M=inv(s*I-A)

M =

[ (1000*(4398046511104*s +
2919805904117301))/(4398046511104000*s^2 +
2999093886619483912*s + 829348804923903303),
5837623891211583000/(4398046511104000*s^2 +
2999093886619483912*s + 829348804923903303)]
[
39032662786048000/(4398046511104000*s^2 +
2999093886619483912*s + 829348804923903303),
(17592186044416*(250*s + 4507))/(4398046511104000*s^2 +
2999093886619483912*s + 829348804923903303)]
 X=M*B*U


X =
```

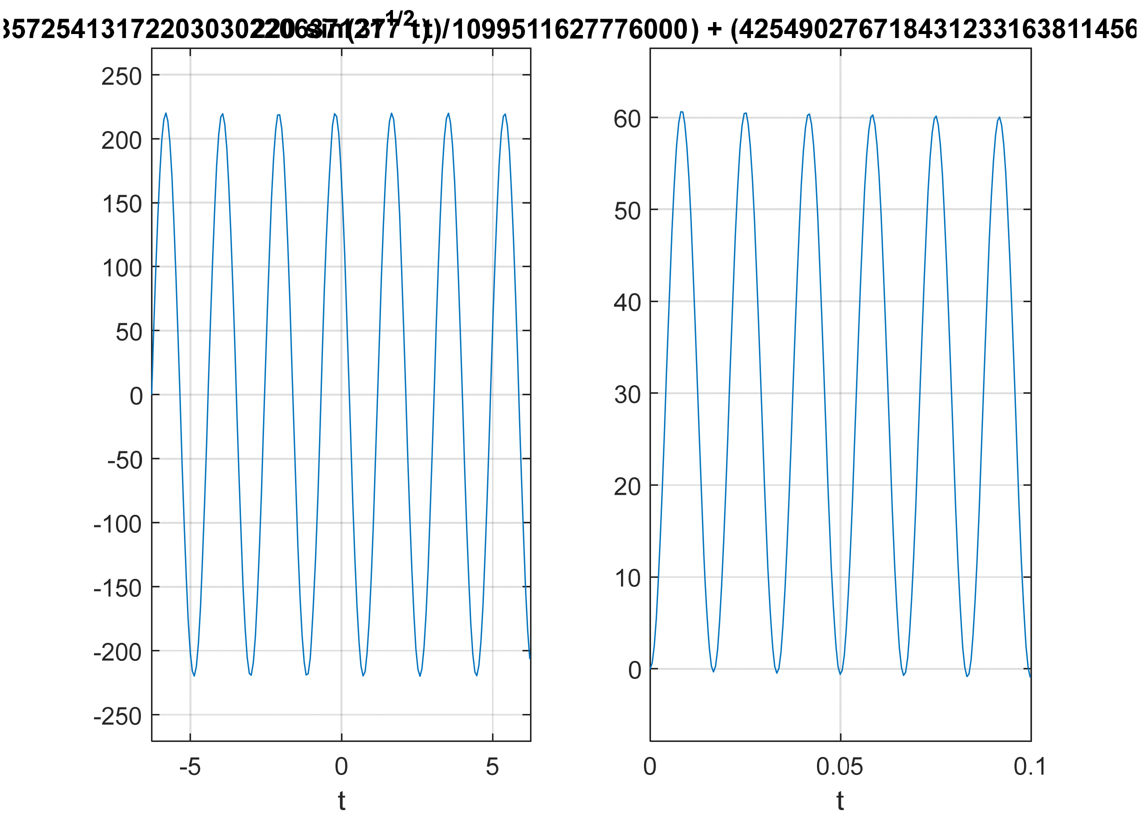
```
 (4423853720*(4398046511104*s + 2919805904117301))/((s^2 +
142129)*(4398046511104000*s^2 + 2999093886619483912*s +
829348804923903303))
                          1726747904675640088985600/((s^2 +
142129)*(4398046511104000*s^2 + 2999093886619483912*s +
829348804923903303))
 Y=C*X


Y =

(4423853720*(4398046511104*s + 2919805904117301))/((s^2 +
142129)*(4398046511104000*s^2 + 2999093886619483912*s +
829348804923903303))
y=ilaplace(Y)


y =

(93845379384574229027148031820066656446800*sin(377*t))/2566291
85874361255297113400361866128326 89 -
(78283829443166282913155422804681039151200 0*cos(377*t))/25662
9185874361255297113400361866128326 89 +
(78283829443166282913155422804681039151200 0*exp(-
(3748867358274354 89*t)/1099511627776000)*(cosh((1403120950357
2541317220303022063712 1^(1/2)*t)/1099511627776000) +
(4254902767184312331638114567554402841003306260441*1403120950
357254131722030302206371 21^(1/2)*sinh((14031209503572541317 22
030302206371 21^(1/2)*t)/1099511627776000))/161391169954497125
219219580529135986313088886193947078672757169272 9))/256629185
874361255297113400361866128326 89
```

Nota: Siendo esta, el código implementado en Matlab para obtener el grafico 4.5. Fuente:

Elaboración propia.

Gráfico 4.5

Gráfico de la Entrada y la Salida del Sistema.



Nota: Elaboración propia.

Cuadro 4.9

Código Matlab Controlabilidad.

Simbología	Descripción

```
CONTROLABILIDAD
 Cc=ctrb(A,B)

Cc =

   53.3380 -961.5775
         0  473.3748

Det(Cc)
ans =   2.5249e+04
el determinante es diferente de cero por lo tanto el sistema es
controlable

OBSERVABILIDAD
```

```
Oo=obsv(A,C)

Oo =

   1.0e+03 *    0.0010         0
                        -0.0180    1.3273
Det(Oo)
ans =   1.3273e+03
el determinante es diferente de cero por lo tanto el sistema es
observable
TRANSFORMACION DE VARIABLES DE ESTADO A FUNCION DE TRANSFERENCIA
[N,D] = ss2tf(A,B,C,D)

N =1.0e+04 *[  0    0.0053    3.5410]
D =[1.0000  681.9150  188.5721]
```

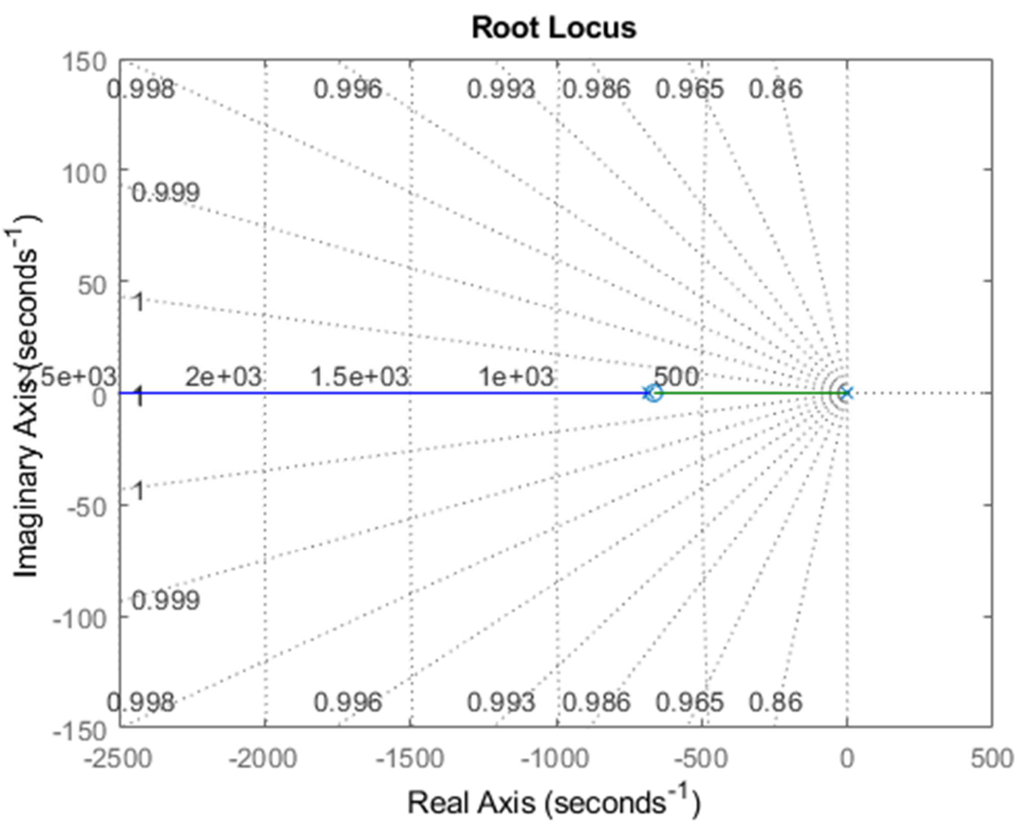
$$\boldsymbol{G(s)} = \frac{\boldsymbol{53S + 35410}}{\boldsymbol{S^2 + 681.91S + 188.57}}$$

```
ESTABILIDAD DEL SISTEMA
rlocus(N,D)
```

Nota: Siendo está el código implementado en Matlab para obtener el grafico 4.6. Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4.6

Gráfico controlabilidad.

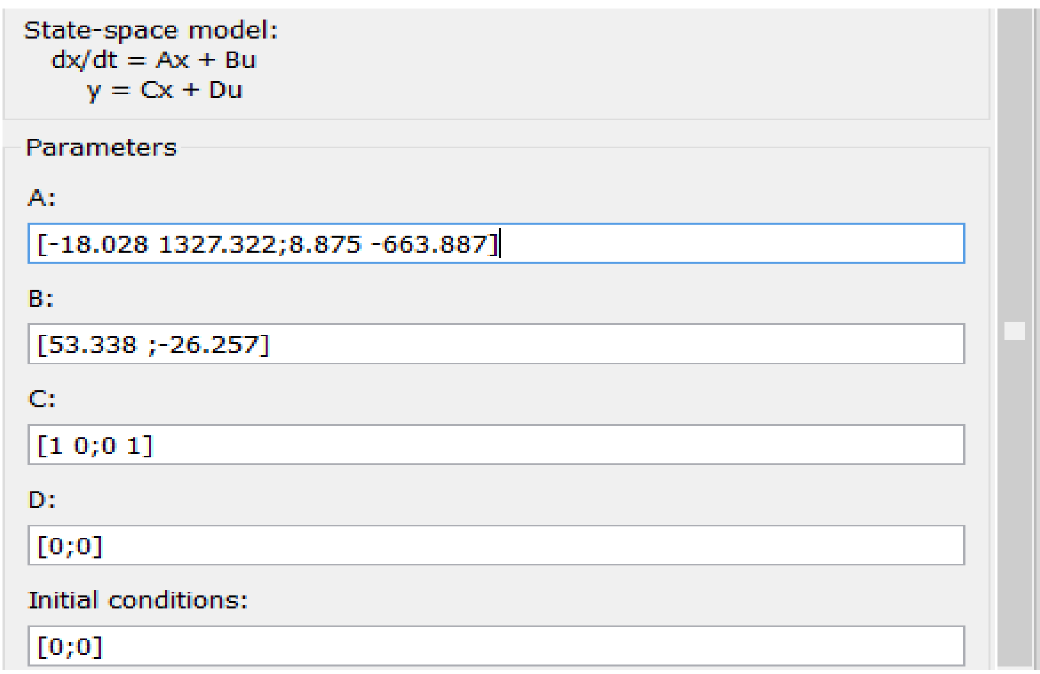


Nota: Un polo en el origen y el otro en 500 y Un cero en 500. El sistema es estable debido a que todos los puntos del sistema están al lado izquierdo del plano complejo. Fuente: Elaboración propia.

Para implementar el modelo de estado utilizaremos el bloque "State-Space". Hacemos doble clic en el icono correspondiente y procedemos a cargar la matriz y las condiciones iniciales de las variables de estado que se considerarán nulas para t = 0 seg.

Figura 4.9

Ventana State-Space en SIMULINK.

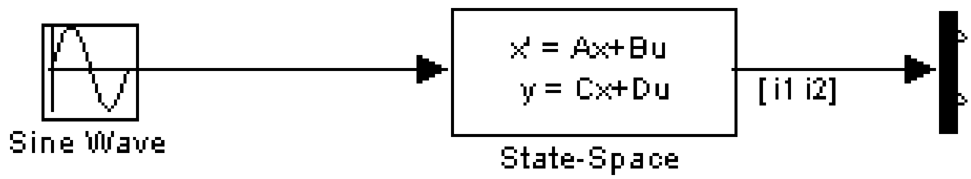


Nota. Ventana donde cargamos las condiciones iniciales para un t = 0 seg. en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

El diagrama de bloques correspondiente al transformador quedará:

Figura 4.10

Diagrama de bloque modelo espacio de estadio 1.

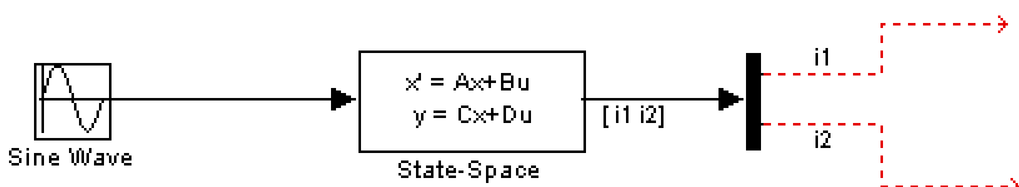


Nota. Diagrama State-Space para una salida en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

Donde la salida del bloque "State-Space" es en este caso vectorial ya que estamos considerando que el sistema en este caso tiene dos salidas, estas son las corrientes del primario y del secundario, para separar a cada una de ellas se utilizará el bloque "Demux" –demultiplexor- para separar a las dos componentes del vector y tener por lo tanto salidas escalares del demultiplexor- funciona al revés del "Mux":

Figura 4.11

Diagrama de bloque modelo espacio de estado 2.

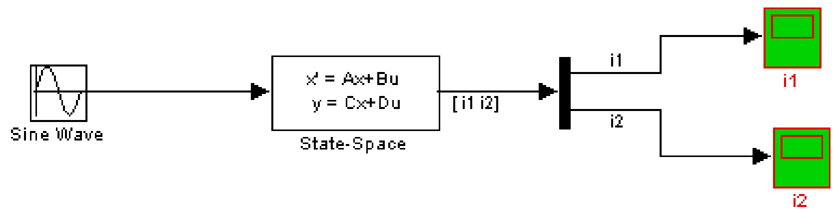


Nota. Diagrama State-Space para dos salidas en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

Necesitamos tener las corrientes separadas para luego poder calcular otras magnitudes, ahora sólo a efectos de mostrar las corrientes prescindiremos del "Demux", el diagrama de bloques es:

Figura 4.12

Diagrama de bloques State-Space para respuesta a la simulación.

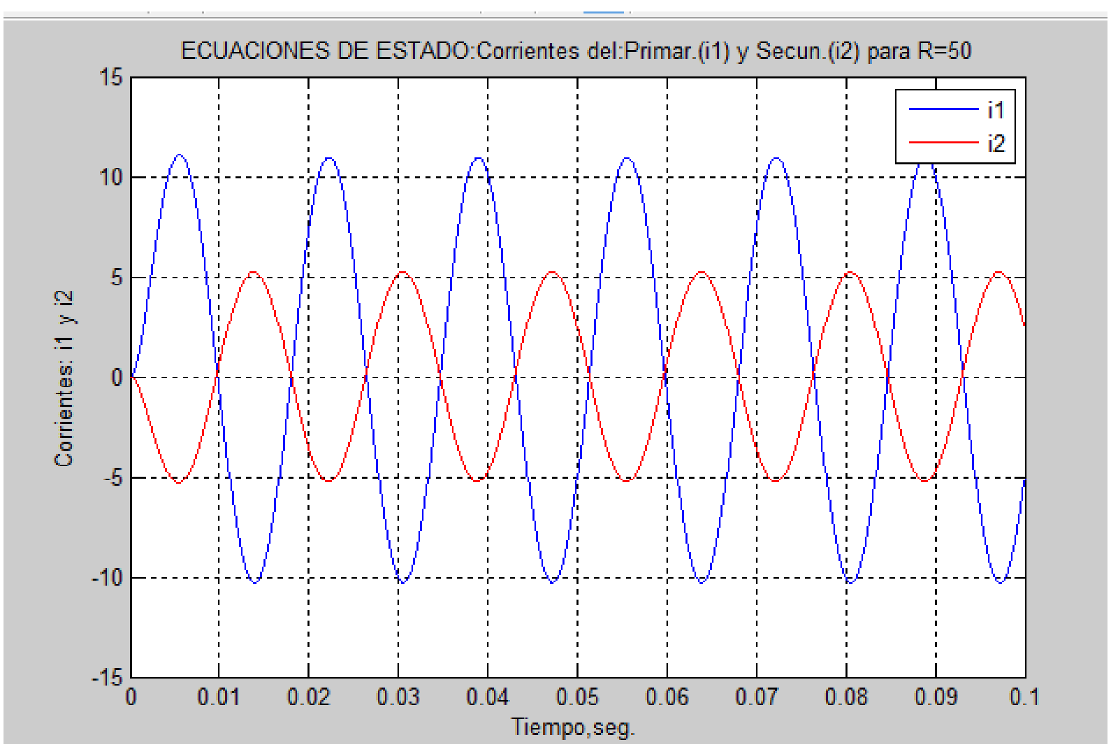


Nota. Representación del diagrama de bloques para la vista en simulación en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

Una vez corrida la simulación, como resultado obtenemos el gráfico 4.7, donde se parecía tanto la corriente del primario como del secundario del transformador:

Gráfico 4.7

Resultados de corrientes del primario y secundario del transformador monofásico por ecuaciones de estado.



Nota. La onda senoidal azul representa la corriente i_1(primario), contrariamente la roja representa la corriente 1_2 (secundario). Fuente: Elaboración propia.

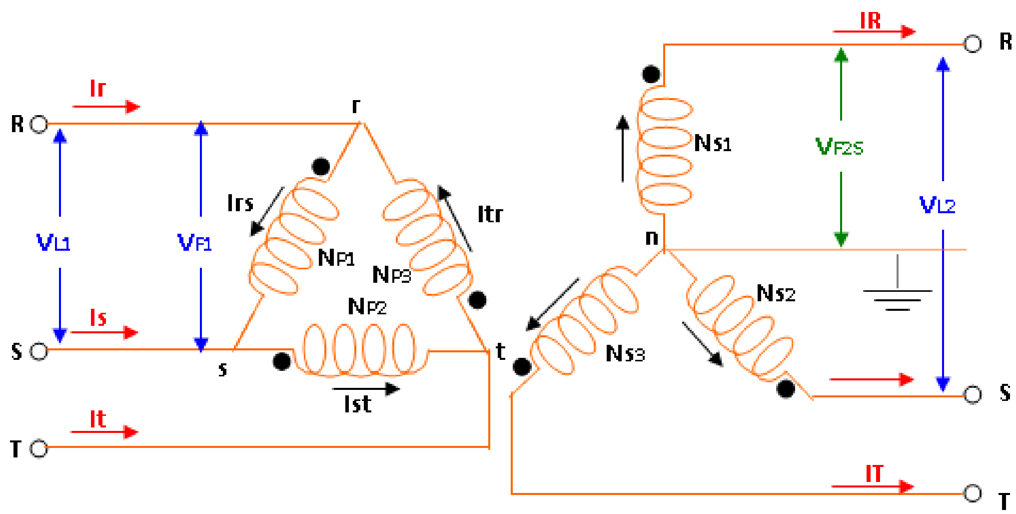
4.5. Implementación del trasformador trifásico.

4.5.1. Con carga equilibrada.

Para implementar en un banco trifásico, desarrollamos que los voltajes instantáneos de línea son:

Figura 4.13

Banco trifásico delta estrella (Δ – Y) del transformador a implementar.



Nota. Diagrama de conexión modelo para la implementación del banco trifásico con carga equilibrada. Fuente: **(Fraile, 2003)**

A. Corrientes primario y secundario para tensiones de entrada.

Donde:

$$\mathbf{V_{RS} = V_R - V_S}$$

$$\mathbf{V_{ST} = V_S - V_T} \qquad \mathbf{(4.41)}$$

$$\mathbf{V_{TR} = V_T - V_R}$$

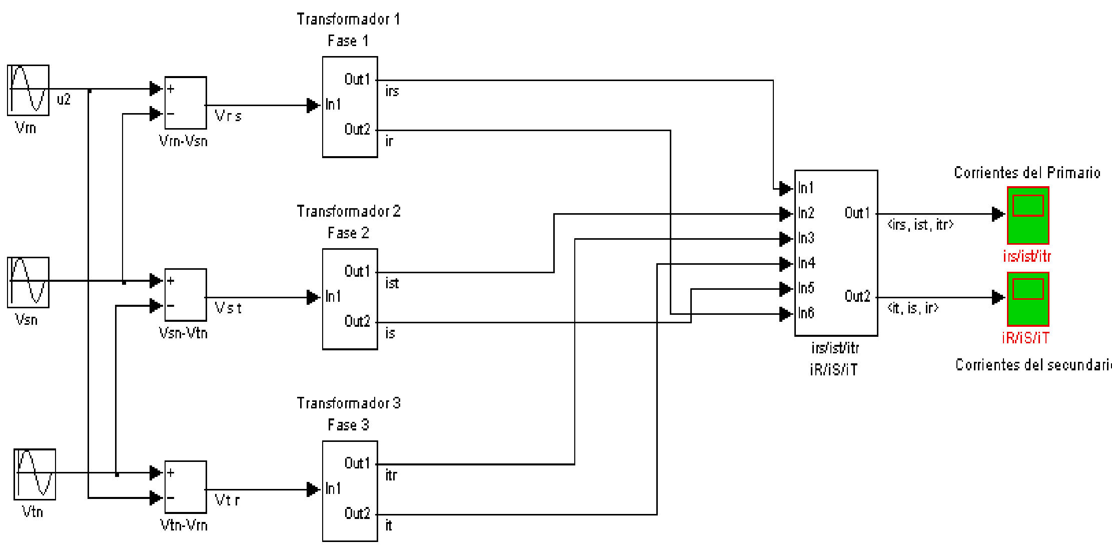
Hemos puesto que la amplitud de los voltajes de fase es de 89.91 Voltios que es el valor pico del valor eficaz 63.5 Voltios, pues la diferencia vectorial de las tensiones de fase en valor eficaz nos dará 110 Voltios que son las tensiones de línea que alimentarán a los transformadores y para la cual fueron diseñados.

El programa asume que los todos los voltajes están medidos con respecto al neutro que está a potencial cero.

Si conectamos los transformadores a la red el diagrama de bloques encapsulado nos quedará:

Figura 4.14

Implementación del transformador trifásico respuesta a la simulación.



Nota. Representación del banco trifásico en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

Si del circuito eléctrico al que representa el diagrama de bloques anterior para la conexión Δ-Y separamos las corrientes del primario y las del secundario en dos osciloscopios distintos para luego desequilibrar el banco y poder apreciar cómo se modifican las corrientes.

Ahora hacemos correr la simulación con la carga que anteriormente definimos, es decir que tendremos a los tres transformadores en equilibrio, los parámetros de simulación no se alterarán, como resultado, se tiene las corrientes que se muestra en el gráfico 4.8.

Al igual que el ítem 4.3.1. El gráfico resultante, se puede obtener de dos maneras: directamente del osciloscopio implementado en SIMULINK y mediante un código implementado en el script del MATLAB, en este caso, se implementó un código o lenguaje de programación en MATLAB que se detalla en el cuadro 4.10.

Cuadro 4.10

Lenguaje de programación en Matlab para la obtención del grafico resultante según el modelo de ecuaciones diferenciales banco trifásico.

Simbología	Descripción

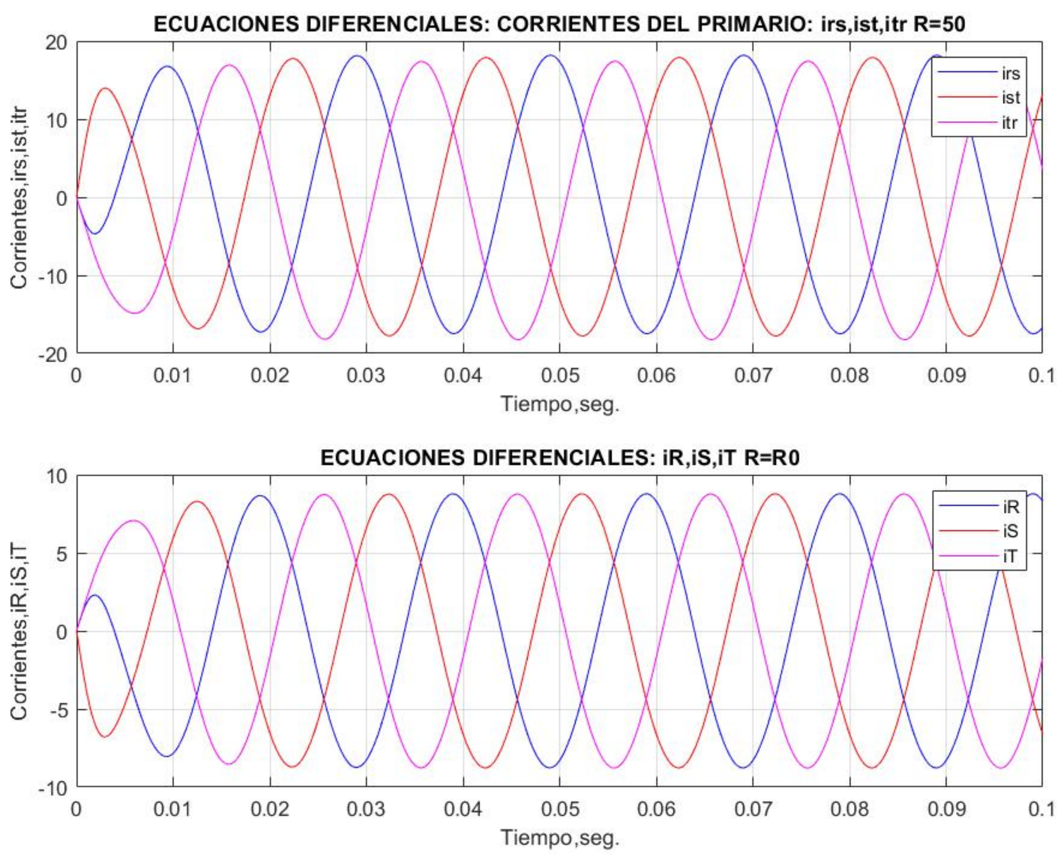
```
[t i c]=sim('JGrafico5_6.mdl');
subplot(2,1,1)
plot(t(:,1),c(:,1),'b',t(:,1),c(:,2),'r',t(:,1),i(:,3),'m');
title('ECUACIONES DIFERENCIALES: CORRIENTES DEL PRIMARIO:
irs,ist,itr R=50')
xlabel('Tiempo,seg.');
ylabel('Corrientes,irs,ist,itr');
legend('irs','ist','itr');
grid on;
subplot(2,1,2)
plot(t(:,1),c(:,4),'b',t(:,1),c(:,5),'r',t(:,1),c(:,6),'m');
title('ECUACIONES DIFERENCIALES: iR,iS,iT R=R0')
xlabel('Tiempo,seg.');
ylabel('Corrientes,iR,iS,iT');
legend('iR','iS','iT');
c(:,1);
c(:,2);
c(:,3);
c(:,4);
c(:,5);
c(:,6);
t(:,1);
grid on;
my_results=[t,c];
max_irs=max(c(:,1));
min_irs=min(c(:,1));
max_ist=max(c(:,2));
min_ist=min(c(:,2));
max_itr=max(c(:,3));
min_itr=min(c(:,3));
max_iR=max(c(:,4));
min_iR=min(c(:,4));
max_iS=max(c(:,5));
min_iS=min(c(:,5));
max_iT=max(c(:,6));
min_iT=min(c(:,6));
```

```
Resultados:
>> GGrafico5_6

max_irs =                      max_iR =

   18.1808                        8.7781

max_ist =                      max_iS =

    17.8859                       8.7731

max_itr =                      max_iT =

    17.4148                      8.7670
```

Nota: Siendo esta el código implementado en Matlab para obtener el grafico 4.8. Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4.8

Resultados de corrientes del primario y secundario del transformador trifásico para 50 Ω



Nota. La onda senoidal azul representa la corriente i_1(primario), contrariamente la roja representa la corriente 1_2 (secundario). Fuente: Elaboración propia.

Los valores resultantes son 18.1808 amperios, 17.8859 amperios y 17.4148 amperios para el primario. Mientras que; para el secundario se tiene 8.7781 amperios, 8.7731 amperios y 8.7670 amperios respectivamente. Análogamente tendremos lo mismo para los otros dos transformadores componentes del banco.

B. Corrientes de línea y corriente del neutro.

Las corrientes de línea en el primario (Conexión delta), son:

$$\begin{aligned} \mathbf{I_r} &= \mathbf{I_{rs}} - \mathbf{I_{tr}} \\ \mathbf{I_s} &= \mathbf{I_{st}} - \mathbf{I_{rs}} \\ \mathbf{I_t} &= \mathbf{I_{tr}} - \mathbf{I_{st}} \end{aligned} \qquad \textbf{(4.42)}$$

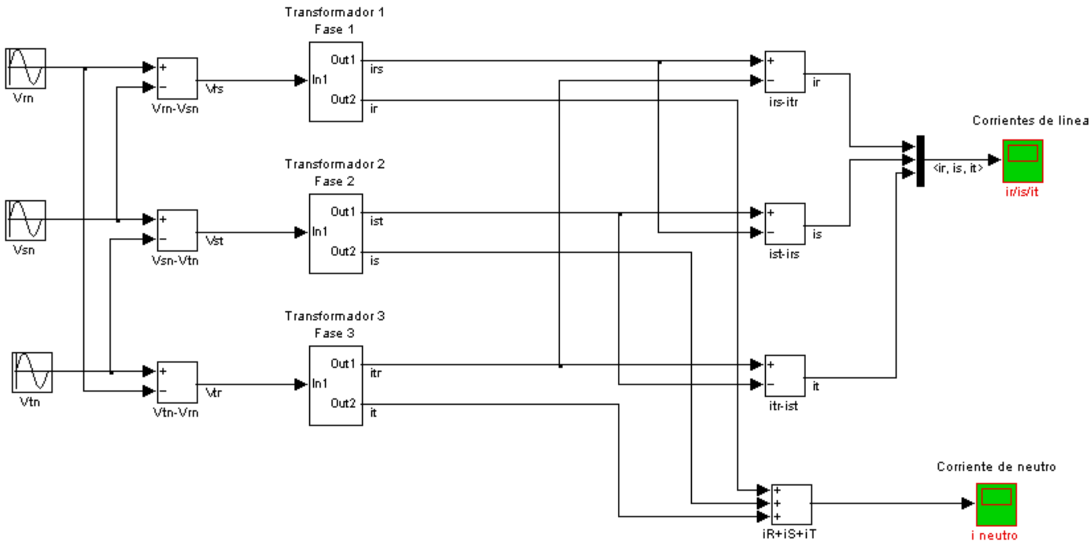
La corriente de neutro (conexión estrella), será:

$$\mathbf{I}_{\boldsymbol{n}} = \mathbf{I}_{\boldsymbol{R}} + \mathbf{I}_{\boldsymbol{S}} + \mathbf{I}_{\boldsymbol{T}} \qquad \textbf{(4.43)}$$

Simplemente se toman las salidas correspondientes a cada transformador y se las combina mediante sumadores para obtener las corrientes de línea del primario y del neutro para una resistencia de carga de 50 **Ω**; haciendo las conexiones mediante los sumadores, se tiene.

Figura 4.15

Implementación del banco 3φ Corriente línea neutro.

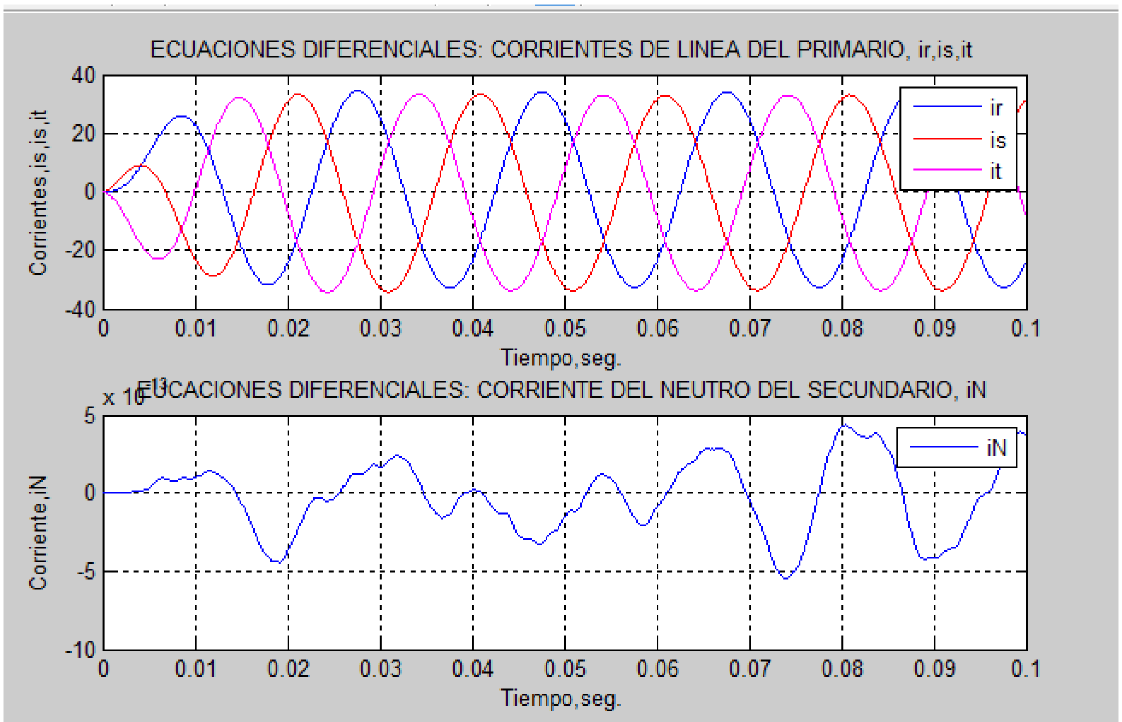


Nota. Representación del banco trifásico corriente línea neutro en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

Una vez corrida la simulación, como resultado obtenemos el gráfico 4.9, donde se parecía tanto la corriente del primario y la corriente del neutro del secundario del transformador:

Gráfico 4.9

Resultados de corrientes del primario y neutro del secundario del transformador trifásico por ecuaciones de estado.



Nota. La onda senoidal azul, Magenta y rojo del gráfico superior representa las corrientes del primario, contrariamente la azul del grafico inferior, el neutro del secundario. Fuente: Elaboración propia.

4.5.2. Con carga desbalanceada.

Las cargas correspondientes a cada fase son:

Cuadro 4.11

Valores considerados para carga desbalanceada.

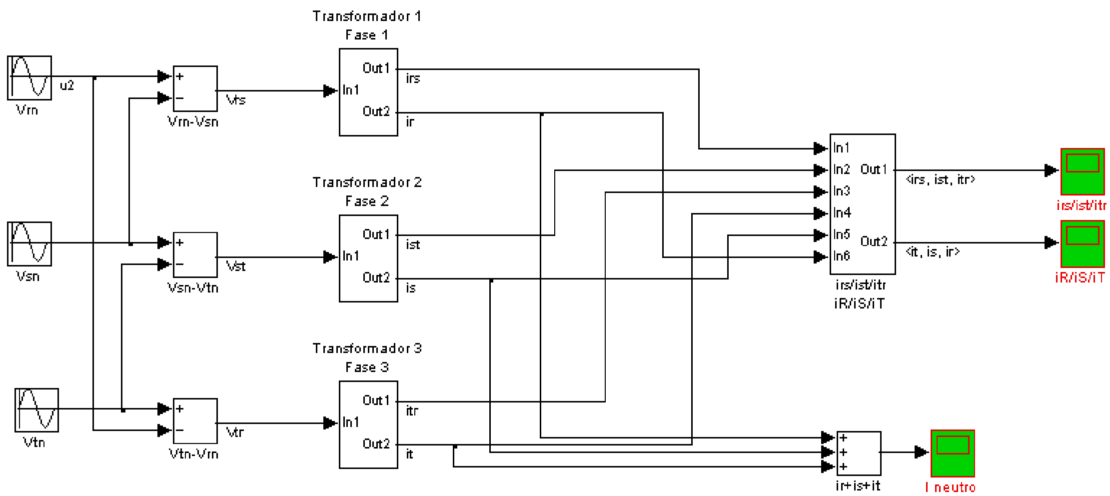
Descripción
Fase R : Rc = 50 Ω   Lc = 0.0729 H
Fase S : Rc = 60 Ω   Lc = 0.0729 H
Fase T : Rc = 70 Ω   Lc = 0.0729 H

Nota: Valores tomados al azar e implementado en Matlab. Fuente: Elaboración propia.

Es decir que solamente hemos modificado las resistencias de carga de cada fase. Hacemos correr la simulación a partir de la figura 4.16, obtenemos el grafico 4.10:

Figura 4.16

Implementación del transformador trifásico respuesta a la simulación con carga desbalanceada.



Nota. Representación del banco trifásico con la corriente del neutro en el secundario del transformador en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

Los cálculos para las matrices A, B, C, D, para los valores de R_c considerados en el cuadro 4.8, se realizan de la misma manera que en el ítem 4.4.1. Al igual que el ítem 4.3.1. El gráfico resultante, se puede obtener de dos maneras: directamente del osciloscopio implementado en SIMULINK y mediante un código implementado en el script del MATLAB, en este caso, se implementó un código o lenguaje de programación en MATLAB que se detalla en el cuadro 4.12.

Cuadro 4.12

Lenguaje de programación en Matlab para la obtención del grafico resultante según el modelo de ecuaciones diferenciales banco trifásico carga desbalanceada.

Simbología	Descripción

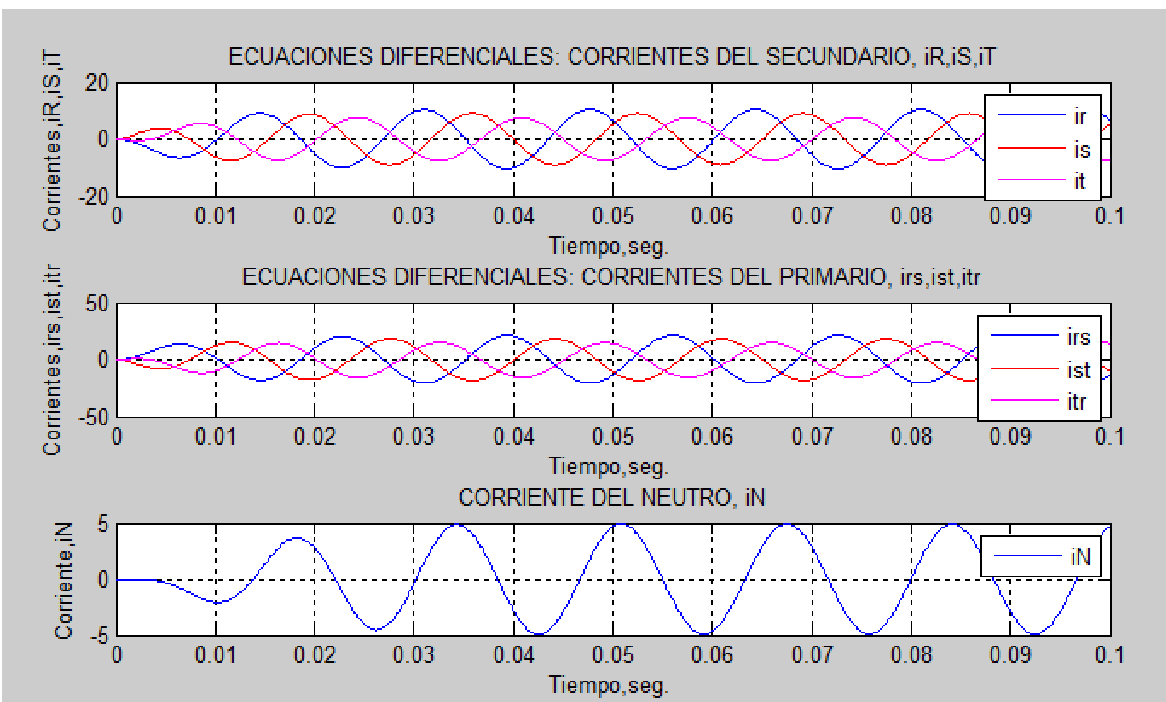
```
[t i c]=sim('NGrafico5_8.mdl');
subplot(3,1,1)
plot(t(:,1),c(:,4),'b',t(:,1),c(:,5),'r',t(:,1),i(:,6),'m');
title('ECUACIONES DIFERENCIALES: CORRIENTES DEL
SECUNDARIO:iR,iS,iT')
xlabel('Tiempo,seg.');
ylabel('Corrientes,iR,iS,iT');
legend('iR','iS','iT');
grid on;
subplot(3,1,2)
plot(t(:,1),c(:,1),'b',t(:,1),c(:,2),'r',t(:,1),c(:,3),'m');
title('ECUACIONES DIFERENCIALES: CORRIENTES DEL
PRIMARIO,irs,ist,itr')
xlabel('Tiempo,seg.');
ylabel('Corrientes,irs,ist,itr');
legend('irs','ist','itr');
subplot(3,1,3)
plot(t(:,1),c(:,7),'m');
title('ECUACIONES DIFERENCIALES: CORRIENTES DEL NEUTRO iN')
xlabel('Tiempo,seg.');
ylabel('Corrientes,iN');
legend('iN');
c(:,1);
c(:,2);
c(:,3);
c(:,4);
c(:,5);
c(:,6);
c(:,7);
t(:,1);
grid on;
my_results=[t,c];
max_irs=max(c(:,1));
min_irs=min(c(:,1));
max_ist=max(c(:,2));
min_ist=min(c(:,2));
max_itr=max(c(:,3));
min_itr=min(c(:,3));
max_iR=max(c(:,4));
min_iR=min(c(:,4));
max_iS=max(c(:,5));
min_iS=min(c(:,5));
max_iT=max(c(:,6));
min_iT=min(c(:,6));
max_iN=max(c(:,7));
min_iN=min(c(:,7));
```

```
Resultados:
>> GGrafico5_6

max_irs =                    max_iR =                max_iN =

   18.3737                      8.8741                  2.7648

max_ist =                    max_iS =

    14.5055                     7.1109

max_itr =                    max_iT =

    11.7668                    5.9618
```

Nota: Siendo esta el código implementado en Matlab para obtener el grafico 4.10. Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4.10

Resultados de corrientes del primario y secundario del transformador trifásico para la carga desbalanceada.



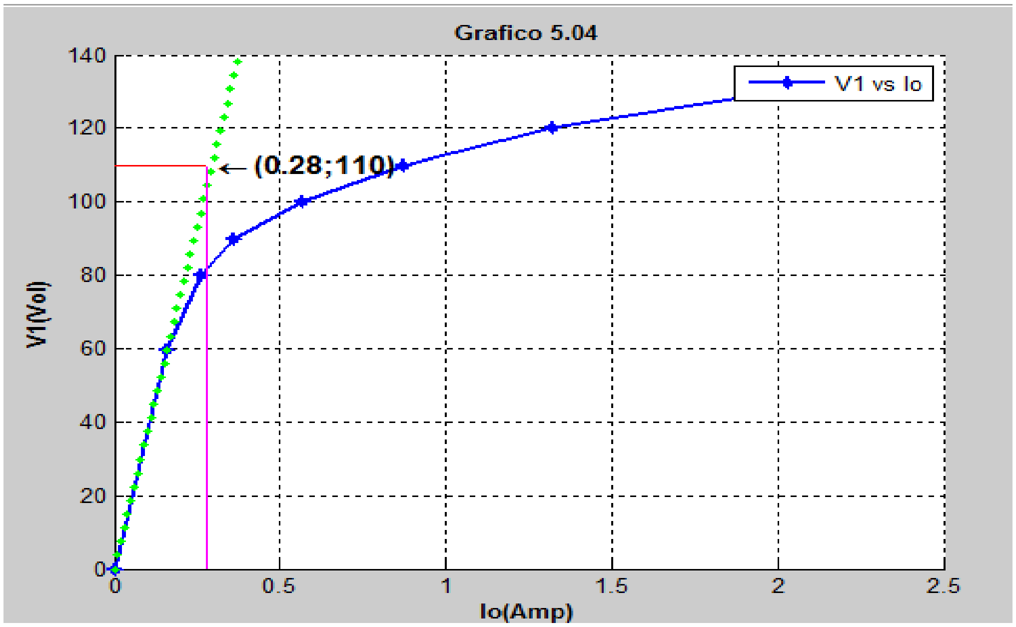
Nota. La onda senoidal superior representa las corrientes del secundario, primario y la inferior la corriente en el neutro del secundario del transformador respectivamente. Fuente: Elaboración propia.

4.5.3. Corrientes de vacío que tomaría el transformador si el material magnético fuera lineal

A partir del siguiente programa en Matlab, trazamos el gráfico 4.11:

Gráfico 4.11

Suposición de la curva característica lineal de la tensión y corriente en vacío (V_1 vs I_0).



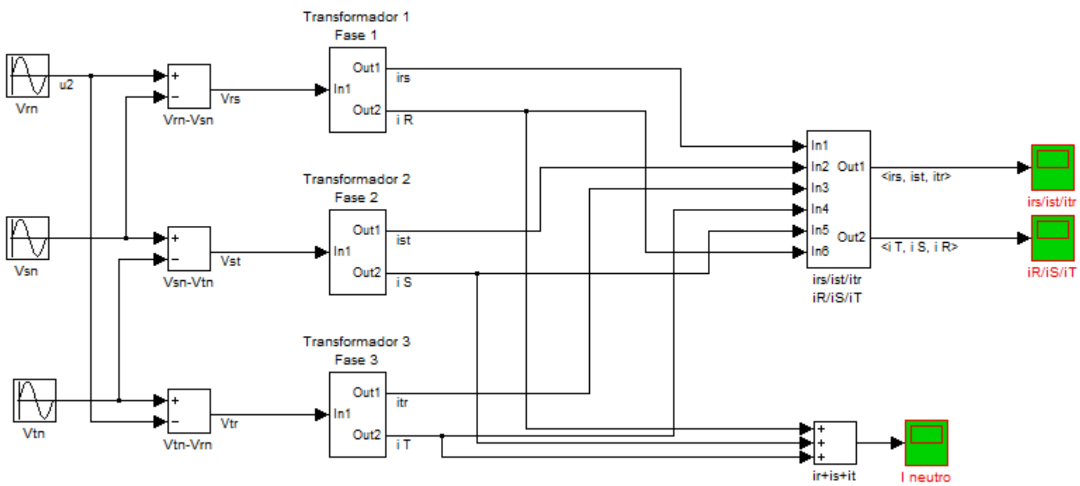
Nota. El gráfico muestra la intersección de la recta para dos puntos correspondientes a la tensión y corriente suponiendo un comportamiento lineal. Fuente: Elaboración propia.

Vemos que, con el voltaje nominal aplicado al transformador en valor eficaz, la corriente que tomaría dicho transformador tendría que ser en valor eficaz aproximadamente 0.35 Amperios.

Para realizar la simulación a circuito abierto lo que se hace es poner una resistencia de carga de 50000 Ohm. en cada transformador monofásico encapsulado, tal cual se aprecia en la figura 4.17 y haciendo correr la simulación resulta el grafico 5.12

Figura 4.17

Implementación del transformador trifásico en vacío suponiendo el material magnético lineal.



Nota. Representación del banco trifásico con la corriente del neutro en el secundario del transformador suponiendo el material magnético de comportamiento lineal en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

El gráfico resultante se obtuvo mediante un código implementado en el script del MATLAB que se detalla en el cuadro 4.13.

Cuadro 4.13

Lenguaje de programación en Matlab para la obtención del grafico resultante según el modelo de ecuaciones diferenciales banco trifásico comportamiento lineal.

Simbología	Descripción

```
[t i c]=sim('PGrafico5_10.mdl');
subplot(3,1,1)
plot(t(:,1),c(:,4),'b',t(:,1),c(:,5),'r',t(:,1),i(:,6),'m');
title('ECUACIONES DIFERENCIALES: CORRIENTES DEL
SECUNDARIO:iR,iS,iT')
xlabel('Tiempo,seg.');
ylabel('Corrientes,iR,iS,iT');
legend('iR','iS','iT');
grid on;
subplot(3,1,2)
plot(t(:,1),c(:,1),'b',t(:,1),c(:,2),'r',t(:,1),c(:,3),'m');
```

```
title('ECUACIONES DIFERENCIALES: CORRIENTES DEL
PRIMARIO,irs,ist,itr')
xlabel('Tiempo,seg.');
ylabel('Corrientes,irs,ist,itr');
legend('irs','ist','itr');
subplot(3,1,3)
plot(t(:,1),c(:,7),'m');
title('ECUACIONES DIFERENCIALES: CORRIENTES DEL NEUTRO iN')
xlabel('Tiempo,seg.');
ylabel('Corrientes,iN');
legend('iN');
c(:,1);
c(:,2);
c(:,3);
c(:,4);
c(:,5);
c(:,6);
c(:,7);
t(:,1);
grid on;
my_results=[t,c];
max_irs=max(c(:,1));
min_irs=min(c(:,1));
max_ist=max(c(:,2));
min_ist=min(c(:,2));
max_itr=max(c(:,3));
min_itr=min(c(:,3));
max_iR=max(c(:,4));
min_iR=min(c(:,4));
max_iS=max(c(:,5));
min_iS=min(c(:,5));
max_iT=max(c(:,6));
min_iT=min(c(:,6));
max_iN=max(c(:,7));
min_iN=min(c(:,7));
```

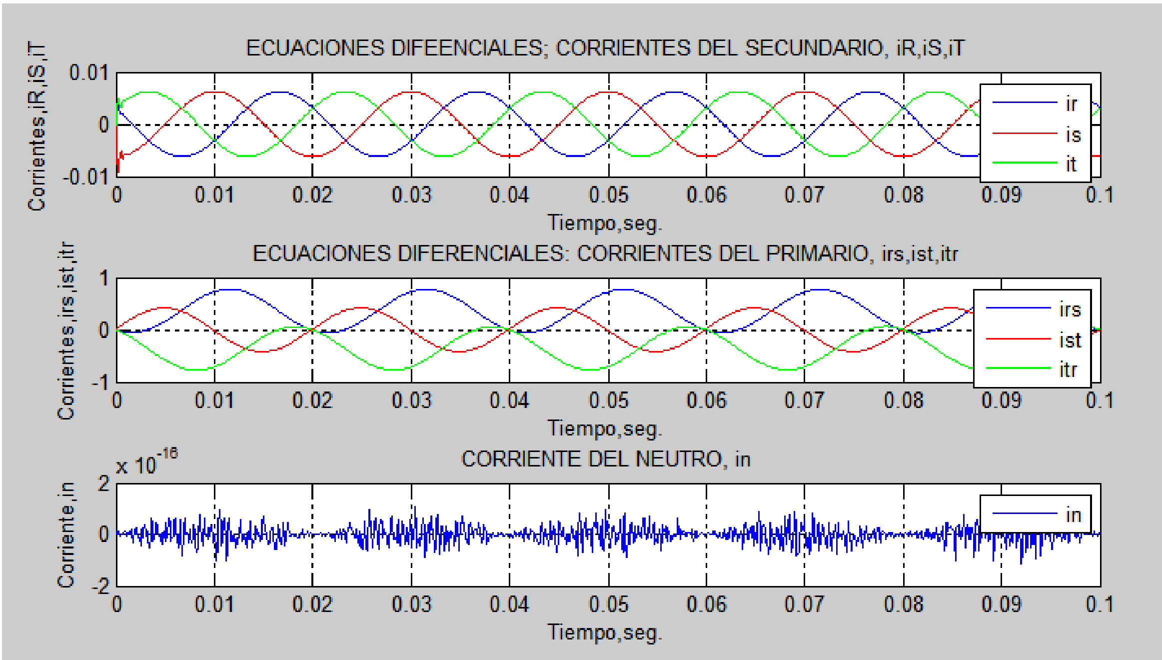
Resultados:

```
>> PGrafico5_10

max_irs =                  max_iR =               max_iN =

   0.7783                    0.0068               7.5129e-14

max_ist =                  max_iS =

    0.4187                   0.0073

max_itr =                  max_iT =

    0.0671                  0.0067
```

Nota: Siendo esta el código implementado en Matlab para obtener el grafico 4.10. Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4.12

Resultados de corrientes del primario y secundario del transformador trifásico para un comportamiento lineal.



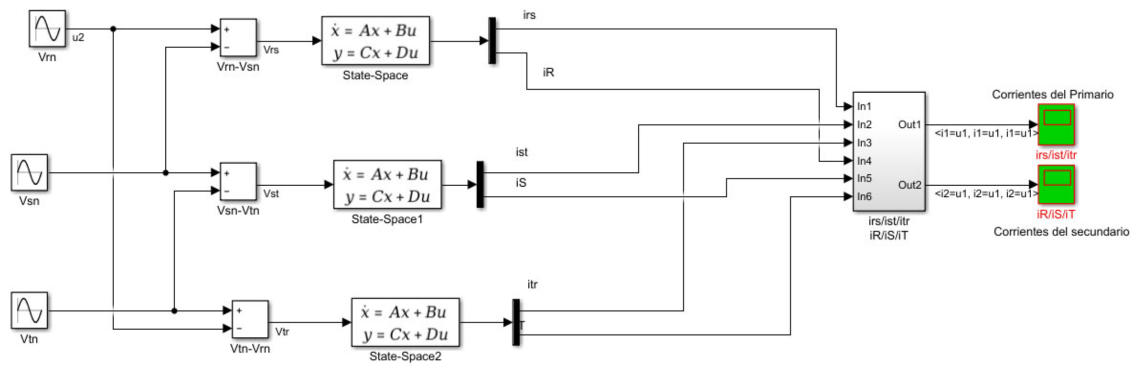
Nota. La onda senoidal superior representa las corrientes del secundario, primario y la inferior la corriente en el neutro del secundario del transformador respectivamente. Fuente: Elaboración propia.

4.5.4. Implementación del banco trifásico en el espacio de estado.

El modelo correspondiente al banco trifásico nos quedará:

Figura 4.18

Implementación del transformador trifásico en espacio d estado.



Nota. Diagrama State-Space para un banco trifásico en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

Separaremos las corrientes del primario y las del secundario en dos osciloscopios distintos para luego desequilibrar el banco y poder apreciar cómo se modifican las corrientes.

Ahora hacemos correr la simulación con la carga que anteriormente definimos, es decir que tendremos a los tres transformadores en equilibrio, los parámetros de simulación no se alterarán. El gráfico resultante se obtuvo mediante un código implementado en el script del MATLAB que se detalla en el cuadro 4.14.

Cuadro 4.14

Lenguaje de programación en Matlab para la obtención del grafico resultante según el modelo de ecuaciones diferenciales banco trifásico comportamiento lineal.

Simbología	Descripción

```
[t i c]=sim('RGrafico5_11.mdl');
subplot(2,1,1)
plot(t(:,1),c(:,1),'b',t(:,1),c(:,2),'r',t(:,1),i(:,3),'m');
title('ECUACIONES DIFERENCIALES: CORRIENTES DEL
SECUNDARIO:iR,iS,iT')
xlabel('Tiempo,seg.');
ylabel('Corrientes,iR,iS,iT');
legend('iR','iS','iT');
grid on;
subplot(2,1,2)
```

```
plot(t(:,1),c(:,4),'b',t(:,1),c(:,5),'r',t(:,1),c(:,6),'m');
title('ECUACIONES DIFERENCIALES: CORRIENTES DEL
PRIMARIO,irs,ist,itr')
xlabel('Tiempo,seg.');
ylabel('Corrientes,irs,ist,itr');
legend('irs','ist','itr');
c(:,1);
c(:,2);
c(:,3);
c(:,4);
c(:,5);
c(:,6);
t(:,1);
grid on;
my_results=[t,c];
max_irs=max(c(:,1));
min_irs=min(c(:,1));
max_ist=max(c(:,2));
min_ist=min(c(:,2));
max_itr=max(c(:,3));
min_itr=min(c(:,3));
max_iR=max(c(:,4));
min_iR=min(c(:,4));
max_iS=max(c(:,5));
min_iS=min(c(:,5));
max_iT=max(c(:,6));
min_iT=min(c(:,6));
```

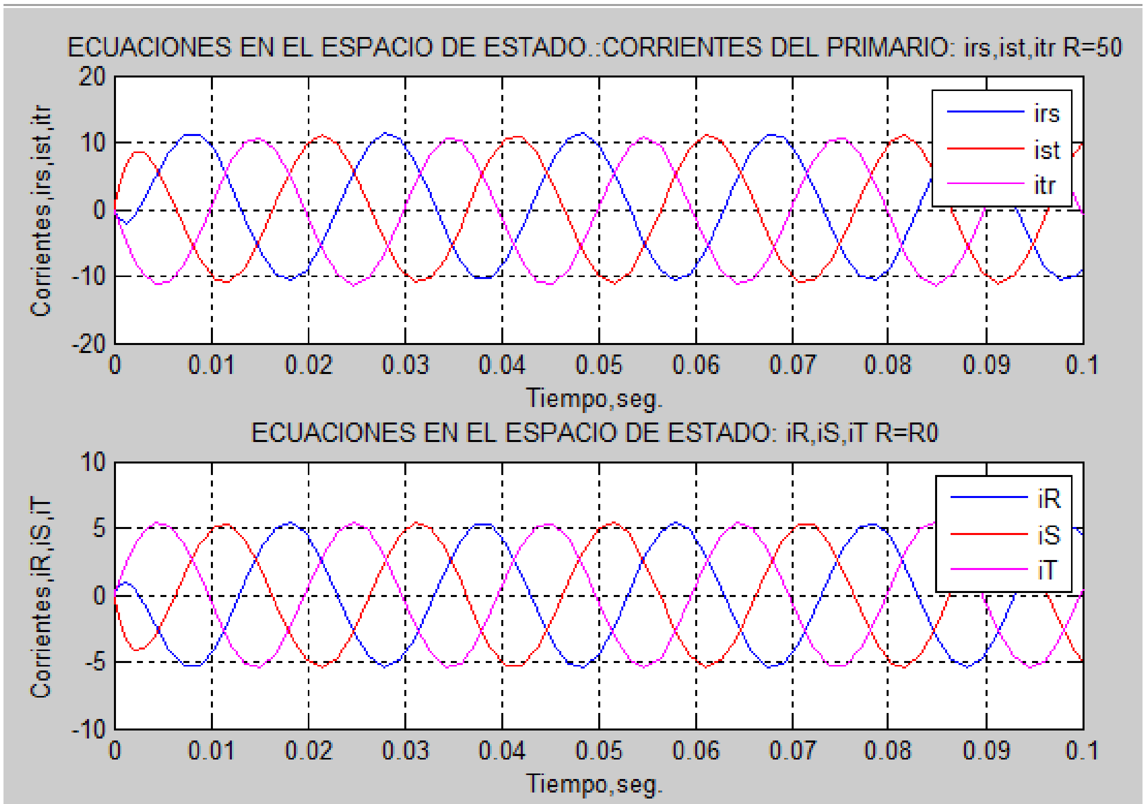
Resultados:

```
>> PGrafico5_10

max_irs =                    max_iR =

   11.4332                      5.4381

max_ist =                    max_iS =

    11.0632                     5.4332

max_itr =                    max_iT =

    10.7304                    5.4284
```

Nota: Siendo esta el código implementado en Matlab para obtener el grafico 4.13. Fuente: Elaboración propia.

Gráfico 4.13

Resultados de corrientes del primario y secundario del transformador trifásico para un comportamiento lineal.



Nota. La onda senoidal superior representa las corrientes del secundario. Mientras que; la inferior representa al secundario del transformador implementado en State-Space en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

4.5.5. Determinando las potencias.

A. Potencia activa instantánea.

Para determinar la potencia instantánea, se implementa con un bloque “Fcn” en donde “u[1] ^2” es la corriente del secundario de la fase R elevada al cuadrado , al salir del bloque mencionado ingresa a un bloque de ganancia que representa la resistencia de carga ,lo que sale al final es la potencia activa instantánea .

B. Potencia aparente instantánea.

Simplemente se implementa con un bloque “Inner Product” en donde se multiplica la tensión en bornes de la carga por la corriente que la misma que absorbe.

C. Potencia reactiva instantánea.

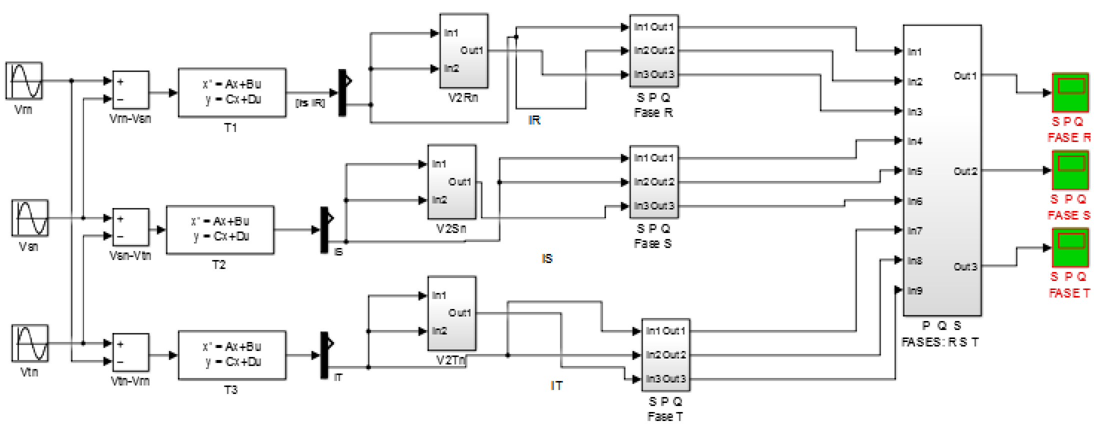
La potencia reactiva instantánea se obtiene como la diferencia de los valores instantáneos de la potencia aparente y la potencia activa

Ajustamos el “Stop time” de la simulación a 0.1 segundos y obtenemos las gráficas de las tensiones en bornes de todos los transformadores y las potencias correspondientes al transformador correspondiente de la fase “R”, para mayor claridad del gráfico, las restantes potencias que consume cada transformador tienen idéntico valor por estar la carga equilibrada.

El diagrama de bloques del modelo se muestra en la figura 4.19.

Figura 4.19

Implementación del diagrama de bloques del modelo para el modelo de espacio de estado.

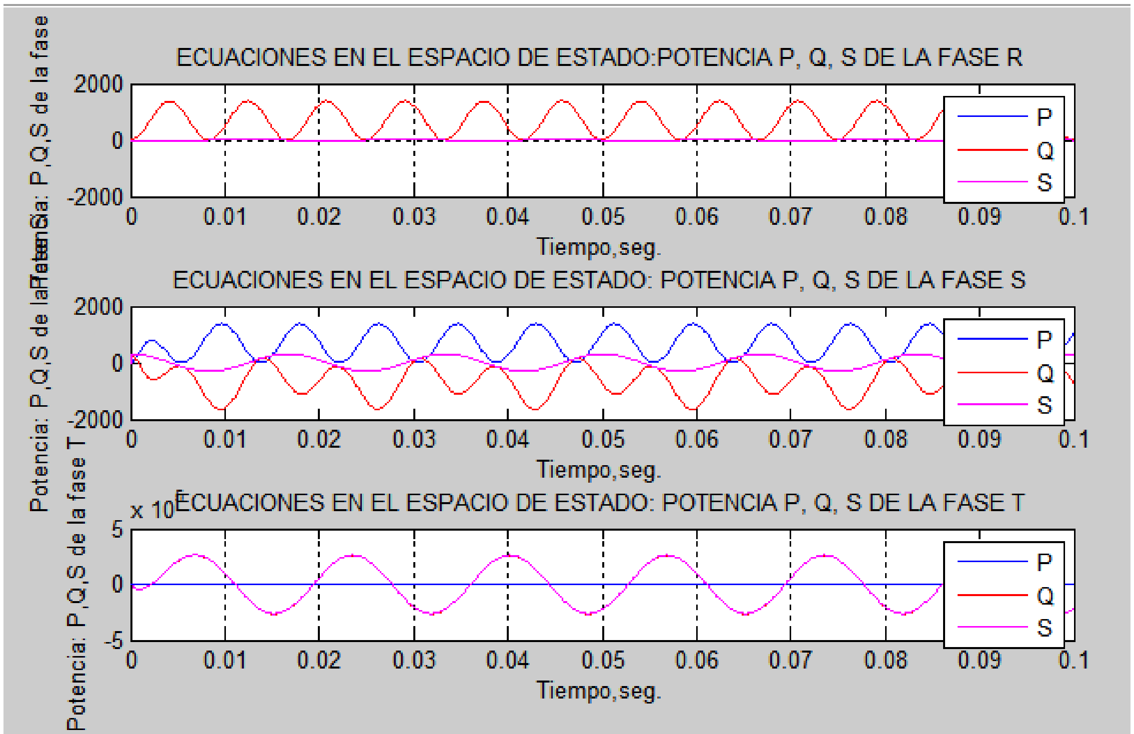


Nota. Diagrama State-Space para determinar las potencias de un banco trifásico en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

El gráfico resultante se obtuvo mediante un código implementado en el script del MATLAB similar al cuadro 4.14 y se detalla en el grafico 4.14.

Gráfico 4.14

Resultados de las Potencias: Aparente, Activa y Reactiva de las fases: R, S y T



Nota. Estos resultados se obtuvieron previa simulación del diagrama de bloques anteriormente implementado en SIMULINK. Fuente: Elaboración propia.

CAPÍTULO V

5. RESULTADOS OBTENIDOS.

En el presente capitulo observaremos los resultados obtenidos de las corrientes del primario y del secundario del banco trifásico en conexión Triángulo-Estrella utilizando para ello el modelo del Banco Trifásico realizado en los siguientes modelos:

A. Ecuaciones diferenciales y

B. Espacio de Estado.

5.1. Simulaciones para cargas conectadas al Banco Trifásico.

Considerando los siguientes valores:

Cuadro 5.1

Valores considerados para la resistencia de carga Rc.

Casos		Valores considerados
CASO 01	:	Rc = 0 Ohms (corto circuito)
CASO 02	:	Rc = 50 Ohms (valor nominal)
CASO 03	:	Rc = 110 Ohms (media carga)
CASO 04	:	Rc = 50000 Ohms (circuito abierto)

Nota: Valores tomados al azar e implementado en Matlab. Fuente: Elaboración propia.

Los gráficos que veremos a continuación muestran las corrientes obtenidas por ambos modelos (A y B).

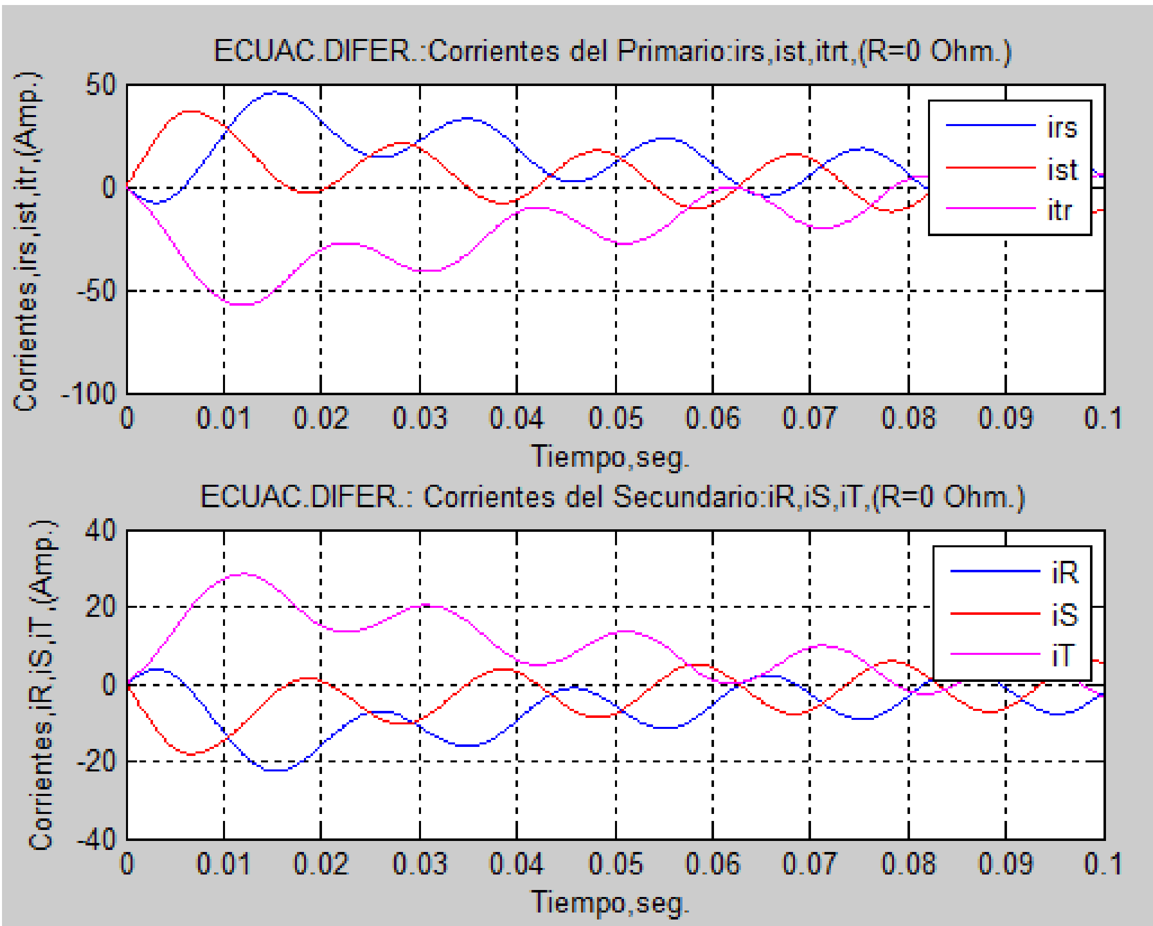
5.1.1. Caso 01: Resistencia de 0 ohmios.

A. Implementación en ecuaciones diferenciales.

1. Resultado del grafico simulado.

Gráfico 5.1

Implementación del Banco Trifásico con carga equilibrada en Ecuaciones Diferenciales caso 01.



Nota. Resultados obtenidos previa implementación del diagrama de bloques en SIMULINK y el código script. Elaboración propia.

2. Resultado de los valores de las corrientes primario y secundario.

Cuadro 5.2

Corrientes del primario y secundario en Ec. Dif. corto circuito, caso 01.

Resultados obtenidos					
i_{rs}	i_{st}	i_{tr}	i_R	i_S	i_T
26.9346	24.623	32.0829	13.3046	12.13895	15.81975

Nota: Valores obtenidos previa implementación del código en el script y detallados en el command window MATLAB. Fuente: Elaboración propia.

3. Comentarios de los resultados.

Se observa que es notorio el fenómeno del transitorio en las corrientes del primario y secundario, a partir de cierto tiempo obtienen el estado permanente.

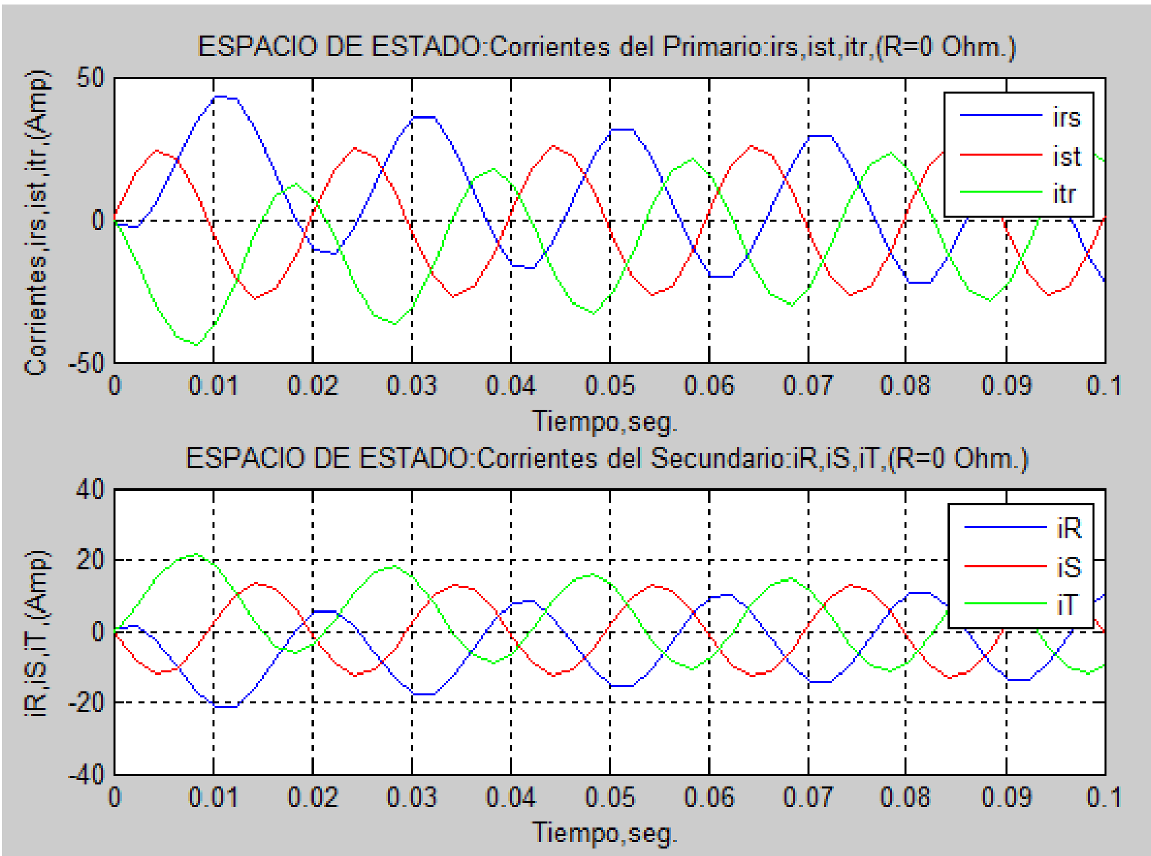
- Los valores máximos en el primario y secundario son: 26.9346 y 13.3046 amperios respectivamente, en las fases i_{rs} e i_R.
- La corriente i_{rs} es opuesto a la corriente i_R y los otros también.

B. Implementación en espacio de estado.

1. Resultado del grafico simulado.

Gráfico 5.2

Implementación del Banco Trifásico con carga equilibrada en espacio de estado caso 01.



Nota. Resultados obtenidos previa implementación del diagrama de bloques en SIMULINK y el código script. Elaboración propia.

2. **Resultado de los valores de las corrientes primario y secundario.**

Cuadro 5.3

Corrientes del primario y secundario en espacio de estado corto circuito, caso 01.

Resultados obtenidos					
$\mathbf{i_{rs}}$	$\mathbf{i_{st}}$	$\mathbf{i_{tr}}$	$\mathbf{i_{R}}$	$\mathbf{i_{S}}$	$\mathbf{i_{T}}$
34.3079	26.9613	33.76985	16.90695	13.274	16.63855

Nota: Valores obtenidos previa implementación del código en el script y detallados en el command window MATLAB. Fuente: Elaboración propia.

3. **Comentarios de los resultados.**

- Se observa que también es notorio el transitorio en las corrientes del primario y secundario, como en Transformada de Laplace, a partir de cierto tiempo obtienen el estado permanente, pero es menos notorio el fenómeno transitorio.
- Los valores máximos en el primario y secundario son: 34.3079 y 16.90695 amperios respectivamente, existiendo mínima diferencia, con el modelo anterior, en las fases irs e i_R.
- La corriente i_{rs} es opuesto a la corriente i_R y los otros también.

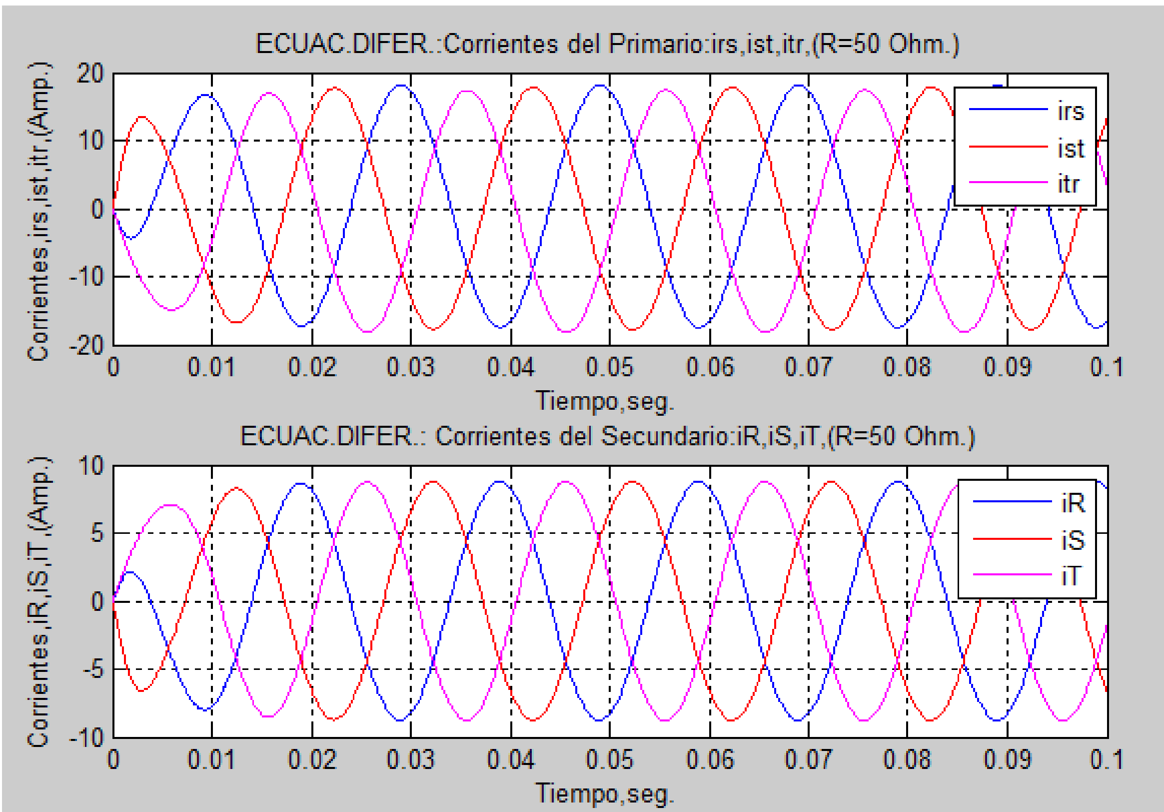
5.1.2. Caso 02: Resistencia de 50 ohmios.

A. Implementación en ecuaciones diferenciales.

1. Resultado del grafico simulado.

Gráfico 5.3

Implementación del Banco Trifásico con carga equilibrada en Ecuaciones Diferenciales caso 02.



Nota. Resultados obtenidos previa implementación del diagrama de bloques en SIMULINK y el código script. Elaboración propia.

2. **Resultado de los valores de las corrientes primario y secundario.**

Cuadro 5.4

Corrientes del primario y secundario en ecuaciones diferenciales, caso 02.

Resultados obtenidos					
i_{rs}	i_{st}	i_{tr}	i_R	i_S	i_T
17.82915	17.8262	17.8261	8.7734	8.7723	8.7729

Nota: Valores obtenidos previa implementación del código en el script y detallados en el command window MATLAB. Fuente: Elaboración propia.

3. **Comentarios de los resultados.**

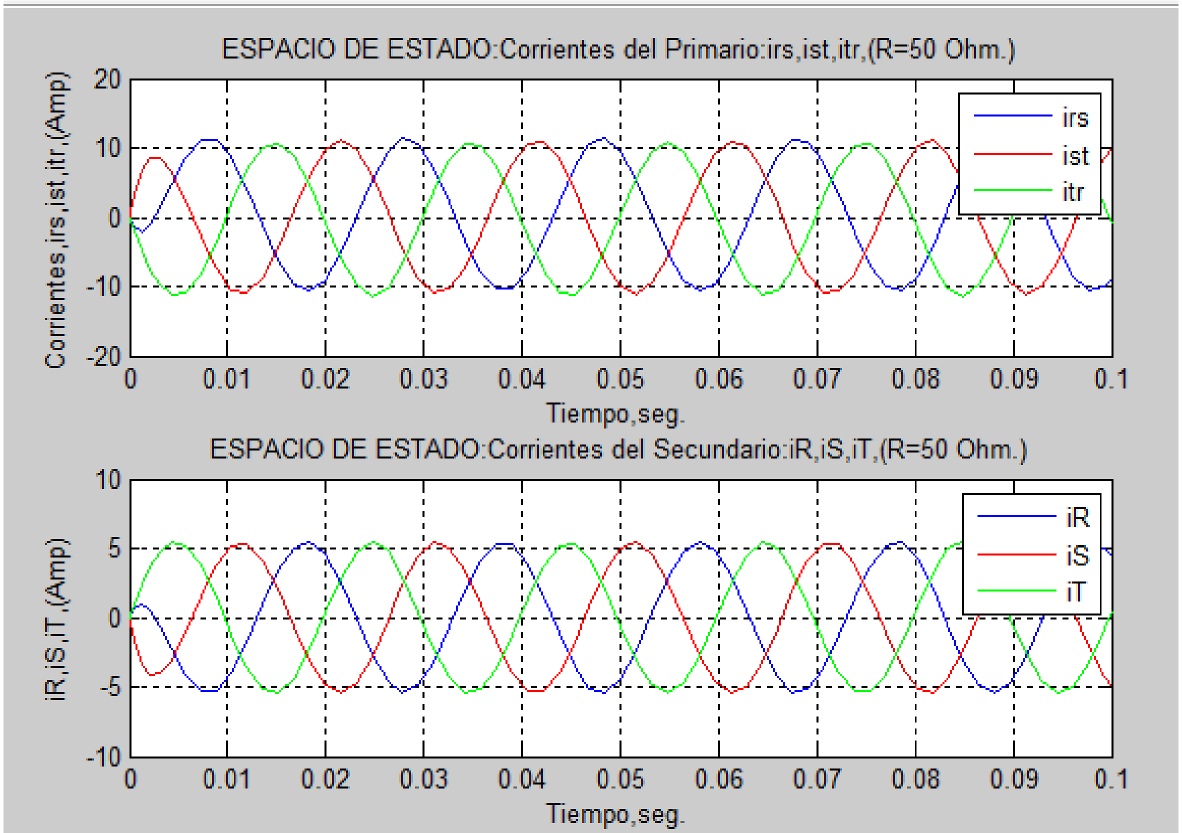
- Se observa que ya no existe el fenómeno del transitorio en las corrientes del primario y secundario, a partir de cierto tiempo obtienen el estado permanente.
- Los valores máximos en el primario y secundario son: 17.82915 y 8.7734 amperios respectivamente, en las fases irs e i_R.
- La corriente irs es opuesto a la corriente i_R y los otros también.

B. Implementación en espacio de estado.

1. Resultado del grafico simulado.

Gráfico 5.4

Implementación del Banco Trifásico con carga equilibrada en espacio de estado caso 02.



Nota. Resultados obtenidos previa implementación del diagrama de bloques en SIMULINK y el código script. Elaboración propia.

2. **Resultado de los valores de las corrientes primario y secundario.**

Cuadro 5.5

Corrientes del primario y secundario en espacio de estado en transformada de Laplace, caso 02.

Resultados obtenidos					
i_{rs}	i_{st}	i_{tr}	i_R	i_S	i_T
11.07685	11.0753	10.5776	5.4484	5.44915	5.45745

Nota: Valores obtenidos previa implementación del código en el script y detallados en el command window MATLAB. Fuente: Elaboración propia.

3. **Comentarios de los resultados.**

- Se observa que ya no existe el fenómeno del transitorio en las corrientes del primario y secundario, a partir de cierto tiempo obtienen el estado permanente.
- Los valores máximos en el primario y secundario son: 11.0768 y 5.4484 amperios respectivamente, en las fases i_{rs} e i_R.
- La corriente i_{rs} es opuesto a la corriente i_R y los otros también.

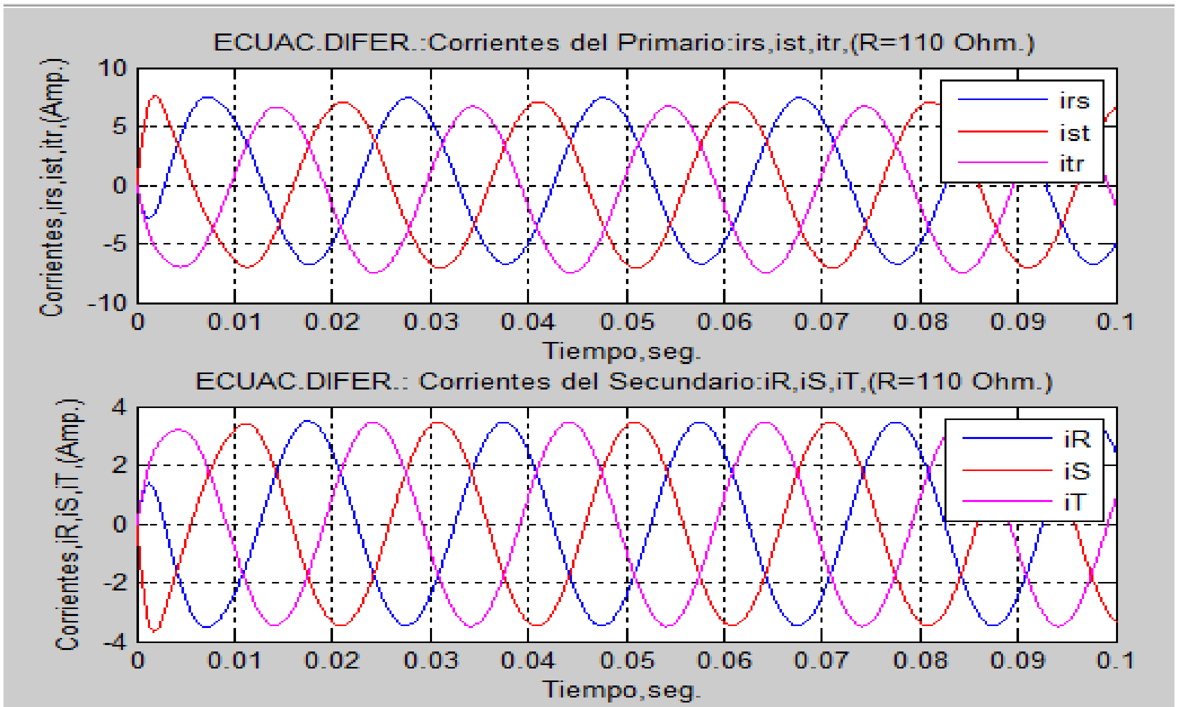
5.1.3. Caso 03: Resistencia de 110 ohmios.

A. Implementación en ecuaciones diferenciales.

1. Resultado del grafico simulado.

Gráfico 5.5

Implementación del Banco Trifásico con carga equilibrada en Ecuaciones Diferenciales caso 03.



Nota. Resultados obtenidos previa implementación del diagrama de bloques en SIMULINK y el código script. Elaboración propia.

2. **Resultado de los valores de las corrientes primario y secundario.**

Cuadro 5.6

Corrientes del primario y secundario en ecuaciones diferenciales, caso 03.

Resultados obtenidos					
$\mathbf{i_{rs}}$	$\mathbf{i_{st}}$	$\mathbf{i_{tr}}$	$\mathbf{i_R}$	$\mathbf{i_S}$	$\mathbf{i_T}$
7.12035	7.34165	7.08665	3.51075	3.57455	3.48015

Nota: Valores obtenidos previa implementación del código en el script y detallados en el command window MATLAB. Fuente: Elaboración propia.

3. **Comentarios de los resultados.**

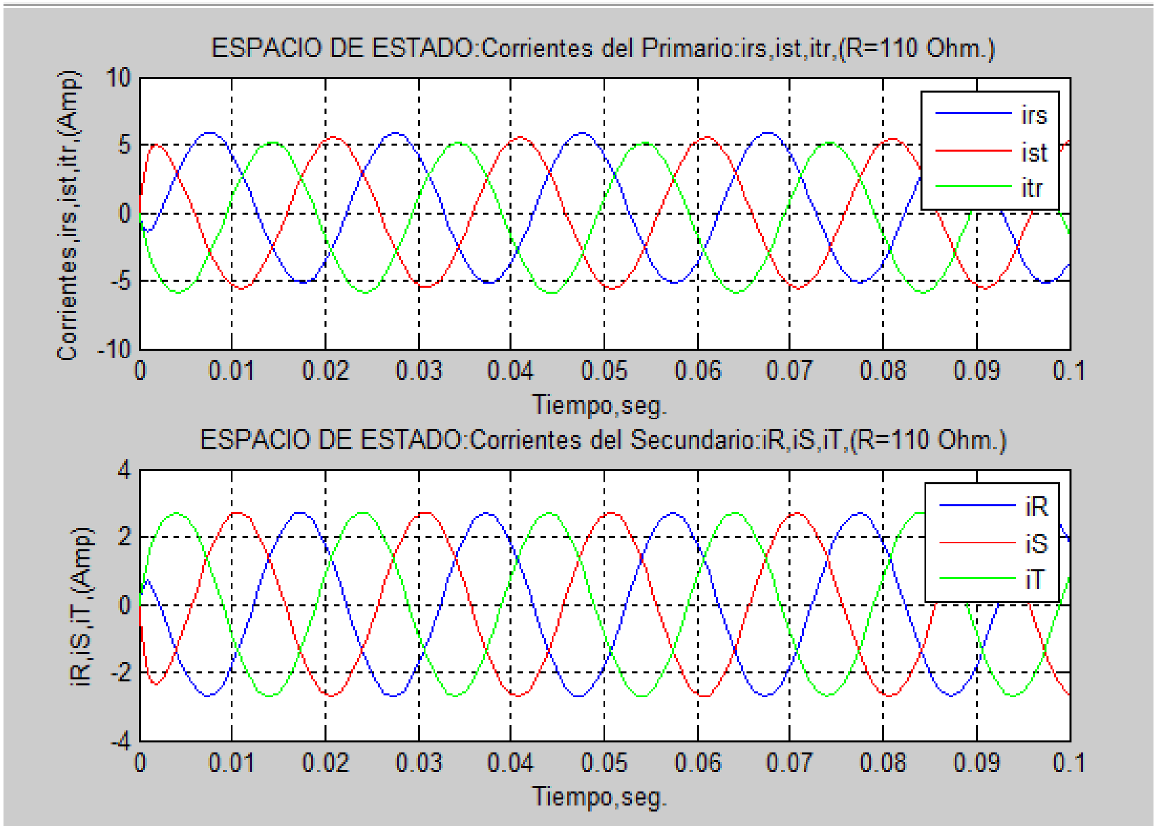
- Se observa que ya no existe el fenómeno del transitorio y el desfasaje es normal.
- Los valores máximos en el primario y secundario son: 7.120 y 3.510 amperios respectivamente, en las fases i_{rs} e i_R.
- La corriente i_{rs} es opuesto a la corriente i_R y los otros también.

B. Implementación en espacio de estado.

1. Resultado del grafico simulado.

Gráfico 5.6

Implementación del Banco Trifásico con carga equilibrada en espacio de estado caso 03.



Nota. Resultados obtenidos previa implementación del diagrama de bloques en SIMULINK y el código script. Elaboración propia.

2. Resultado de los valores de las corrientes primario y secundario.

Cuadro 5.7

Corrientes del primario y secundario en espacio de estado en transformada de Laplace, caso 03.

Resultados obtenidos					
i_{rs}	i_{st}	i_{tr}	i_R	i_S	i_T
5.54495	5.54185	5.54595	2.72095	2.7208	2.7208

Nota: Valores obtenidos previa implementación del código en el script y detallados en el command window MATLAB. Fuente: Elaboración propia.

3. Comentarios de los resultados.

- Se observa que ya no existe el fenómeno del transitorio y el desfasaje es normal.
- Los valores máximos en el primario y secundario son: 5.54495 y 2.72095 amperios respectivamente, en las fases i_{rs} e i_R.
- La corriente i_{rs} es opuesto a la corriente i_R y los otros también.

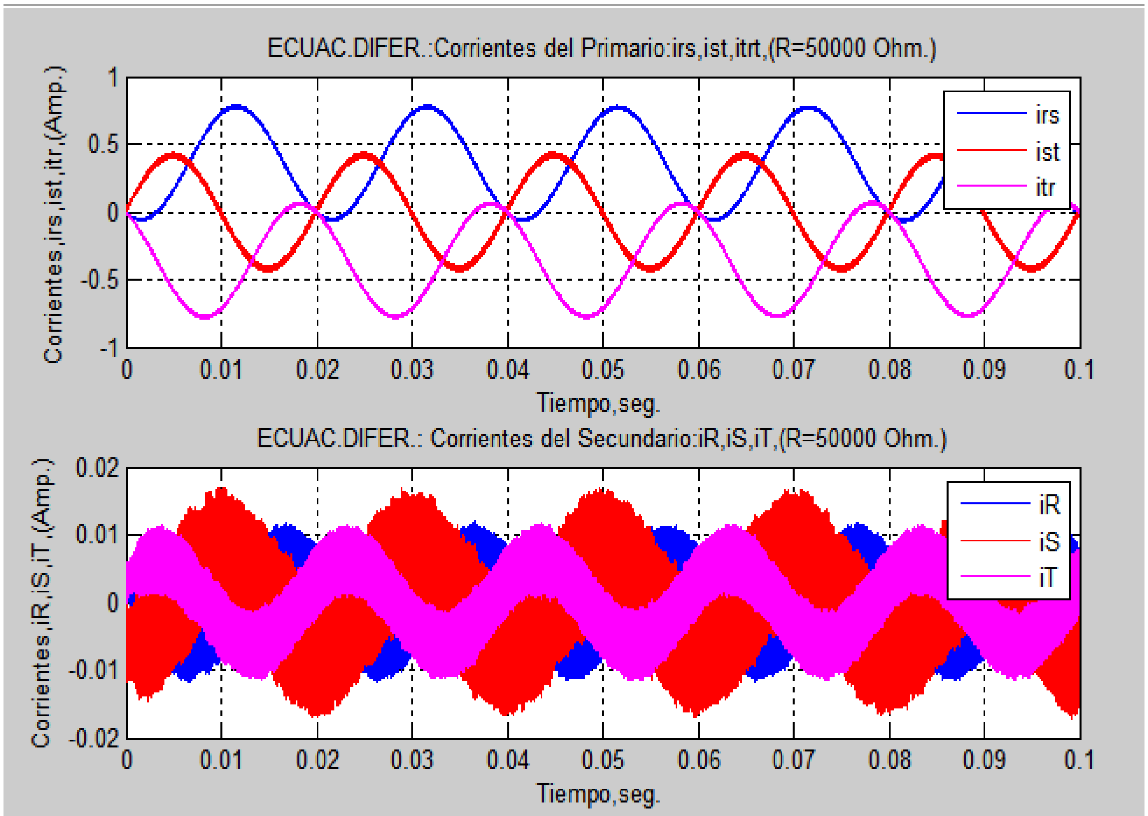
5.1.4. Caso 04: Resistencia de 50000 ohmios.

A. Implementación en ecuaciones diferenciales.

1. Resultado del grafico simulado.

Gráfico 5.7

Implementación del Banco Trifásico con carga equilibrada en Ecuaciones Diferenciales caso 04.



Nota. Resultados obtenidos previa implementación del diagrama de bloques en SIMULINK y el código script. Elaboración propia.

2. **Resultado de los valores de las corrientes primario y secundario.**

Cuadro 5.8

Corrientes del primario y secundario en ecuaciones diferenciales, caso 04.

Resultados obtenidos					
$\mathbf{i_{rs}}$	$\mathbf{i_{st}}$	$\mathbf{i_{tr}}$	$\mathbf{i_R}$	$\mathbf{i_S}$	$\mathbf{i_T}$
0.453	0.45705	0.4514	0.06775	0.08485	0.06735

Nota: Valores obtenidos previa implementación del código en el script y detallados en el command window MATLAB. Fuente: Elaboración propia.

3. **Comentarios de los resultados.**

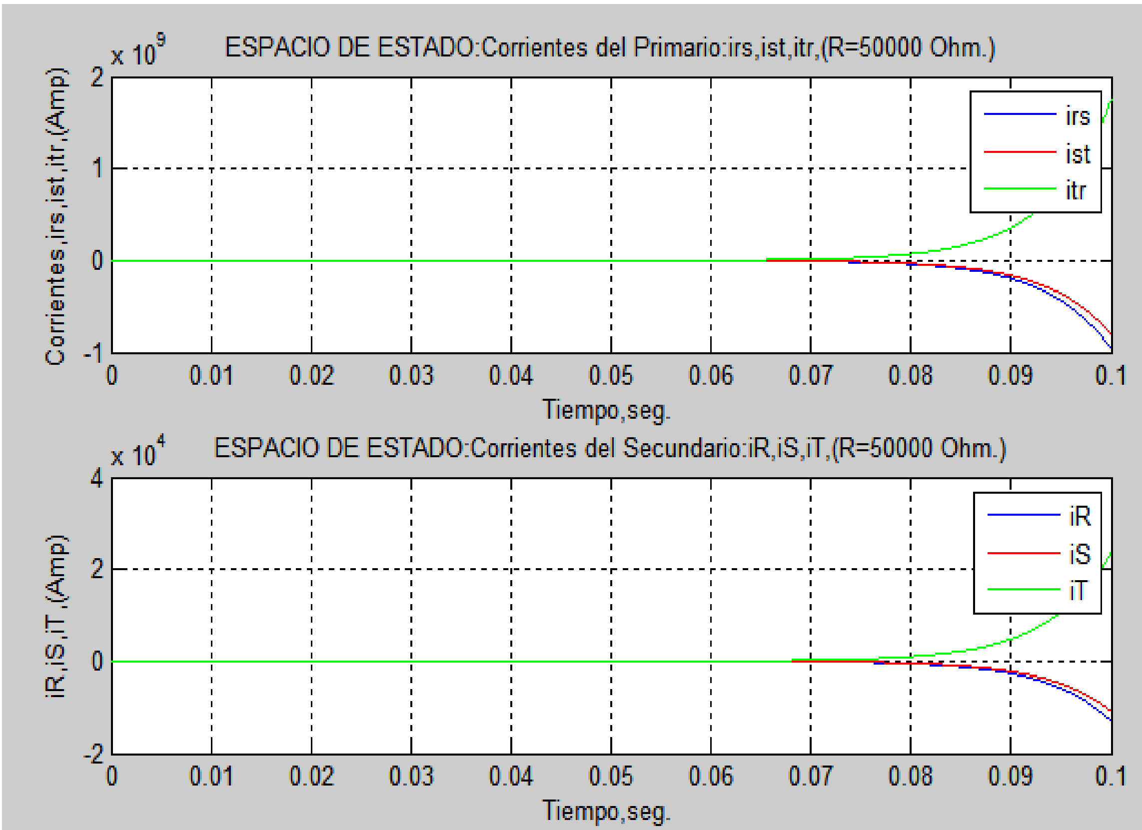
- En el primario las ondas se han desfasado y en el secundario mantienes el desfasaje, pero las ondas sufren distorsión.
- Los valores máximos en el primario y secundario son: 0.453 y 0.067 amperios respectivamente.
- La corriente i_{rs} es opuesto a la corriente i_R y los otros también.

B. Implementación en espacio de estado.

1. Resultado del grafico simulado.

Gráfico 5.8

Implementación del Banco Trifásico con carga equilibrada en espacio de estado caso 04.



Nota. Resultados obtenidos previa implementación del diagrama de bloques en SIMULINK y el código script. Elaboración propia.

2. Resultado de los valores de las corrientes primario y secundario.

Cuadro 5.9

Corrientes del primario y secundario en espacio de estado en transformada de Laplace, caso 04.

Resultados obtenidos					
i_{rs}	i_{st}	i_{tr}	i_R	i_S	i_T
0.4401	0.43555	0.4391	0.06225	0.0622	0.06225

Nota: Valores obtenidos previa implementación del código en el script y detallados en el command window MATLAB. Fuente: Elaboración propia.

3. Comentarios de los resultados.

- En el primario las ondas se han desfasado y en el secundario mantienen el desfasaje, pero las ondas no sufren distorsión.
- Los valores máximos en el primario y secundario son: 0.440 y 0.062 amperios respectivamente.
- La corriente i_{rs} es opuesto a la corriente i_R y los otros también.

5.1.5. Comparación de resultados.

Finalmente, en el cuadro 5.10 se detallan los resultados comparativos de implementar el modelo en ecuaciones diferenciales y espacio de estado como bloques en Simulink y el lenguaje de programación en el Script del Matlab para el transformador trifásico en su conexión delta – estrella.

Cuadro 5.10

Resultados comparativos de la simulación para la resistencia de carga Rc en el secundario del transformador trifásico.

CASO 1, Donde Rc = 0.0 Ohms							
Simulación por	Corrientes en el primario (A)			Corrientes en el secundario (A)			Observación
	irs	ist	itr	iR	iS	iT	
Ecuaciones diferenciales	26.93	24.62	32.08	13.3	12.14	15.82	Existe Transitorios en las corrientes del primario y secundario
Ecuaciones de espacio de estado	34.31	26.96	33.77	16.91	13.27	16.64	

CASO 1, Donde Rc = 50 Ohms							
Simulación por	Corrientes en el primario (A)			Corrientes en el secundario (A)			Observación
	irs	ist	itr	iR	iS	iT	
Ecuaciones diferenciales	17.83	17.83	17.83	8.773	8.772	8.773	No existe Transitorios en las corrientes del primario y secundario
Ecuaciones de espacio de estado	11.08	11.08	10.58	5.448	5.449	5.457	

CASO 1, Donde Rc = 110 Ohms							
Simulación por	Corrientes en el primario (A)			Corrientes en el secundario (A)			Observación
	irs	ist	itr	iR	iS	iT	
Ecuaciones diferenciales	7.12	7.342	7.087	3.511	3.575	3.48	No existe Transitorios en las corrientes del primario y secundario
Ecuaciones de espacio de estado	5.545	5.542	5.546	2.721	2.721	2.721	

CASO 1, Donde Rc = 50000 Ohms							
Simulación por	Corrientes en el primario (A)			Corrientes en el secundario (A)			Observación
	irs	ist	itr	iR	iS	iT	
Ecuaciones diferenciales	0.453	0.457	0.451	0.068	0.085	0.067	Existe desfase de ondas en el primario mas no en el secundario, las ondas sufren distorsión
Ecuaciones de espacio de estado	0.44	0.436	0.439	0.062	0.062	0.062	Existe desfase de ondas en el primario mas no en el secundario, las ondas no sufren distorsión

Nota: Valores obtenidos previa implementación de los diagramas de bloques en Simulink y el código de programación en el script. Fuente: Elaboración propia.

CONCLUSIONES

1. Se ha demostrado que: Proponiendo el modelo matemático en el espacio de estados para evaluar el comportamiento del transformador trifásico de distribución en su conexión delta - estrella a partir del circuito monofásico equivalente mediante simulación en Matlab. Se Compre e interpreta de manera interactiva los resultados de los diferentes parámetros eléctricos del transformador.

2. A partir de las ecuaciones diferenciales descritas en el capítulo 3, se llegó a implementar el modelo matemático en espacio de estados que consta de 4 matrices siendo estas: Matriz de planta, matriz de control, matriz de salida y la matriz de acople. Así como su implementación en diagrama de bloques.

3. Con la implementación de las ecuaciones en espacio de estados, se desarrolló el diagrama de bloques en Simulink y el lenguaje de programación en el script del Matlab, obteniendo así para una resistencia de carga Rc = 0 ohm en el secundario del transformador previa simulación una corriente máxima de 34.31 A (primario) y 16.64 A (secundario) del transformador; cabe mencionar que, también existe transitorios en las corrientes tanto primario como secundario del transformador. Por otra parte, para un Rc = 50 ohm, Rc = 110 Ohm y Rc = 50000 ohm no existe transitorios, para un Rc = 50000 ohm existe desfase de ondas en el primario mas no en el secundario, aquí las ondas no sufren distorsión.

SUGERENCIAS

1. En la presente tesis se ha desarrollado el transformador en su conexión delta estrella (Δ – Y), al igual que la implementación del diagrama de bloques y el código script en el Matlab-Simulink. Por lo que se sugiere implementar en las futuras tesis de investigación las conexiones: Estrella – Estrella (Y – Y); Estrella – Delta (Y - Δ); Delta – Delta (Δ – Δ).

2. Viendo que el transformador es una máquina eléctrica estática, se sugiere complementar con el estudio Dinámico del transformador.

3. Realizar el estudio de los fenómenos transitorios, incluyendo las corrientes de cortocircuito, sobre tensiones atmosféricas y las sobre corrientes de conexión.

4. Mediante la implementación de diagramas de bloques y el lenguaje de programación a partir de modelos matemáticos y su posterior simulación podemos estudiar y evaluar de mejor manera todos estos parámetros internos del transformador trifásico en sus diferentes formas de conexión y operación.

5. El modelo matemático es uno de los pasos más importantes para establecer las ecuaciones matemáticas de un estado físico.

6. En el análisis clásico del transformador, se formula las ecuaciones diferenciales; a partir de ello se obtiene diferentes tipos de modelos, como: Transformada de La Place y en el Espacio de Estado.

7. Finalmente, mediante esta tesis se pretende dar un aporte más para una mejor enseñanza y aprendizaje que permitirá desarrollar de mejor manera el estudio de las maquinas eléctricas en forma teórica y práctica.

BIBLIOGRAFÍA

[1]. Bulucea, C. D. (1997). Modelling of Electrical Transformers in Dynamic Regimes.

[2]. Chapman, S. J. (2000). Maquinas Eléctricas. Santa Fe: MC GRAW HILL.

[3]. Concha, P. (s.f.). Transformador Real. Obtenido de patricioconcha.ubb.cl/transformadores/principi2.htm

[4]. Domínguez, S., Campoy, P., Sebastián, J., & Jiménez, A. (2006). Control en el Espacio de Estado. Pearson Education Limited.

[5]. Doxrud, J. (8 de diciembre de 2018). Sistemas y Sistemismo. Obtenido de http://www.libertyk.com/blog-articulos/2018/12/8/sistemas-y-sistemismo-por-jan-doxrud

[6]. Elgerd, O. (1970). ELECTRIC ENERGY SYSTEMS THEORY. New York: Mc Graw Gill.

[7]. Fitzgerald, A., Charles, K., & Stephen, D. (2004). Máquinas Eléctricas (6ta edición ed.). México: Mc Graw-Hill.

[8]. Fraile, J. (2003). Máquinas Eléctricas. España: McGraw Hill.

[9]. Guru, B., & Hiziroglu, H. (2003). Máquinas Eléctricas y Transformadores (3ra edición ed.). México: Alfaomega.

[10]. Happoldt. (1974). CENTRALES ELECTRICAS. Barcelona: Labor.

[11]. Holly, M. (2007). MATLAB para Ingenieros. Mexico: Pearson Educación.

[12]. Jimmie J., C. (2015). Máquiinas Electricas, Análisis y diseño con Matlab (6ta edición ed.). México: McGRAW-HILL.

[13]. Kosow, I. (1991). Maquinas Eléctricas y Transformadores. Mexico: Prentice-Hall.

[14]. Murray, R. (1984). Transformada de Laplace. México: McGraw Hill.

[15]. Nagle, R., Saff, E., & Snider, A. (2005). Ecuaciones Diferenciales (4ta edición ed.). México: Mc Graw-Hill.

[16]. Stephen J, C. (2012). Máquinas Eléctricas (5ta edición ed.). México: Mc Graw-Hill.

[17]. Villanueva, R. j. (2013). Implementación de Modelos de Transformadores para Análisis de Transistorios Electromagnéticos Rápidos [Tesis de Maestria, Instituto Politecnico Nacional de Mexico D.F.]. Repositorio Institucional. Obtenido de http://tesis.ipn.mx/handle/123456789/17806

[18]. Wilde, T. (2007). Màquinas Eléctricas y sistemas de potencia (6 ta ed.). Monterrey, México.: Pearson Educación.

ANEXOS DE LA TESIS.

1. **Introducción a MATLAB/SIMULINK.**

    - ✓ **Anexo 1** Introducción a MATLAB (principales comandos utilizados).
    - ✓ **Anexo 2** Introducción a SIMULINK.

2. **Espacios de trabajo en MATLAB.**

    - ✓ **Anexo 3** Entorno del MATLAB.
    - ✓ **Anexo 4** Ventana de comandos del MATLAB.

3. **Espacios de trabajo en SIMULINK.**

    - ✓ **Anexo 5** Entorno del SIMULINK.
    - ✓ **Anexo 6** Ventana de comandos del SIMULINK.

4. **Características del Lenguaje de programación en MATLAB.**

    - ✓ **Anexo 7** Implementación del lenguaje de programación en el script (ejemplo 01 correspondiente al capítulo IV, grafico 4.1).
    - ✓ **Anexo 8** Resultados obtenidos (ejemplo 01 correspondiente al capítulo IV, grafico 4.1).

5. **Características del diagrama de bloques implementados en SIMULINK.**

    - ✓ **Anexo 9** Implementación del diagrama de bloques en SIMULINAK (ejemplo 02 correspondiente al capítulo IV, grafico 4.11).
    - ✓ **Anexo 10** Resultados obtenidos (ejemplo 02 correspondiente al capítulo IV, grafico 4.11).

Figura Anexo 1

Introducción a MATLAB (principales comandos utilizados).

N°	Comando	Descripción
1	abs	Valor absoluto
2	acker	Calcula la matriz K para ubicar los polos de A-BK, vea también place
3	axis	Corrige la escala del gráfico actual, vea también plot, figure
4	bode	Dibuja el diagrama de Bode, vea también logspace, margin, nyquist1
5	c2dm	Pasa del sistema continuo al discreto
6	clf	Borra la figura (use clg en Matlab 3.5)
7	conv	Convolución (útil para multiplicar polinomios), vea también deconv
8	ctrb	Matriz de controlabilidad, vea también obsv
9	deconv	Deconvolución y división de polinomios, vea también conv
10	det	Halla el determinante de una matriz
11	dimpulse	Respuesta al impulso de sistemas lineales de tiempo discreto, vea también dstep
12	dlqr	Diseño de reguladores LQR lineales cuadráticos para sistemas de tiempo discreto, vea también lqr
13	dlsim	Simulación de sistemas lineales de tiempo discreto, vea también lsim
14	dstep	Respuesta al escalón de sistemas lineales de tiempo discreto, vea también stairs
15	eig	Calcula los autovalores de una matriz
16	eps	Tolerancia numérica del Matlab
17	feedback	Conexión de dos sistemas por realimentación.
18	figura	Crea una nueva figura o redefine la figura actual , vea también subplot, axis
19	for	Lazo For-Next
20	format	Formato Numérico (dígitos significativos, exponentes)
21	function	Para archivos-m del tipo función
22	grid	Dibuja la grilla en el gráfico actual
23	gtext	Agrega texto al gráfico actual, vea también text
24	help	Ayuda
25	hold	Mantiene el gráfico actual, vea también figure
26	if	Ejecuta código condicionalmente
27	imag	Devuelve la parte imaginaria de un número complejo, vea también real
28	impulse	Respuesta al impulso de sistemas lineales de tiempo continuo, vea también step, lsim, dlsim
29	input	Prompt para entrada de usuario
30	inv	Inversa de una matriz

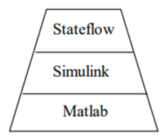
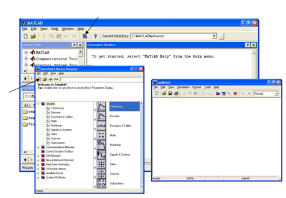
N°	Comando	Descripción
31	jgrid	Genera grilla de coeficiente de amortiguamiento (zeta) y tiempo de establecimiento (sigma) constantes , vea también sgrid, sigrid, zgrid
32	legend	Leyenda en un gráfico
33	length	Largo de un vector, vea también size
34	linspace	Devuelve un vector linealmente espaciado
35	lnyquist1	Produce un diagrama de Nyquist en escala logarítmica , vea también nyquist1
36	log	logaritmo natural, también log10: logaritmo común
37	loglog	Grafica usando doble escala logarítmica, también semilogx/semilogy
38	logspace	Devuelve un vector logarítmicamente espaciado
39	lqr	Diseño de reguladores lineales cuadráticos LQR para sistemas continuos, vea también dlqr
40	lsim	Simula un sistema lineal, vea también step, impulse, dlsim.
41	margin	Devuelve margen de ganancia, margen de fase, y frecuencias de cruce, vea también bode
42	norm	Norma de un vector
43	nyquist1	Grafica el diagrama de Nyquist, vea también lnyquist1. Note que este comando reemplaza al comando nyquist para obtener diagramas de Nyquist
44	obsv	Matriz de observabilidad, vea también ctrb
45	ones	Devuelve un vector o matriz de unos, vea también ceros
46	place	Calcula la matriz K para ubicar los polos de A-BK, vea también acker
47	plot	Dibuja un gráfico, vea también figure, axis, subplot.
48	poly	Devuelve el polinomio característico
49	polyadd	Suma dos polinomios
50	polyval	Valor numérico de un Polinomio
51	print	Imprime el gráfico actual (a impresora o a archivo postscript)
52	pzmap	Mapa de polos y ceros de sistemas lineales
53	rank	Halla la cantidad de renglones o columnas linealmente independientes de una matriz
54	real	Devuelve la parte real de un número complejo, vea también imag
55	rlocfind	Halla el valor de k y los polos en el punto seleccionado
56	rlocus	Grafica el lugar de raíces
57	roots	halla las raíces de un polinomio
58	rscale	Encuentra el factor de escala para un sistema con realimentación completa de estados
59	set	Set(gca,'Xtick',xticks,'Ytick',yticks) para controlar el número y el espaciado de marcas en los ejes

N°	Comando	Descripción
60	series	Interconexión en serie de sistemas Lineales que no dependan del tiempo
61	sgrid	Genera grilla de razón de amortiguación (zeta) y frecuencia natural (Wn) constantes , vea también jgrid, sigrid, zgrid
62	sigrid	Genera grilla de tiempo de establecimiento (sigma) constante, vea también jgrid, sgrid, zgrid
63	size	Devuelve la dimensión de un vector o matriz, vea también length
64	sqrt	Raíz cuadrada
65	ss	Crea modelos en espacio de estado o convierte modelos LTI a espacio de estado, vea también tf
66	ss2tf	representación Espacio de estado a función de transferencia , vea también tf2ss
67	ss2zp	representación Espacio de estado a polo-cero ,vea también zp2ss
68	stairs	Gráfico tipo escalera para respuesta discreta, vea también dstep
69	step	Dibuja la respuesta al escalón, vea también impulse, lsim, dlsim.
70	subplot	Divide la ventana Gráfico en secciones, vea también plot, figure
71	text	Agrega texto al gráficoactual, vea también title, xlabel, ylabel, gtext
72	tf	Crea una función de transferencia o convierte a función de transferencia, vea también ss
73	tf2ss	Función de Transferencia a representación en espacio de estado, vea también ss2tf
74	tf2zp	representación Función de Transferencia a Polo-cero , vea también zp2tf
75	title	Agrega un título al gráfico actual
76	wbw	Devuelve el ancho de banda dado el coeficiente de amortiguamiento y el tiempo de asentamiento o el tiempo de elevación.
77	xlabel/ylabel	Agrega una identificación al eje horizontal/vertical del gráfico actual, vea también title, text, gtext
78	ceros	Devuelve un vector o matriz de ceros
79	zgrid	Genera grilla de coeficiente de amortiguamiento (zeta) y frecuencia natural (Wn) constante, vea también sgrid, jgrid,sigrid
80	zp2ss	Polo-cero a representación en espacio de estado, vea también ss2zp
81	zp2tf	Polo-cero a representación función de transferencia , vea también tf2zp

Fuente: Elaboración propia.

Figura Anexo 2

Introducción a SIMULINK.

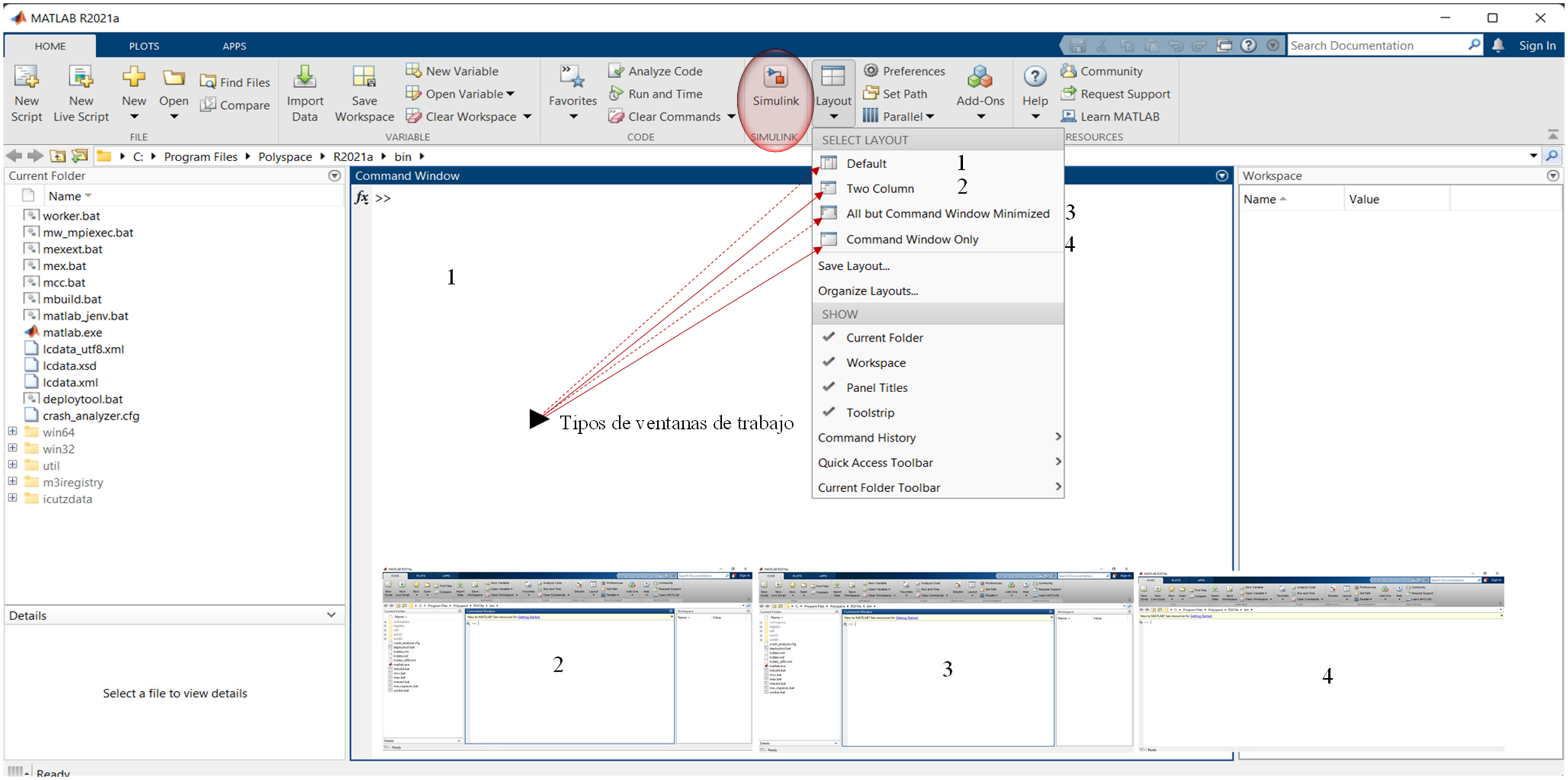
N°	Comando	Descripción
1	Introducción	SIMULINK es una toolbox especial de MATLAB que sirve para simular el comportamiento de los sistemas dinámicos. Puede simular sistemas lineales y no lineales, modelos en tiempo continuo y tiempo discreto y sistemas híbridos de todos los anteriores. Es un entorno gráfico en el cual el modelo a simular se construye clicando y arrastrando los diferentes bloques que lo constituyen. Los modelos SIMULINK se guardan en ficheros con extensión *.mdl.
2	Jerarquía de Matlab, Simulink, Stateflow	Con las nuevas versiones, SIMULINK ha ido ampliando sus librerías de bloques (blocksets) y capacidades. En concreto, destaca el paquete STATEFLOW, que permite la simulación de máquinas de estados.  Jerarquía de Matlab, Simulink, Stateflow Otras blocksets de interés son, por ejemplo, las de comunicaciones (Communications Blockset, CDMA Reference Blockset, RF Blockset) que incluyen bloques que simulan estaciones de telefonía móvil o dispositivos tales como los PLLs; las de aplicaciones específicas (Aerospace Blockset, Signal Processing Blockset, Video and Image Processing Blockset); y las de soporte (Gauges Blockset). Hay muchas demos y efectos (ver, por ejemplo, las demos de SimMechanics o Virtual Reality Toolbox *>>mech_conveyor_vr, >>mech_airbag_vr ...).* Además algunas toolboxes de MATLAB incorporan también bloques de SIMULINK. Es el caso, por ejemplo, de la Control Systems Toolbox, Neural Network Toolbox, Fuzzy Logic Toolbox, System Identification Toolbox,… Finalmente, también existen librerías de bloques que permiten interactuar con tarjetas de adquisición de dados y DSPs: RealTime Workshop, Embedded Targets for Motorola and TI, xPC Target.
3	Construcción de modelos	**Ventana de modelo:** Cada modelo (o submodelo) se construye en una ventana diferente. Por ello, para construir un nuevo modelo hay que abrir una nueva ventana de modelo untitled (ver Fig. 1) A partir de ahí, se trata de arrastrar los bloques que compondrán el modelo desde la librería de SIMULINK a dicha ventana. Antes de empezar a trabajar con SIMULINK, se sugiere echar un vistazo a las opciones de la barra de menús y la barra de herramientas de la ventana de modelo. figura 1 

N°	Comando	Descripción
		Interconectar bloques: Las interconexiones entre bloques se realizan arrastrando el ratón entre los puertos de entrada y salida de dichos bloques. También es posible seleccionar un bloque y, manteniendo la tecla presionada, clicar en el otro bloque. Se puede poner texto en cualquier sitio (haciendo doble clic en el sitio deseado), se pueden cambiar los nombres de los bloques y se pueden usar distintos colores (Format --- Foreground Color). También se pueden rotar bloques (Format --- Flip block, Rotate block), etc.
4	Interacción con el workspace de MATLAB: D	Desde un modelo SIMULINK, es posible usar funciones *.m, *.mat y variables del workspace de MATLAB. Los bloques relacionados son los bloques From File, From Workspace (en la librería Sources), To File, To WorkSpace (en la librería Sinks) y MATLAB Fcn (en la librería Functions & Tables).
5	Model Explorer:	Esta utilidad se abre al clicar en el icono de la ventana de modelo. En concreto, el objeto Base Workspace contiene las variables a las que pueden acceder todos los modelos Simulink
6	Bloque Scope:	Para visualizar el resultado de una simulación hay que clicar en el bloque Scope a fin de abrir la ventana de visualización. Si queremos poner un título, se puede clicar con el botón derecho sobre la representación a fin de abrir un menú de contexto y, en él, seleccionar la opción Axes properties…:
7	Formato Structure with time:	Una vez realizada la simulación en Simulink, si el formato elegido es Structure with Time, podemos comprobar que en el workspace de Matlab aparecen dos nuevas variables
7	Funciones fieldnames, isfield, getfield:	Es posible consultar qué campos tiene ScopeData con ayuda de fieldnames (esta función guarda el resultado en un cell array)

Fuente: Elaboración propia.

Figura Anexo 3

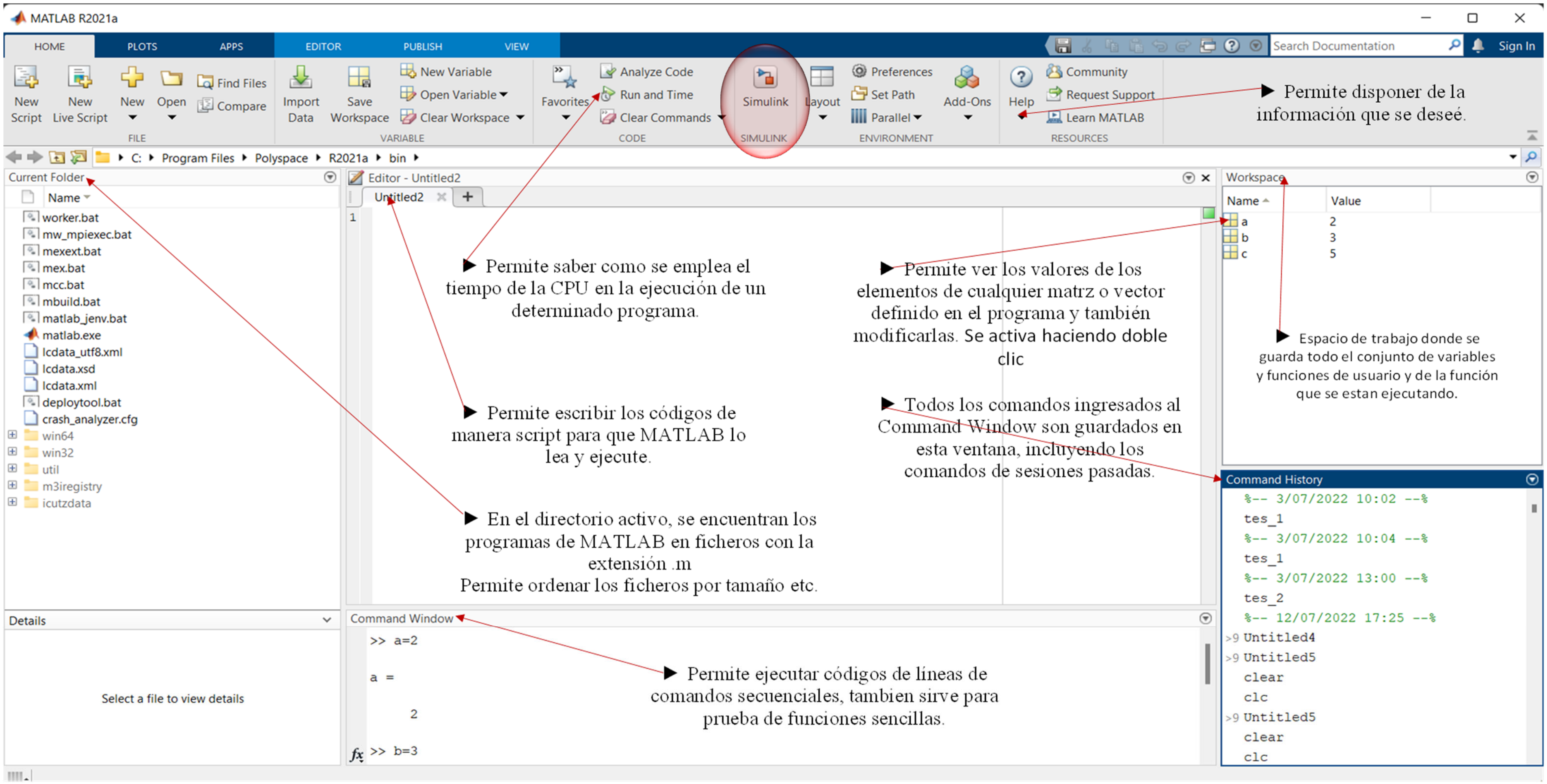
Entorno del MATLAB.



Fuente: Elaboración propia.

Figura Anexo 4

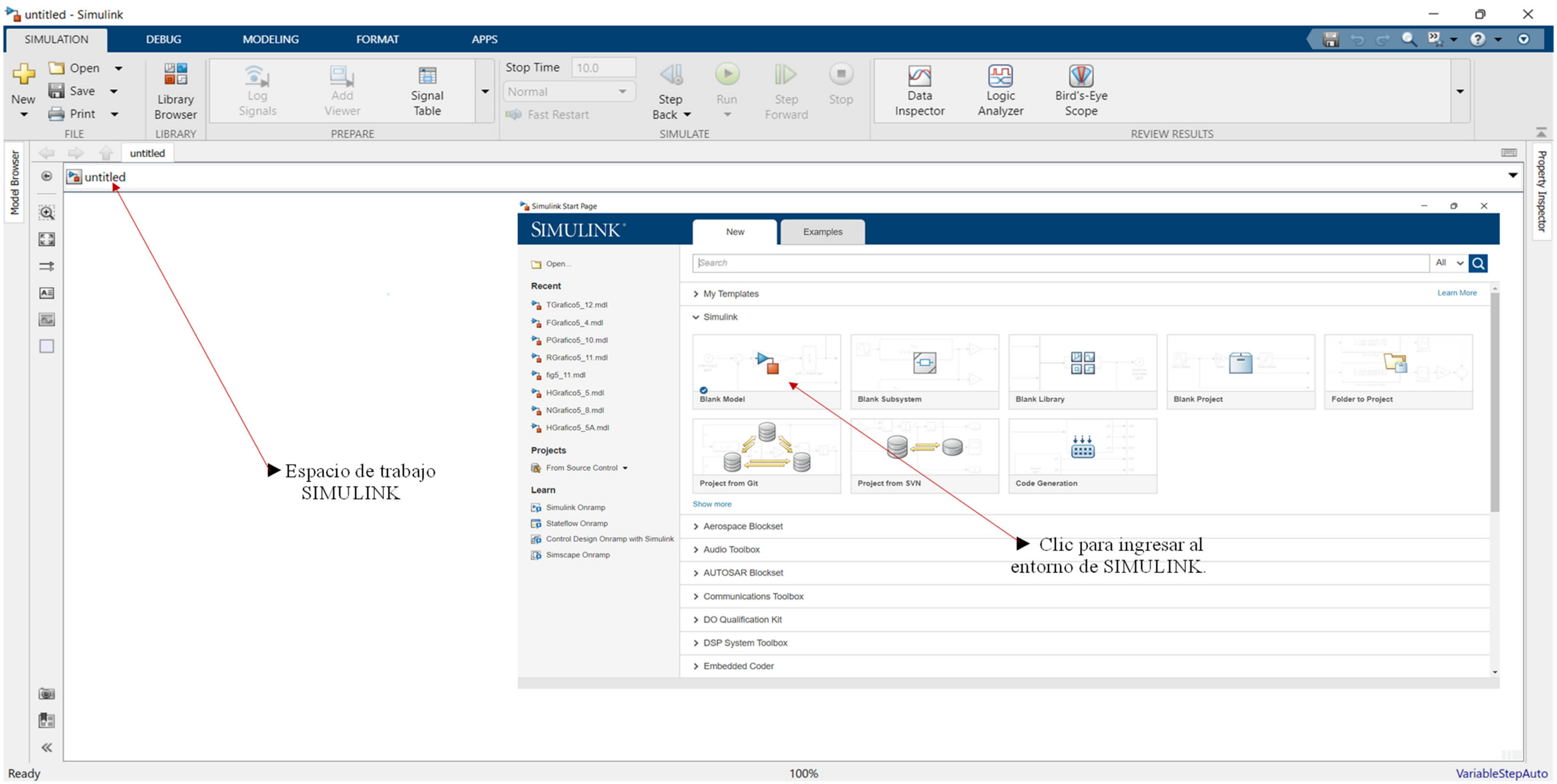
Ventana de comandos del MATLAB.



Fuente: Elaboración propia.

Figura Anexo 5

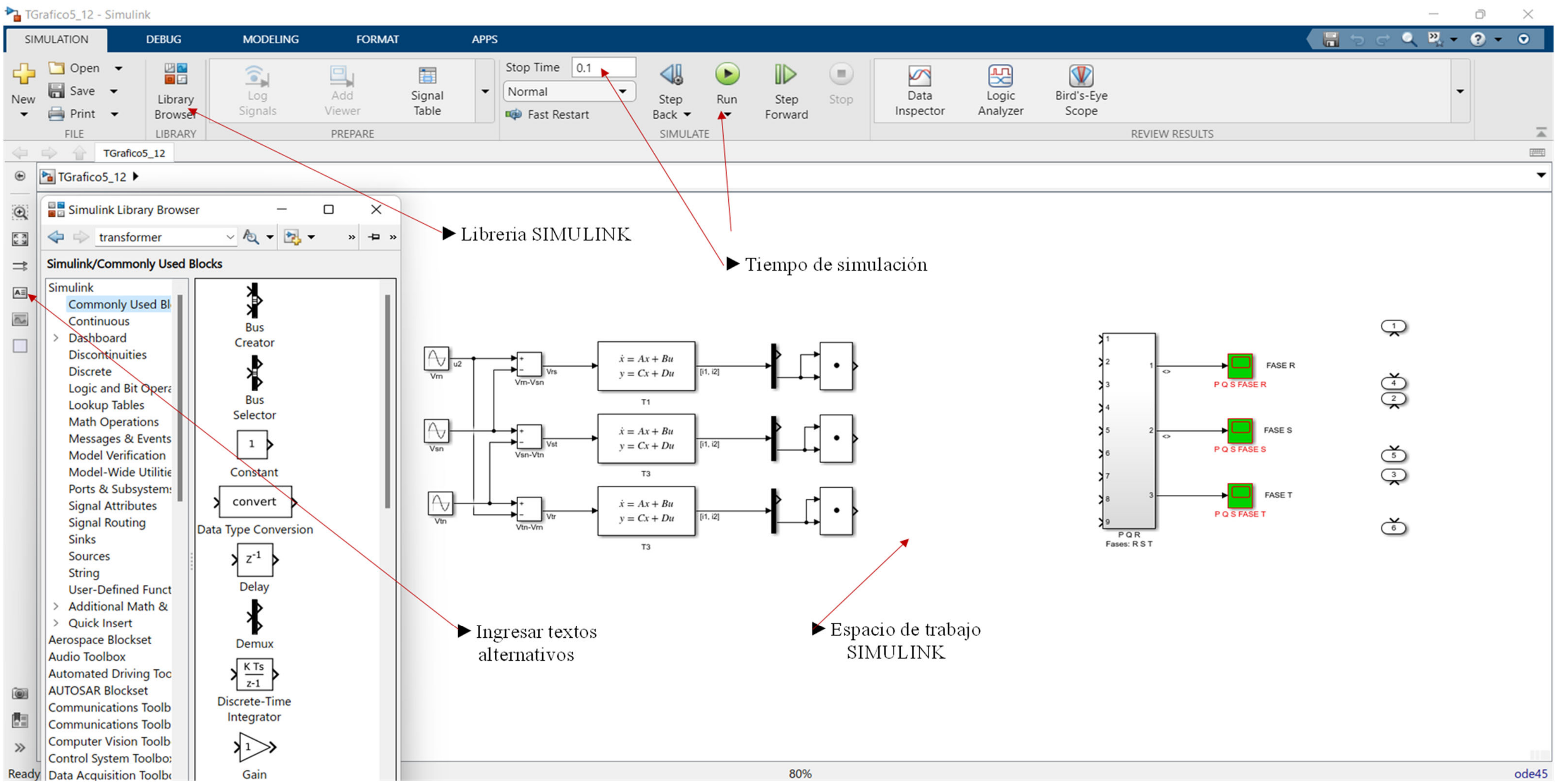
Entorno del SIMULINK.



Fuente: Elaboración propia.

Figura Anexo 6

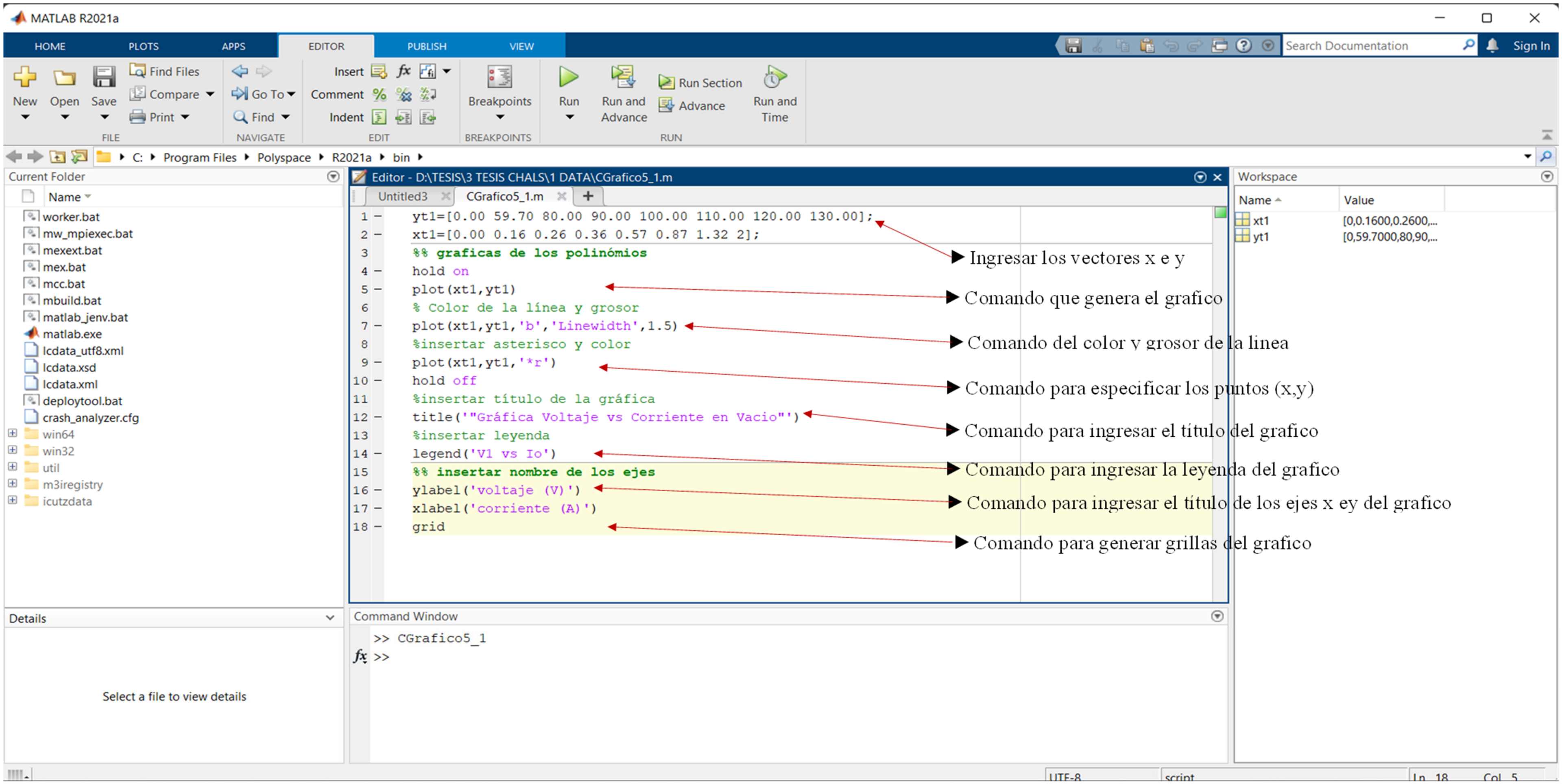
Ventana de comandos del SIMULINK.



Fuente: Elaboración propia.

Figura Anexo 7

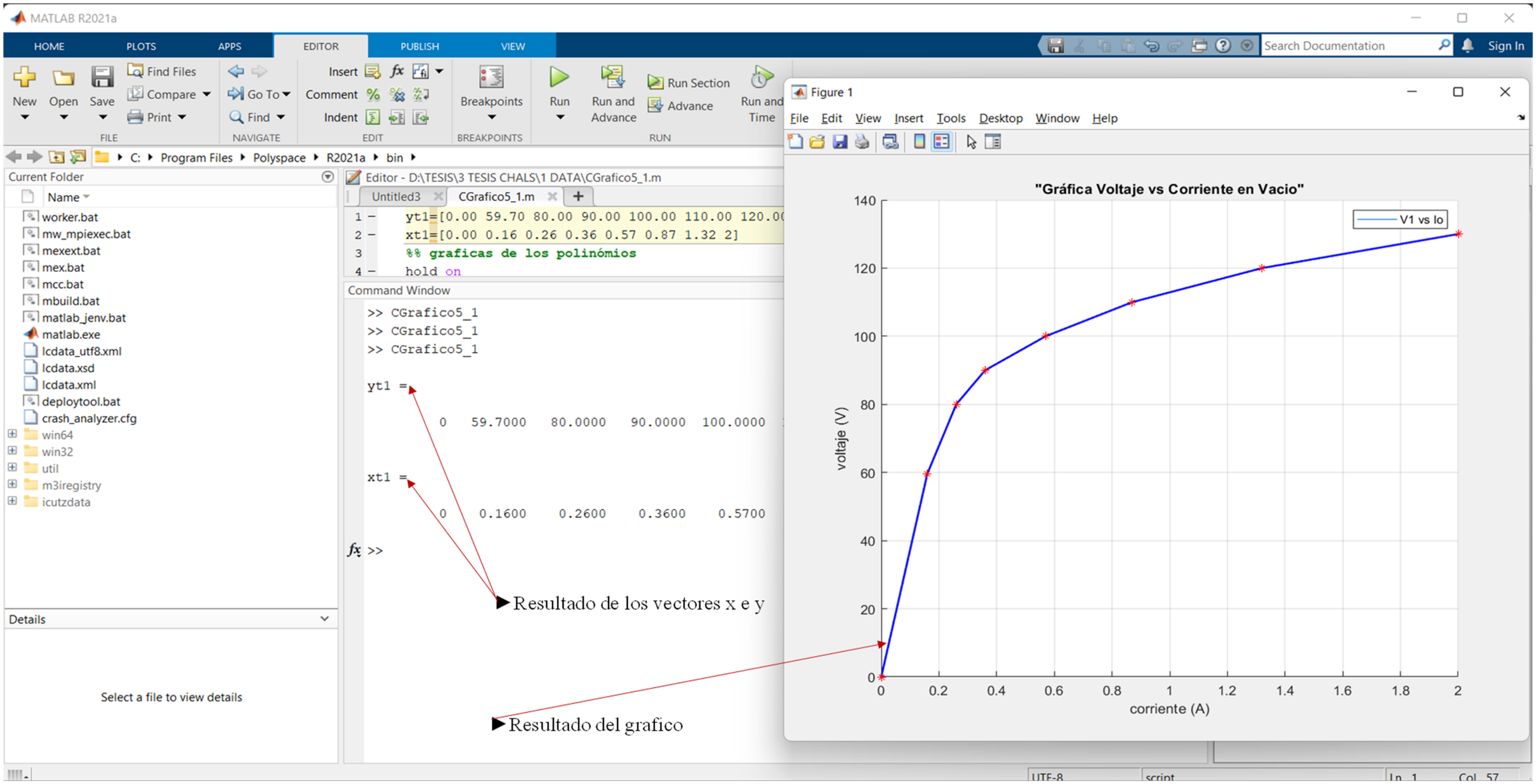
Implementación del lenguaje de programación en el script MATLAB (capitulo IV, grafico 4.1).



Fuente: Elaboración propia.

Figura Anexo 8

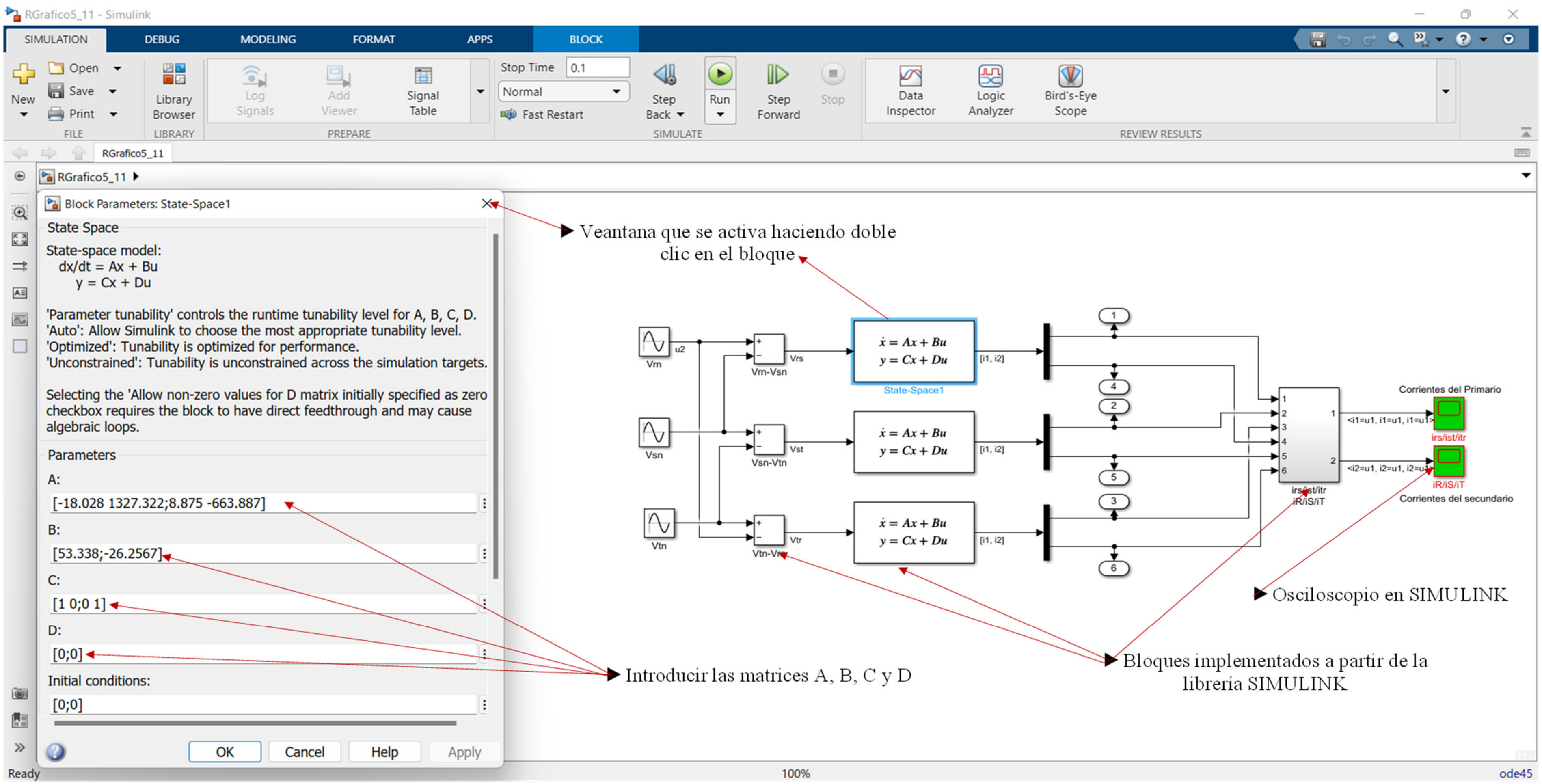
Resultados obtenidos MATLAB (capitulo IV, grafico 4.1).



Fuente: Elaboración propia.

Figura Anexo 9

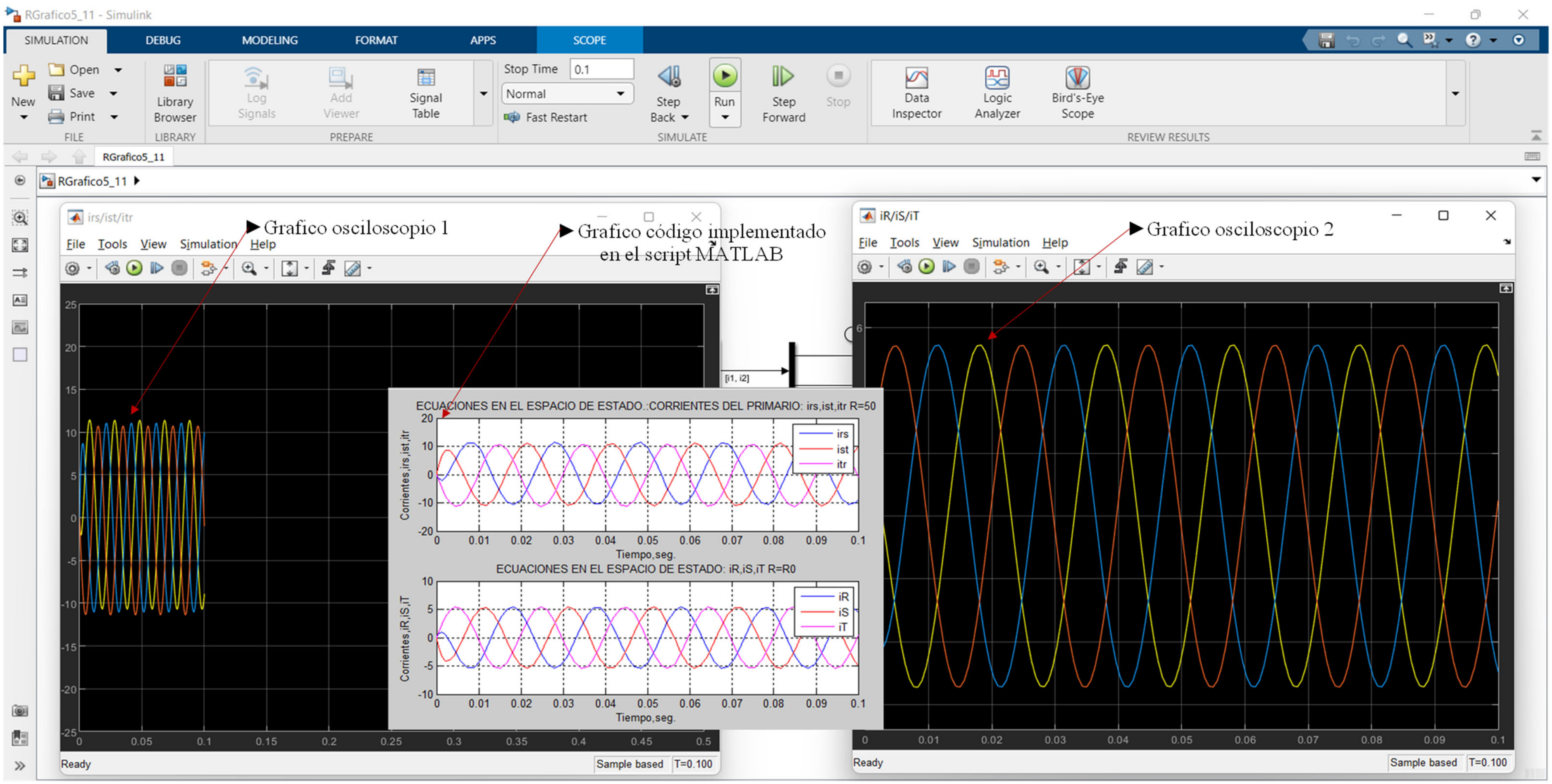
Implementación del diagrama de bloque en el SIMULINK (capitulo IV, grafico 4.11).



Fuente: Elaboración propia.

Figura Anexo 10

Resultados obtenidos SIMULINK (capitulo IV, grafico 4.11).



Fuente: Elaboración propia.